manuscripta math. 82, 349 - 362 (1994)

manuscripta mathematica

Classification Locale Simultanée de Deux Formes Symplectiques Compatibles

Francisco Javier TURIEL*

Consider a symplectic form ω and a closed 2-form ω_1 on a real or complex manifold. Suppose that the Nijenhuis torsion of the tensor field J defined by $\omega_1(X,Y) = \omega(JX,Y)$ vanishes. In this paper we give the complete local classification of the couple $\{\omega, \omega_1\}$ on a dense open set, defined by some minor conditions of regularity. Around each point of this open set we can find coordinates on wich ω is written with constant coefficients and ω_1 with affine ones.

Introduction

Supposons données sur une variété réelle ou complexe une forme symplectique ω et une 2-forme fermée ω_1. Supposons en outre ω et ω_1 compatibles au sens de Poisson, i.e. la torsion de Nijenhuis du tenseur J défini par $\omega_1(X,Y) = \omega(JX,Y)$ nulle (voir [5], [7], [9] et [10]). Dans cet article on donne la classification locale complète du couple $\{\omega, \omega_1\}$ sur un ouvert dense, appelé l'ouvert régulier. En particulier on montre l'existence, au voisinage de chaque point régulier, de coordonnées dans lesquelles ω s'écrit à coefficients constants et ω_1 à coefficients affines.

On se limitera ici aux propriétés géométriques du couple $\{\omega, \omega_1\}$ sans aborder les applications possibles des résultats obtenus à d'autres domaines. Pour la formulation des résultats en termes de structures de Poisson, plus proche de certains problèmes physiques, le lecteur est renvoyé à [13] où on trouvera aussi sous une forme un peu plus faible l'annonce de la classification de $\{\omega, \omega_1\}$. Pour une application de nos résultats à l'étude locale des systèmes bihamiltoniens voir, par exemple, [11]. Pour le cas global voir [1] et [2].

L'étude des couples $\{\omega, \omega_1\}$ est un problème classique. En 1946 Debever [3] a traité le cas d'un couple holomorphe, en dimension quatre, sans aucune condition de compatibilité. Dans [15] et [16], Vansnick classifie complètement, du point de vue local, les couples réels tels que $J^2 = -Id$ en appliquant les résultats obtenus à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles, en particulier l'équation de Monge-Ampère et celle des surfaces minimales de $\mathbf{R}^3$. L'auteur a obtenu dans

* Projet de recherche DGICYT PB91-0412

[12] la classification locale complète des couples compatibles quand les diviseurs élémentaires de J ne dépendent pas du point considéré (conditions de platitude du couple $\{\omega, \omega_1\}$).

Voici une méthode générale de construction de couples compatibles [14]. Considérons sur une variété P, réelle ou complexe, un tenseur H de type (1, 1). De façon naturelle on définit un morphisme de fibrés $\varphi_H : T^*P \to T^*P$. Soient ω la forme symplectique de Liouville de T^*P et $\omega_1 = (\varphi_H)^*\omega$. Alors $\{\omega, \omega_1\}$ est compatible si et seulement si la torsion de Nijenhuis de H s'annule. Cette méthode réalise tous les modèles locaux "réguliers" de couples compatibles.

Un dernier exemple. Considérons sur un groupe de Lie G deux formes symplectiques, ω et ω_1, respectivement invariantes à gauche et à droite. Alors $\{\omega, \omega_1\}$ est compatible [6].

1. L'ouvert régulier

Soit M une variété différentiable, réelle ou complexe, de dimension $2n$ et soit $\{\omega, \omega_1\}$ un couple de 2-formes (extérieures), la première de rang $2n$. Comme tout à l'heure J est le tenseur défini par la relation $\omega_1(X,Y) = \omega(JX,Y)$ ou de façon abrégée $\omega_1 = \omega(J,)$. On montre facilement que $\omega(J,) = \omega(,J)$ et que $\omega_r = \omega(J^r,)$ est une 2-forme pour tout entier r (en fait $r \geq 0$ si J n'est pas inversible). On dira que le couple $\{\omega, \omega_1\}$ est *compatible* si $d\omega = d\omega_1 = 0$ et si la torsion de Nijenhuis N_J du tenseur J est nulle. On rappelle que la torsion de Nijenhuis d'un tenseur G de type (1, 1) est donnée par la formule:

$$N_G(X,Y) = [GX, GY] + G^2[X,Y] - G[GX,Y] - G[X,GY]$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs quelconques.

A remarquer que $N_G = 0$ si et seulement si $G \circ L_X G = L_{GX} G$ pour tout champ de vecteurs X.

Soit $\mathbf{K}_N[t]$ l'algèbre des polynômes d'une variable à coefficients dans l'anneau des fonctions différentiables sur une variété N réelle (fonctions C^∞ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) ou complexe (fonctions holomorphes et $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Un polynôme $\varphi \in \mathbf{K}_N[t]$ sera dit *irréductible* s'il est irréductible en chaque point. De même on dira que $\varphi, \rho \in \mathbf{K}_N[t]$ sont *premiers entre eux* s'ils le sont partout.

Soit H un champ d'endomorphismes d'un fibré vectoriel $\pi : E' \to N$, i.e. une section de $E' \otimes (E')^*$. On dira que le *type algébrique de H est constant*, s'il existe des polynômes irréductibles $\varphi_1, ...\varphi_r \in \mathbf{K}_N[t]$, premiers entre eux, et des entiers positifs a_{ij}, $i = 1, ...k_j$ et $j = 1, ...r$, tels que pour chaque point p de la base $\{\{\varphi_j^{a_{ij}}(p)\}_{i=1,...k_j}\}_{j=1,...r}$ est la famille des diviseurs élémentaires de $H(p)$. Lorsque les coefficients de $\varphi_1, ...\varphi_r$ sont des constantes on dira que H est *0-déformable* [12].

Quoiqu' en général le type algébrique de H ne soit pas constant, il est facil de voir que l'ensemble des points au voisinage desquels il est constant est un ouvert dense.

Si τ est une 1-forme on notera $\tau \circ J$ la 1-forme définie par $(\tau \circ J)(X) = \tau(JX)$.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin $\{\omega, \omega_1\}$ sera un couple compatible. Soit $g_k = trace(J^k)$. Comme $trace(A \circ B) = trace(B \circ A)$ et que $dg_k(X) = L_X g_k$ il vient $dg_k(X) = ktrace(J^{k-1} \circ L_X J)$. D'autre part $J \circ L_X J = L_{JX} J$ car $N_J = 0$, d'où:

Lemme 1. *On a:* $kdg_{k+1} = (k+1)dg_k \circ J$.

Définition. *Un point $p \in M$ est régulier s'il existe un voisinage ouvert A de p tel que:*

(1) Le type algébrique de J est constant sur A,

(2) $E = \bigcap_{j=1,\dots 2n} Kerdg_j$ est un sous-fibré de TA et

(3) le type algébrique de la restriction de J à E est constant sur A (le lemme 1 entraîne $JE \subset E$).

L'ensemble des points réguliers est un ouvert dense de M, qu'on appelera *l'ouvert régulier*. La notion d'ouvert régulier peut être définie pour n'importe quel tenseur de type (1, 1) dont la torsion de Nijenhuis s'annule. Bien sûr l'ouvert régulier de J, de $aJ + bId$ où a et b sont des constantes la première non nulle, et de J^{-1}, si ce dernier est défini, est le même.

Théorème 1. *Il existe, au voisinage de chaque point régulier, des coordonnées dans lesquelles ω s'écrit à coefficients constants et ω_1 à coefficients affines.*

Le but des prochains paragraphes sera de prouver le théorème 1 ainsi que de dresser une liste complète de modèles locaux pour ω et ω_1.

2. Réduction du problème

Soit φ le polynôme caractérisque de J. Supposons que sur un voisinage A d'un point régulier p il s'écrive sous la forme $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, où $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{K}_A[t]$ sont premiers entre eux. On va voir que $(M, \{\omega, \omega_1\})$ se décompose, autour de p, comme un produit. Soit $J_k = \varphi_k(J)$. Alors $TA = ImJ_2 \oplus ImJ_1$ et $J_k : ImJ_k \to ImJ_k$ est un isomorphisme.

Lemme 2. *Chaque sous-fibré ImJ_k est involutif.*

Démonstration. Il suffira de prouver l'involutivité de ImJ_1. Un calcul direct montre que $N_{J_1}(X,Y) = \sum_{i=0}^{m}(\alpha_i(X)J^iY - \alpha_i(Y)J^iX)$ où chaque α_i est une 1-forme. Donc $N_{J_1}(ImJ_1, ImJ_1) \subset ImJ_1$, ce qui entraîne l'involutivité de ImJ_1 car $J_1 : ImJ_1 \to ImJ_1$ est un isomorphisme. C.Q.F.D.

Le lemme précédent nous permet d'écrire, autour de p, la variété M comme un produit $M' \times M''$ associé à la décomposition $ImJ_2 \oplus ImJ_1$ de l'espace tangent. Or $\omega_k(ImJ_2, ImJ_1) = 0$ car $\omega_k(\varphi_2(J)X, \varphi_1(J)Y) = \omega(J^k(\varphi_1\varphi_2)(J)X, Y) = 0$, donc en coordonnées produit (x, y) il vient: $\omega_k = \sum_{i<j} f_{kij}dx_i \wedge dx_j + \sum_{r<s} g_{krs}dy_r \wedge dy_s$, $k = 0, 1$, où $f_{kij} = f_{kij}(x)$ et où $g_{krs} = g_{krs}(y)$ puisque $d\omega_k = 0$. Bref $(M, \{\omega, \omega_1\})$ s'identifie au voisinage de p à un produit de couples $(M', \{\omega', \omega_1'\}) \times (M'', \{\omega'', \omega_1''\})$. Bien sûr la régularité et la compatibilité sont préservées par cette identification.

Si on refait plusiers fois la décomposition précédente, on voit qu'il suffit d'étudier les modèles locaux quand φ est une puissance d'un polynôme irréductible. On aura donc deux cas: $\varphi = (t+f)^{2n}$ et $\varphi = (t^2+ft+g)^n$, ce dernier seulement si la variété est réelle.

3. Quelques résultats auxiliaires

On rassemble ici un certain nombre de résultats fort utiles par la suite. Pour l'essentiel des démonstrations algébriques voir [4] et les paragraphes 1 et 3 de [12]. Soit V un espace vectoriel, réel ou complexe, de dimension $2n \geq 2$ muni d'un couple de 2-formes $\{\alpha, \alpha_1\}$ avec $rang\alpha = 2n$, et soit G l'endomorphisme de V défini par la relation $\alpha_1 = \alpha(G,)$. Lorsque G est nilpotent on dira que un vecteur $u \in V$ est *générique pour* G si $G^r u = 0$ entraîne $G^r = 0$, i.e. la dimension du sous-espace cyclique engendré par $u, Gu, G^2u, ...$ est égal au degré du polynôme minimal de G. L'ensemble des vecteurs génériques pour G est un ouvert dense de V.

Proposition 1. *Supposons G nilpotent. Alors il existe une décomposition $V = \oplus_{j=1}^{\ell} V_j$ en somme directe de sous-espaces invariants, avec $dimV = 2r_j$ et $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_\ell$, et une base $\{e_q^j\}$, $q = 1, ...2r_j$; $j = 1, ...\ell$, de V, où $\{e_q^j\}$, $q = 1, ...2r_j$, est une base de V_j, telles que:*

$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j} e_{2k-1}^{*j} \wedge e_{2k}^{*j})$ *et* $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j-1} e_{2k-1}^{*j} \wedge e_{2k+2}^{*j})$.

Les nombres $\ell, r_1, ...r_\ell$ sont complètement déterminés par la structure de G. Plus exactement, les diviseurs élémentaires de G sont $\{t^{r_j}, t^{r_j}\}_{j=1,...\ell}$.

En outre, si u est un vecteur générique pour G on peut choisir la base précédente de façon que $u = e_1^1$. Lorsque $u \in KerG - \{0\}$ on peut choisir cette base de manière que $u = e_{2r_s-1}^s$ pour un certain s.

Etant donné $u \in KerG - \{0\}$ soient $V_0 = Ker\alpha(u,)$, $\mathbf{K}\{u\}$ la droite engendrée par u et $V' = \frac{V_0}{\mathbf{K}\{u\}}$ On note $\pi : V_0 \to V'$ la projection canonique. Comme $GV_0 \subset V_0$ il existe un seul endomorphisme $G' \in End(V')$ tel que $G' \circ \pi = \pi \circ (G_{|V_0})$. De même il existe un seul couple de 2-formes sur V' tel que $\pi^*\alpha' = \alpha\ |_{V_0}$ et que $\pi^*\alpha_1' = \alpha_1'\ |_{V_0}$; en outre $rang\alpha' = dimV'$ et $\alpha_1' = \alpha'(G',)$.

Corollaire. *Les diviseurs élémentaires de G, $G\ |_{V_0}$ et G' sont les mêmes à l'exception d'un couple, qui est respectivement $\{t^{r_s}, t^{r_s}\}$, $\{t^{r_s}, t^{r_s-1}\}$ et $\{t^{r_s-1}, t^{r_s-1}\}$, où t^0 veut dire qu'on supprime ce diviseur et où r_s est l'entier qui apparaît dans le proposition précédente.*

Lemme 3. *Considérons sur l'espace vectoriel V un deuxième couple $\{\alpha', \alpha_1'\}$ tel que $rang\alpha' = rang\alpha = dimV$. Supposons que l'endomorphisme G soit nilpotent. Si $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$ et $KerG \subset ImG$, alors $\alpha' - \alpha$ appartient à l'idéal de l'algèbre extérieure engendré par $\alpha(KerG,)$. Relativement à la base de la proposition 1, on a:*

$$\alpha' = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j} e_{2k-1}^{*j} \wedge e_{2k}^{*j}) + \sum_{j=1}^{\ell}(\lambda_j \wedge e_1^{*j} + \mu_j \wedge e_{2r_j}^{*j}).$$

Voici, pour finir le paragraphe, une autre formulation de la compatibilité (voir la démonstration du corollaire 1 de [14]):

Proposition 2. *Le couple $\{\omega, \omega_1\}$ est compatible si et seulement si la forme ω est symplectique et $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$. En outre, si $\{\omega, \omega_1\}$ est compatible chaque ω_k est fermée.*

4. Le cas nilpotent à paramètre

Cette section est une extension des résultats du paragraphe 3 de [12]. Soit P une variété différentiable, réelle ou complexe, de dimension m et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur P de dimension $2n$, qui sera regardé ici comme un sous-fibré de TP. Considérons une 2-forme ω sur le feuilletage $\mathcal{F}$, i.e. pour chaque point p de la variété $\omega(p)$ est une 2-forme sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}(p)$. *Supposons* $\mathit{rang}\omega = 2n$. Si ω_1 est une autre 2-forme sur $\mathcal{F}$, on définit le morphisme $J : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ par la relation $\omega_1 = \omega(J,)$.

En calculant le long des feuilles de $\mathcal{F}$ on peut parler des dérivées extérieures $d\omega$ et $d\omega_1$, des dérivées de Lie $L_X\omega$ et $L_X\omega_1$ quand X est un champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}$, ainsi que de la torsion de Nijenhuis N_J de J. Ceci permet d'étendre la notion de compatibilité d'un couple au cas présent. Bien sûr $d\omega = d\omega_1 = 0$ et $N_J = 0$ si et seulement si $d\omega = d\omega_1 = d\omega_2 = 0$ (proposition 2). Pour trouver des exemples de ces structures, autres que ceux de cet article, il suffit d'adapter la construction de l'avant-dernier paragraphe de l'introduction au cas d'une variété N munie d'un feuilletage $\mathcal{G}$ et d'un morphisme $H : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. D'autres exemples peuvent être obtenus en considérant deux structures de Poisson avec les mêmes feuilles symplectiques.

Dans ce paragraphe $\{\omega, \omega_1\}$ sera un couple compatible sur $\mathcal{F}$ et le tenseur J sera supposé nilpotent et 0-déformable (par rapport à P toute entière!). On va prouver le résultat suivant dont nous aurons besoin dans le paragraphe 5:

Théorème 2. *Au voisinage de chaque point de P on peut trouver des coordonnées $(x_1, ..., x_m)$ telles que le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par $dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$ et que $\omega = \sum_{0 \le i<j \le 2n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$ et $\omega_1 = \sum_{0 \le i<j \le 2n} b_{ij} dx_i \wedge dx_j$ où les a_{ij}, b_{ij} sont des constantes.*

Remarque. On écrira df pour la différentielle d'une fonction et aussi pour sa restriction à $\mathcal{F}$. Pour une expression plus précise de ω et ω_1 voir la proposition 1.

Lemme 4. *Soit β une 2-forme fermée définie sur le feuilletage $\mathcal{F}$. Supposons qu'au voisinage d'un point $p \in P$ il existe des fonctions $f_1, ... f_r$ telles que la restriction de $df_1(p) \wedge ... \wedge df_r(p)$ à $\mathcal{F}(p)$ ne s'annule pas et que $\beta = \sum_{j=1}^r \tau_j \wedge df_j$ où $\tau_1, ... \tau_r$ sont des 1-formes sur $\mathcal{F}$. Alors autour de p on peut trouver des fonctions $g_1, ... g_r$ telles que $\beta = \sum_{j=1}^r dg_j \wedge df_j$.*

Soit $\mathcal{F}'$ un sous-fibré de $\mathcal{F}$ de dimension r. *On dira que le triplet* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \omega)$ est plat si autour de chaque point de la variété P il existe des coordonnées $(x_1, ... x_m)$ telles que: (1) $dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$ définit $\mathcal{F}$; (2) $dx_{r+1} = ... = dx_m = 0$ définit $\mathcal{F}'$ qui est donc un feuilletage; et (3) $\omega = \sum_{0 \le i<j \le 2n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$ avec $a_{ij} \in \mathbf{K}$.

Notons $\mathcal{F}''$ le sous-fibré de $\mathcal{F}$ orthogonal symplectique de $\mathcal{F}'$.

Lemme 5. *Le triplet $(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \omega)$ est plat si et seulement si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont involutifs et $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}''$ est de dimension constante.*

Démonstration. Le quotient local de M par $\mathcal{F}'$ est muni d'un feuilletage $\mathcal{G}$, quotient de $\mathcal{F}$, et chaque feuille de $\mathcal{G}$ d'une structure de Poisson. Le rang de toutes ces structures de Poisson est le même car $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}''$ est de dimension constante. Ceci permet de retrouver les expressions annoncées pour ω, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ (voir [8] et [17]). C.Q.F.D.

Le sous-fibré $KerJ = Ker\omega_1$ est involutif car $d\omega_1 = 0$. Son orthogonal est ImJ qui est involutif puisque $N_J = 0$. Compte tenu de la 0-déformabilité il vient:

Corollaire. *Le triplet $(\mathcal{F}, KerJ, \omega)$ est plat.*

Maintenant on va démontrer le théorème 2 par récurrence sur n. Pour $n = 0$ c'est clair, supposons donc le résultat vrai jusqu'à $n-1$. Compte tenu de la 0-déformabilité, soit $KerJ(q) \subset ImJ(q)$ pour tout $q \in P$ soit cela n'arrive jamais. *Supposons d'abord $KerJ \not\subset ImJ$.* Soit $(x_1, ... x_m)$ un système de coordonnées, autour de p, dans lequel ω s'écrive à coefficients constants et $KerJ$ et $\mathcal{F}$ soient définis par $dx_{r+1} = ... = dx_m = 0$ et par $dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$ respectivement. Considérons une base $\{e_q^j\}$ de $V = \mathcal{F}(p)$ comme dans la proposition 1 par rapport au couple $\alpha = \omega(p)$ et $\alpha_1 = \omega_1(p)$; alors $dimV_\ell = 2$ et $V_\ell \subset KerJ(p)$ car $KerJ(p) \not\subset ImJ(p)$.

Un changement linéaire des coordonnées $(x_1, ... x_{2n})$ permet de supposer que $\{\frac{\partial}{x_1}(p), \frac{\partial}{x_2}(p)\}$ est une base de V_ℓ et que $\omega = \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$. Maintenant $KerJ$ est défini par la condition $\lambda_{r+1} = ... = \lambda_{2n} = dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$ où chaque λ_i est une combinaison à coefficients constants de $dx_1, ... dx_{2n}$ tandis que l'expression de $\mathcal{F}$ n'a pas changé. Par conséquent les champs $\frac{\partial}{x_1}, \frac{\partial}{x_2}$ sont tangents à $KerJ = Ker\omega_1$. Bref $\omega_1 = \sum_{3 \le i < j \le 2n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ où chaque fonction f_{ij} ne dépend pas de (x_1, x_2) puisque $d\omega_1 = 0$. De cette manière le problème se réduit à prouver le théorème 2 pour les variables $(x_3, ... x_m)$, i.e. pour un feuilletage de dimension $2n-2$ et le couple $\omega' = \sum_{i=2}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$ et ω_1, ce qui découle de la hypothèse de récurrence.

Supposons maintenat $KerJ \subset ImJ$ et considérons, au voisinage de p, des coordonnées $(x_1, ... x_m)$ dans lesquelles $\mathcal{F}$ et $KerJ$ soient définis par $dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$ et par $dx_{r+1} = ... = dx_m = 0$ respectivement. Comme ω_1 et ω_2 sont fermées (proposition 2) et que $Ker\omega_2 = KerJ^2 \subset KerJ = Ker\omega_1$ il vient $\omega_1 = \sum_{r+1 \le i < j \le 2n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ et $\omega_2 = \sum_{r+1 \le i < j \le 2n} g_{ij} dx_i \wedge dx_j$ où les fonctions f_{ij}, g_{ij} ne dépendent pas de $(x_1, ... x_r)$. Ceci permet de regarder ω_1 et ω_2 comme deux formes dans les variables $(x_{r+1}, ... x_m)$ définies sur le feuilletage $dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$, dont la dimension est $2n - r$, la première étant symplectique. Il n'est pas difficile de vérifier la compatibilité, la 0-déformabilité et la nilpotence du couple $\{\omega_1, \omega_2\}$. D'après la hypothèse de récurrence on pourra choisir les coordonnées $(x_{r+1}, ... x_m)$ de manière que ω_1 et ω_2 s'écrivent à coefficients constants.

La proposition 1, à un changement linéaire des coordonnées $(x_1, ...x_{2n})$ près, nous permet de trouver des coordonnées $\{\{y_q^j\}_{q=1,...2r_j, j=1,...\ell}, x_{2n+1}, ...x_m\}$ telles que:

(1) $dx_{2n+1} = ... = dx_m = 0$ définit $\mathcal{F}$,

(2) ω_1 et ω_2 s'écrivent à coefficients constants,

(3) $\omega(p) = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j} dy_{2k-1}^j \wedge dy_{2k}^j)(p)$ et $\omega_1(p) = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j-1} dy_{2k-1}^j \wedge dy_{2k+2}^j)(p)$ où chaque $r_j \geq 2$ car $Ker J(p) \subset Im J(p)$.

De (3) il vient $\omega_2(p) = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j-2} dy_{2k-1}^j \wedge dy_{2k+4}^j)(p)$.

Bien sûr les expressions de ω_1 et ω_2 données plus haut s'étendent au domain de coordonnées tout entier puisque ces deux formes s'écrivent à coefficients constants.

Soit $\beta = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{r_j} dy_{2k-1}^j \wedge dy_{2k}^j)$ et soit H le tenseur défini sur le feuilletage $\mathcal{F}$ par la relation $\omega_1 = \beta(H,)$. Par construction H est nilpotent, $Ker H \subset Im H$ et $\beta(H^2,) = \omega_2$, ce qui nous permet d'appliquer le lemme 3, en chaque point, aux couples $\{\beta, \omega_1\}$ et $\{\omega, \omega_1\}$. D'où:

$$\omega = \sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{k=2}^{r_j} dy_{2k-1}^j \wedge dy_{2k}^j) + \sum_{j=1}^{\ell}(\lambda_j \wedge dy_1^j + \mu_j \wedge dy_{2r_j}^j).$$

D'après le lemme 4, appliqué à la deuxième somme qui est une 2-forme fermée, λ_j et μ_j peuvent être remplacées par des différentielles de fonctions, i.e.:

$$\omega = \sum_{j=1}^{\ell}\left[\sum_{k=2}^{r_j-1} dy_{2k-1}^j \wedge dy_{2k}^j + dy_1^j \wedge d(y_2^j - f_j) + d(y_{2r_j-1}^j + g_j) \wedge dy_{2r_j}^j\right].$$

Comme les coordonnées y_2^j et $y_{2r_j-1}^j$ n'interviennent pas dans l'expression de ω_1, on peut remplacer celles-ci par $y_2^j - f_j$ et $y_{2r_j-1}^j + g_j$ pour construire le système de coordonnées voulu *et finir la démonstration.*

5. Cas où le polynôme caractéristique de J est $(t + f)^{2n}$

Maintenant $g_k = n(-f)^k$. Sur un voisinage ouvert et connexe A d'un point régulier p, $Kerdf$ est un sous-fibré involutif du fibré tangent donc un feuilletage. Si $df(p) = 0$ alors, sur A, la fonction f est constante et le couple $\{\omega, \omega_1\}$ est 0-déformable. Pour obtenir un modèle explicite il suffit d'appliquer le théorème 2 à $\{\omega, \omega_1 + f\omega\}$, pour $m = 2n$, et la proposition 1 à $\{\omega(p), \omega_1(p) + f(p)\omega(p)\}$.

Seul cas à traiter donc: $df(p) \neq 0$, i.e. $dimKerdf = 2n - 1$. Le chemin à emprunter est le suivant:

1) On classifie d'abord le couple $\{\omega, \omega_1\}$ modulo df, c'est-à-dire on étudie la restriction de ce couple aux hypersurfaces de niveau de f. A l'aide du théorème 2 on arrive à l'expression $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}$; $\omega_1 = x_{2n}\omega + \tau + \alpha \wedge dx_{2n}$ où τ est une 2-forme, à coefficients constants, bien déterminée tandis que α est une 1-forme inconnue.

2) Si $\tilde{\omega}_1 = x_{2n}\omega + \tau + \tilde{\alpha} \wedge dx_{2n}$ est une deuxième 2-forme compatible avec ω, alors $\tilde{\alpha} \wedge dx_{2n} = (\alpha + dg) \wedge dx_{2n}$ et la méthode du chemin montre l'équivalence des couples $\{\omega, \omega_1\}$ et $\{\omega, \tilde{\omega}_1\}$. Ceci permet d'obtenir les modèles explicites.

Voici les détails techniques. Soit X_f l'hamiltonien de f, i.e. $\omega(X_f,) = -df$. Alors (lemme 1): $df \circ J = -f df$ et $L_{X_f}\omega = L_{X_f}\omega_1 = L_{X_f}(\omega_1 + f\omega)$ $= 0$. Par construction X_f est tangent à $Kerdf$ et $(\omega_{|Kerdf})(X_f,) = ((\omega_1 + f\omega)_{|Kerdf})(X_f,) = 0$. Prenons l'ouvert A assez petit. Soient P la variété quotient de A par le feuilletage associé à X_f et $\pi : A \rightarrow P$ la projection canonique. Alors il existe, sur P, un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension $2n - 2$, une forme symplectique β et une 2-forme fermée β_1, définies sur $\mathcal{F}$, tels que l'image réciproque par π du triplet $\{\mathcal{F},\beta,\beta_1\}$ est le triplet $\{Kerdf,\omega_{|Kerdf},(\omega_1+f\omega)_{|Kerdf}\}$.

Le couple $\{\beta,\beta_1\}$ *est compatible* car $d\beta_2=0$ puisque $\pi^*(\beta_2)=(\omega_2+2f\omega_1+f^2\omega)_{|Kerdf}$ est fermée. En outre le corollaire de la proposition 1 et le fait pour p d'être régulier entraînent que $\{\beta,\beta_1\}$ *est 0-déformable et nilpotent.*

D'après le théorème 2 et la proposition 1, il existe au voisinage de $\pi(p)$ des coordonnées $(z_1,\ldots z_{2n-1})$ telles que $\mathcal{F}$ soit défini par $dz_{2n-1}=0$ et que $\beta=\sum_{j=1}^{n-1}dz_{2j-1}\wedge dz_{2j}$ et $\beta_1=\sum_{1\le i<j\le 2n-2}b_{ij}dz_i\wedge dz_j$ où $b_{ij}\in\mathbf{K}$. On remarque que les coefficients b_{ij} sont connus de façon explicite quoiqu'on ne s'en serve pas pour le moment. Si l'on prend autour de p des coordonnées $(x_1,\ldots x_{2n})$ où $x_j=z_j\circ\pi$, $j=1,\ldots 2n-2$, et où $x_{2n}=-f$, il vient $\omega=\sum_{j=1}^{n-1}dx_{2j-1}\wedge dx_{2j}+\lambda\wedge dx_{2n}$.

Or d'après le lemme 4, $\lambda\wedge dx_{2n}=d\varphi\wedge dx_{2n}$ et il suffit de faire $x_{2n-1}=\varphi$ pour obtenir: $\omega=\omega'+dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}$ et $\omega_1=x_{2n}\omega+\tau+\alpha\wedge dx_{2n}$, où $\omega'=\sum_{j=1}^{n-1}dx_{2j-1}\wedge dx_{2j}$ et où $\tau=\sum_{1\le i<j\le 2n-2}b_{ij}dx_i\wedge dx_j$. Maintenant $X_f=\frac{\partial}{\partial x_{2n-1}}$ *ce qui permet de faire* $\alpha=\sum_{j=1}^{2n-2}a_j(x_1,\ldots x_{2n-2},x_{2n})dx_j$. De surcroît on peut supposer nulles toutes les coordonnées du point p sauf, peut-être, la dernière.

Soit Z le champ de vecteurs, combinaison fonctionnelle de $\frac{\partial}{x_1},\ldots\frac{\partial}{x_{2n-2}}$, défini par la relation $\omega(Z,)=\alpha$ et soit H le tenseur de type (1, 1) défini par la relation $\omega(H,)=\tau$. Alors H est *nilpotent* et

$$J=x_{2n}Id+H+\frac{\partial}{x_{2n-1}}\otimes\alpha-Z\otimes dx_{2n}\ .$$

Le champ Z et les formes ω' et τ déterminent complètement le couple $\{\omega,\omega_1\}$. En outre

$$\omega_2=x_{2n}^2\omega+\omega(H^2,)+2x_{2n}\alpha\wedge dx_{2n}+2x_{2n}\tau+(\alpha\circ H)\wedge dx_{2n}\ .$$

Compte tenu de la proposition 2, si l'on note $\mathcal{L}$ et D respectivement la dérivée de Lie et la différentielle extérieure par rapport aux variables $(x_1,\ldots x_{2n-2})$ et que l'on regarde Z, H, ω' et τ comme des tenseurs dans les variables $(x_1,\ldots x_{2n-2})$, le premier dépendant du paramètre x_{2n}, il vient:

Lemme 6. *Le couple* $\omega=\omega'+dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}$ *et* $\omega_1=x_{2n}\omega+\tau+\alpha\wedge dx_{2n}$ *est compatible si et seulement si* $\mathcal{L}_Z\omega'=-\omega'$ *et* $\mathcal{L}_Z\tau=-2\tau$*; ou, ce qui est équivalent, si et seulement si* $\mathcal{L}_Z\omega'=-\omega'$ *et* $\mathcal{L}_ZH=-H$.

Etant donné un entier $r\ge 0$ tel que $H^r\ne 0$, supposons $H^rZ=0$ sur un ouvert B. Alors sur cet ouvert $\mathcal{L}_Z(\omega'(H^r,))=D(\omega'(H^rZ,))=0$. Mais aussi $\mathcal{L}_Z(\omega'(H^r,))=(\mathcal{L}_Z\omega')(H^r,)+\omega'(\mathcal{L}_Z(H^r),)=-(r+1)\omega'(H^r,)$. Donc $B=\emptyset$, i.e. Z est générique pour H sur un ouvert dense de A. Compte tenu de l'expression de J donnée plus haut et du corollaire de la proposition 1, la remarque précédente entraîne que *p est régulier si et seulement si $Z(p)$ est générique pour H.*

Ainsi classifier le couple $\{\omega,\omega_1\}$ revient à classifier les champs de vecteurs Z tels que $Z(p)$ soit générique pour $H(p)$ et que $\mathcal{L}_Z\omega'=-\omega'$ et $\mathcal{L}_Z\tau=-2\tau$. Soit $\tilde{Z}$ un deuxième champ qui satisfait aussi ces hypothèses. D'après la proposition 1 les triplets $\{\omega'(p),\tau(p),Z(p)\}$ et $\{\omega'(p),\tau(p),\tilde{Z}(p)\}$ sont équivalents, et on peut supposer sans perte de généralité $Z(p)=\tilde{Z}(p)$, i.e. $\tilde{\alpha}(p)=\alpha(p)$, à l'aide d'un changement linéaire des coordonnées $(x_1,\ldots x_{2n-2})$ qui préserve les expressions de ω' et τ. Comme $d(\tilde{\omega}_1-\omega_1)=0$ il vient $D(\tilde{\alpha}-\alpha)=0$. Il existe donc une fonction g de $(x_1,...x_{2n-2},x_{2n})$ telle que $\tilde{\alpha} = \alpha + Dg$. Par conséquent $\tilde{\omega}_1 = x_{2n}\omega + \tau + (\alpha + Dg) \wedge dx_{2n}$ où $Dg(p_1,...p_{2n-2},p_{2n}) = 0$, car $Z(p) = \tilde{Z}(p)$.

Proposition 3. *Considérons au voisinage de p un deuxième couple $\{\omega, \tilde{\omega}_1\}$ tel que $\tilde{\omega}_1 = x_{2n}\omega + \tau + (\alpha + Dg) \wedge dx_{2n}$ où $g = g(x_1,...x_{2n-2},x_{2n})$. Supposons $Dg(KerH(p)) = 0$ et $Dg(KerH^k) = 0$ pour un certain $k \geq 0$. Alors il existe un troisième couple $\{\omega, \Omega\}$, équivalent au voisinage de p au couple $\{\omega, \tilde{\omega}_1\}$, tel que $\Omega = x_{2n}\omega + \tau + (\alpha + Dh) \wedge dx_{2n}$ où $h = h(x_1,...x_{2n-2},x_{2n})$ et où $Dh(KerH^{k+1}) = 0$.*

Si l'on applique plusieurs fois la proposition précédente il vient:

Corollaire. *Les couples $\{\omega, \omega_1\}$ et $\{\omega, \tilde{\omega}_1\}$ sont équivalents.*

Démonstration de la proposition 3. On remarque d'abord qu'on peut supposer sans perte de généralité $g(p_1,...p_{2n-2},x_{2n}) = 0$. Soit $\alpha_t = \alpha + tDg$ et soit Z_t le champ de vecteurs combinaison des $\frac{\partial}{x_1},...\frac{\partial}{x_{2n-2}}$ défini par la relation $\omega'(Z_t,) = \alpha_t$. *Dans cette démontration on regardera H comme un tenseur dans les variables* $(x_1,...x_{2n-2})$. En particulier $\tau = \omega'(H,)$ et $\omega'(ImH^r, KerH^r) = 0$ pour tout entier $r \geq 0$. On commence par chercher, sur un voisinage ouvert du compact de $\mathbf{K}^{2n}$: $\{(p_1,...p_{2n-2},p_{2n})\} \times [0,1]$ un champ de vecteurs $X_t = \sum_{j=1}^{2n-2} \varphi_j(x_1,...x_{2n-2},x_{2n},t)\frac{\partial}{x_j}$ tel que:

(1) $\mathcal{L}_{X_t}\omega' = \mathcal{L}_{X_t}\tau = 0$.

(2) $\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t = Dg$.

(3) X_t soit tangent au feuilletage (sous-fibré involutif) ImH^k.

(4) X_t s'annule sur $\{(p_1,...p_{2n-2},p_{2n})\} \times [0,1]$.

Pour y arriver on considère une fonction $f_t(x_1,..x_{2n-2},x_{2n})$, définie au voisinage de $\{(p_1,...p_{2n-2},p_{2n})\} \times [0,1]$, et on définit X_t par $Df_t = i_{X_t}\omega'$. Alors les quatre conditions précédentes seront satisfaites si f_t est une solution de l'équation $Z_tf_t = -f_t - g$ telle que:

(I) $D(Df_t \circ H) = 0$.

(II) $Df_t(KerH^k) = 0$.

(III) $Df_t(p_1,...p_{2n-2},p_{2n}) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après la proposition 1.A de l'appendice une telle solution f_t existe. En effet, maintenant A est un voisinage ouvert de $(p_1,...p_{2n-2})$ dans $\mathbf{K}^{2n-2}$, l'espace de paramètres est un ouvert B de $\mathbf{K}^2$ contenant $\{p_{2n}\} \times [0,1]$ et $\mathcal{L}_{Z_t}H = (1-t)\mathcal{L}_{Z_0}H + \mathcal{L}_{Z_1}H = -H$ (voir le lemme 6). En outre $Z_t = Z_0 + t(Z_1 - Z_0)$ est générique pour H sur $\{(p_1,...p_{2n-2},p_{2n})\} \times [0,1]$ car $Z_0(p)$ est générique pour H et $(Z_1 - Z_0)(p) \in ImH$ puisque $\omega'(Z_1 - Z_0, KerH) = Dg(KerH)$ s'annule en p. Finalement $g(p_1,...p_{2n-2},x_{2n}) = 0$ et $D(Dg \circ H) = D(\tau(Z_1 - Z_0,)) = \mathcal{L}_{Z_1}\tau - \mathcal{L}_{Z_0}\tau = 0$ (lemme 6).

La méthode du chemin appliquée à X_t permet de trouver une famille de germes de difféomorphismes $(x_1,...x_{2n-2}) \to F_{x_{2n}}(x_1,...x_{2n-2})$, qui préservent $(p_1,...p_{2n-2})$ et tels que:

$$(F_{x_{2n}})^*\omega' = \omega';\ (F_{x_{2n}})^*\tau = \tau \text{ et } (F_{x_{2n}})^*(\alpha + Dg) = \alpha.$$

Maintenant on peut construire un germe de difféomorphisme

$$x \to G(x) = (F_{x_{2n}}(x_1,...x_{2n-2}), x_{2n-1} + \varphi(x_1,...x_{2n-2},x_{2n}), x_{2n})$$

tel que $G(p) = p$ et que $G^*\omega = \omega$. En effet $G^*\omega = \omega' + \rho \wedge dx_{2n} + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} + d\varphi \wedge dx_{2n}$ où ρ est une 1-forme qui ne dépend que de $F_{x_{2n}}$; comme $d(\rho \wedge dx_{2n}) = 0$ on peut choisir ρ sous la forme d'une différentielle d'une fonction ψ (lemme 4) et faire $\varphi = -\psi$.

En outre: $G^*(x_{2n}\omega + (\alpha + Dg) \wedge dx_{2n}) = x_{2n}\omega + \alpha \wedge dx_{2n}$ et $G^*\tau = \tau + Dh \wedge dx_{2n}$ où $h = h(x_1, \dots x_{2n-2}, x_{2n})$.

Pour finir la démonstration on prouvera que $Dh(KerH^{k+1}) = 0$. Le point $(x_1, ..x_{2n-2})$ étant fixé, comme X_t est tangent à ImH^k, la courbe $\gamma(s) = F_s(x_1, ..x_{2n-2})$ est contenue dans une feuille de ImH^k. Par suite le champ de vecteurs, i.e. la vitesse de chacune de ces courbes, $V = \sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial (F_{x_{2n}})_j}{\partial x_{2n}} \frac{\partial}{x_j}$ est tangent à ImH^k.

Comme $F_{x_{2n}}$ préserve ω' et τ il préserve aussi H et chaque feuilletage $KerH^r$. Soit $T = \sum_{j=1}^{2n-2} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ un champ tangent à $KerH^{k+1}$, alors:

$$(G^*\tau)(\frac{\partial}{\partial x_{2n}}, T) = \tau(V, (F_{x_{2n}})_* T) = \omega'(HV, (F_{x_{2n}})_* T) = 0$$

car HV est tangent à ImH^{k+1}. Or $(G^*\tau)(\frac{\partial}{\partial x_{2n}}, T) = (\tau + Dh \wedge dx_{2n})(\frac{\partial}{\partial x_{2n}}, T) = -Dh(T)$ donc $Dh(T) = 0$, c'est-à-dire $Dh(KerH^{k+1}) = 0$. C.Q.F.D.

Pour obtenir dans le cas non 0-déformable un modèle explicite du couple $\{\omega, \omega_1\}$, on va remplacer les coordonnées $(x_1, \dots x_{2n-2})$ par des coordonnées (x_i^j) dans lesquelles ω' et τ aient des expression analogues à celles de la proposition 1. D'autre part on fera $x_{2n-1} = y_1$ et $x_{2n} = y_2 + a$ où a est choisi de façon que, cette fois-ci, toutes les coordonnées de p soient nulles. Comme champ de vecteurs on prendra:

$$Z = \frac{\partial}{\partial x_1^1} + \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{r_j} [(i - \tfrac{1}{2}) x_{2i-1}^j \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}^j} - (i + \tfrac{1}{2}) x_{2i}^j \frac{\partial}{\partial x_{2i}^j}] \right).$$

Finalement on obtient:

Théorème 3. *Considérons un couple compatible $\{\omega, \omega_1\}$. Supposons que le polynôme caractéristique de J est $(t + f)^{2n}$. Alors au voisinage de chaque point régulier il existe un système de coordonnées $((x_i^j), y_1, y_2)$, ayant ce point pour origine, tel que:*

(a) $i = 1, \dots 2r_j$ et $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_\ell$. En outre il peut manquer soit les coordonnées (x_i^j) soit les coordonnées (y_1, y_2).

(b) $\omega = \sum_{j=1}^{\ell} (\sum_{i=1}^{r_j} (dx_{2i-1}^j \wedge dx_{2i}^j) + dy_1 \wedge dy_2$

$\omega_1 = (y_2 + a)\omega + \tau + \alpha \wedge dy_2$

où: $\tau = \sum_{j=1}^{\ell} (\sum_{i=1}^{r_j - 1} (dx_{2i-1}^j \wedge dx_{2i+2}^j)$

et $\alpha = dx_2^1 + \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{r_j} [(i + \tfrac{1}{2}) x_{2i}^j dx_{2i-1}^j + (i - \tfrac{1}{2}) x_{2i-1}^j dx_{2i}^j] \right).$

Remarque. Les diviseurs élémentaires de J déterminent complètement le modèle local. Si J est 0-déformable, i.e. s'il n'y a pas de coordonnées (y_1, y_2), on a comme diviseurs élémentaires: $\{(t-a)^{r_j}, (t-a)^{r_j}\}$, $j = 1, \ldots \ell$, tandis que pour le cas non 0-déformable on trouve: $(t-(y_2+a))^{r_1+1}, (t-(y_2+a))^{r_1+1}, \{(t-(y_2+a))^{r_j}, (t-(y_2+a))^{r_j}\}$, $j = 2, \ldots \ell$.

6. Cas où le polynôme caractéristique de J est $(t^2+ft+g)^n$

On va montrer que dans ce cas la variété est munie d'une structure complexe canonique H et que $\{\omega, \omega_1\}$ est la partie réelle d'un couple complexe $\{\Omega, \Omega_1\}$. On travaillera au voisinage d'un point régulier p. Soit $J_0 = 2(4g-f^2)^{-\frac{1}{2}}J + f(4g-f^2)^{-\frac{1}{2}}Id$, ce qui a un sens car $f^2 - 4g$ est une fonction strictement négative. Alors $(J_0^2 + Id)^n = 0$. Le type algébrique de J est constant au voisinage p, donc il est de même pour J_0. Ceci veut dire que J_0 est 0-déformable. Soit H la partie semi-simple de J_0. Alors $H^2 = -Id$. En outre il existe un polynôme $\varphi(t)$ à coefficients constants (J_0 est 0-déformable!) tel que $H = \varphi(J_0)$. Ceci entraîne que $H = \sum_{k=0}^{s} h_k J^k$ où chaque h_k est une fonction de f et de g.

Il est facile de voir que $N_H(X,Y) = \sum_{r=0}^{m}(\alpha_r(X)J^rY - \alpha_r(Y)J^rX)$ où chaque α_r s'exprime à l'aide de $df, dg, df \circ J, dg \circ J, df \circ J^2, dg \circ J^2, \ldots$. Soit E le sous-fibré du fibré tangent $Kerdf \cap Kerdg = \bigcap_{j=1,\ldots 2n} Kerdg_j$ (voir la définition de point régulier). Ce sous-fibré est J-stable donc $\alpha_r(E) = 0$. De surcroît E a une structure, par rapport à H, de sous-fibré vectoriel complexe de codimension complexe ≤ 1.

D'un autre côté $N_H(HX,Y) = -HN_H(X,Y)$ car $H^2 = -Id$. D'où si X est une section de E il vient $\sum_{r=0}^{m}\alpha_r(Y)J^rHX = -H(\sum_{r=0}^{m}\alpha_r(Y)J^rX)$. Comme H est inversible et commute avec J ceci entraîne finalement $N_H(X,Y) = 0$. En d'autres termes N_H ne dépend que du fibré normal à E. Or si Z est un champ de vecteurs transverse à E, alors $\{Z, HZ\}$ est une base d'un supplémentaire de E et $N_H(Z,HZ) = -N_H(HZ,Z) = HN_H(Z,Z) = 0$. Donc $N_H = 0$, i.e. *H est une structure complexe.*

Les formes $\Omega = \omega + i\tilde{\omega}$ et $\Omega_1 = \omega_1 + i\tilde{\omega}_1$, où $\tilde{\omega}(X,Y) = -\omega(HX,Y)$ et où $\tilde{\omega}_1(X,Y) = -\omega_1(HX,Y)$, sont de type (2, 0) et leurs respectives parties réelles sont fermées. Par suite Ω et Ω_1 sont holomorphes et $d\Omega = d\Omega_1 = 0$. En outre Ω est symplectique complexe. Le tenseur qui relie Ω et Ω_1 est encore J qui devient ainsi un tenseur holomorphe. Le couple $\{\Omega, \Omega_1\}$ est compatible puisque $N_J = 0$.

Comme H est la partie semi-simple de J_0 le tenseur $J_0 - H$ est nilpotent. Donc $(J_0 - H)^n = 0$. D'où $(J + \frac{f}{2}Id - \frac{1}{2}(4g-f^2)^{\frac{1}{2}}H)^n = 0$. Autrement dit le polynôme complexe $(t+h)^n$ où $h = \frac{1}{2}(f - i(4g-f^2)^{\frac{1}{2}})$ annule J, ce qui entraîne que $(t+h)^n$ est le polynôme caractéristique complexe de J. Par conséquent h est une fonction holomorphe. En plus $Kerdh = Kerdf \cap Kerdg = E$. D'autre part si $(t^2+ft+g)^{a_1}, \ldots (t^2+ft+g)^{a_r}$ sont les diviseurs élémentaires de J et que $T_xM = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ est une décomposition de T_xM associée aux mêmes, alors chaque sous-espace E_j est stable par rapport à J_0 et à H. Ceci permet de refaire le raisonnement de tout à l'heure sur chaque E_j et de conclure que $(t+h)^{a_1}, \ldots (t+h)^{a_r}$ sont les diviseurs élémentaires complexes de J. La même chose arrive pour les diviseurs élémentaires réels et complexes de la restriction de J à E.

Bref le point p est aussi régulier pour le couple $\{\Omega, \Omega_1\}$, son modèle local est donné par le théorème 3, et pour obtenir celui du couple $\{\omega, \omega_1\}$ il suffit de considérer la partie réelle de chaque 2-forme complexe.

Théorème 4. *Soit $\{\omega, \omega_1\}$ un couple compatible. Alors le modèle au voisinage de chaque point régulier est un produit fini de facteurs choisis parmi:*
(a) Si la variété est complexe, ceux du théorème 3.
(b) Si la variété est réelle, ceux du théorème 3 et les parties réelles des modèles complexes de ce théorème.
Les diviseurs élémentaires de J déterminent complètement le modèle local.

Appendice: L'équation $Zf = af + g$

Considérons sur un ouvert A de $\mathbf{K}^n$ un tenseur H, de type (1, 1), à coefficients constants et nilpotent. Soit B une variété différentiable (l'espace de paramètres). Les éléments de $A \times B$ seront notés (x, y) tandis que $\mathcal{L}$ et D désigneront, respectivement, la dérivée de Lie et la différentielle extérieure par rapport aux variables $x = (x_1, ... x_n)$. Soit Z un champ de vecteurs sur A dépendant du paramètre $y \in B$.

Proposition 1.A. *Supposons donnés un point $p \in A$, un compact $K \subset B$, un scalaire a et une fonction $g : A \times B \to \mathbf{K}$ tels que: (1) $L_Z H = cH$ où $c \in \mathbf{K}$; (2) Z est générique pour H sur $\{p\} \times K$; (3) $D(Dg \circ H) = 0$ et $g(\{p\} \times B) = 0$.*

Alors il existe un voisinage ouvert U de p, un ouvert $V \supset K$ et une fonction $f : U \times V \to \mathbf{K}$ telle que: (I) $Zf = af + g$; (II) $D(Df \circ H) = 0$ et (III) $Df = 0$ sur $\{p\} \times V$. En outre si $Dg(KerH^r) = 0$ on peut choisir f de façon que $Df(KerH^r) = 0$.

On fera la démonstration en plusieurs étapes. *Supposons pour l'instant prouvée toute la proposition sauf l'assertion relative à $Df(KerH^r)$, qu'on va démontrer ensuite.* En retrécissant A on peut trouver un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ tel que les feuilles du feuilletage $KerH^r$ restreint à A soient les ensembles $\varphi^{-1}(a')$, $a' \in A'$, lorsque φ est regardée commme une submersion de A dans $A' = \varphi(A)$. Puisque $Dg(KerH^r) = 0$ et $\mathcal{L}_Z H = cH$ on peut trouver un triplet $\{Z', H', g'\}$ sur $A' \times B$ projection du triplet $\{Z, H, g\}$. Il existe donc une bonne solution $f' : U' \times V \to \mathbf{K}$ de l'équation $Z'f' = af' + g'$ et il suffira de faire $f = f' \circ \varphi$.

Prouvons (I), (II) et (III). Si $H = 0$ on retrouve le cas habituel d'une équation différentielle ordinaire. Supposons maintenant prouvée la proposition jusqu'à la dimension $n-1$ et pour tout scalaire a. Un calcul direct à l'aide de deux champs de vecteurs X, Y tels que $[X, Y] = 0$ et que $\mathcal{L}_X H = \mathcal{L}_Y H = 0$, montre:

Lemme 1.A. *Etant donnée une 1-forme α sur A si $D(\alpha \circ H) = 0$ alors $D(\alpha \circ H^2) = -D\alpha(H, H)$. En particulier $D(Dg \circ H^r) = 0$ pour tout r.*

Lemme 2.A. *Considérons une fonction $h_1 : A \times B \to \mathbf{K}$. Supposons $Dh_1(KerH) = 0$ et $D(Dh_1 \circ H) = 0$. Alors il existe un voisinage ouvert U de p et une fonction $h : U \times B \to \mathbf{K}$ telle que: $Dh \circ H = Dh_1$; $h(\{p\} \times B) = 0$ et $Dh(p, y) = 0$ pour tout $y \in B$ tel que $Dh_1(p, y) = 0$.*

Démonstration. Prenons un sous-fibré E de TA suplémentaire de $KerH$. Alors il existe un morphisme $\rho : TA \to TA$ tel que $(\rho \circ H)_{|E} = Id$. Soit $\alpha =$

$Dh_1 \circ \rho$. Clairement $\alpha \circ H = Dh_1$. D'après le lemme 1.A, $D\alpha(ImH, ImH) = 0$ car $D(\alpha \circ H^2) = D(Dh_1 \circ H) = 0$. Supposons choisies les coordonnées $(x_1, ...x_n)$ de manière que le feuilletage ImH soit défini par $dx_1 = ... = dx_k = 0$. Alors $D\alpha = \sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n} f_{ij}dx_i) \wedge dx_j$. Un raisonnement simple montre la existence d'un voisinage ouvert U de p, difféomorphe à une boule, et des fonctions $f_j : U \times B \to \mathbf{K}$, $j = 1, ...k$. telles que $f_j(\{p\} \times B) = 0$ et que $D\alpha = \sum_{j=1}^{k} Df_j \wedge dx_j$.

Soit $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{k} f_j dx_j$. Par construction $\alpha_1 \circ H = 0$, $\alpha_1(p, y) = 0$ pour tout $y \in B$ et $D(\alpha - \alpha_1) = 0$. Il existe donc une fonction $h : U \times B \to \mathbf{K}$ telle que $Dh = \alpha - \alpha_1$ et que $h(\{p\} \times B) = 0$. En outre $Dh(p, y) = \alpha(p, y) = (Dh_1 \circ \rho)(p, y)$. C.Q.F.D.

Reprenons la démonstration de la proposition 1.A. Comme $D(Dg \circ H) = 0$, en retrécissant A on peut supposer qu'il existe une fonction $\tilde{g} : A \times B \to \mathbf{K}$, nulle sur $\{p\} \times B$, telle que $D\tilde{g} = Dg \circ H$. D'après le lemme 1.A, $D(D\tilde{g} \circ H) = 0$. L'équation $Z\tilde{f} = (a + c)\tilde{f} + \tilde{g}$ possède une solution qui satisfait (II) et (III) et telle que $D\tilde{f}(KerH) = 0$. Pour le voir il suffit de considérer, comme tout à l'heure, le quotient A' de A par le feuilletage $KerH$ et les projections H', Z' et $\tilde{g}'$, d'appliquer l'hypothèse de récurrence à l'équation $Z'\tilde{f}' = (a + c)\tilde{f}' + \tilde{g}'$ et de faire $\tilde{f} = \varphi \circ \tilde{f}'$.

La fonction $\tilde{f}$ est définie sur un voisinage ouvert de $\{p\} \times K$ qu'on appelera encore $A \times B$. Soit h une fonction construite en appliquant à $\tilde{f}$ le lemme 2.A et soit $g_0 = g + ah - Zh$. Alors $g_0(\{p\} \times B) = 0$ et $Dg_0 \circ H = 0$.

L'équation $Zf_0 = af_0 + g_o$ possède une solution qui satisfait (II) et (III). Ceci est une conséquence de l'hypothèse de récurrence, en faisant le quotient de l'ouvert A par le feuilletage ImH, en considérant les projections H', Z' et g_0' et en raisonnant comme plus haut. Pour finir la démonstration de la proposition 1.A il suffit de faire $f = f_0 + h$.

Réferences Bibliographiques

1. Brouzet, R.: Géométrie des systèmes bihamiltoniens en dimension 4. Thèse. Univ. Montpellier (1991)
2. Brouzet, R., Molino, P. et Turiel, F.J.: Géométrie des systèmes bihamiltoniens. Indag. Mathem.... (1993)
3. Debever, R.: Quelques problèmes d'équivalence de formes différentielles alternées. Bull. Acad. Roy. de Belgique, Classe des Sciences **31**, 262-277 (1946)
4. Gantmacher, F.R.: The Theory of Matrices, vol 2. New-York, Chelsea Publ. Co. 1959
5. Gutkin, D.: Variétés bistructurées et opérateurs de récursion. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **43**, 349-357 (1985)
6. Kosmann-Schwarzbach, Y.: Poisson-Drinfeld Groups, in: Topics in soliton theory and exactly solvable non linear equations. Ablowitz, M., Fuchsteiner, B., Kruskal, M., eds, Singapore, World Scientific 1987
7. Kosmann-Schwarzbach, Y. et Magri, F.: Poisson-Nijenhuis structures. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **53**, 35-81 (1990)
8. Libermann, P.: Problèmes d'équivalance et géométrie symplectique. Astérisque **107-108**, 43-68 (1983)
9. Magri, F.: A simple model of the integrable Hamiltonian equations. J. Math. Phys. **19**, 1156-1162 (1978)
10. Magri, F. et Morosi, C.: A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifold. Publication du Département de Mathématiques de l'Université de Milan 1984
11. Olver, P.J.: Canonical forms and integrability of biHamiltonian systems. Phys. Lett. **148A**, 177-187 (1990)

12. Turiel, F.J.: Un théorème de Darboux pour un couple de formes symplectiques, in: Feuilletages riemanniens, quantification géométrique et mécanique. Dazord, P., Desolneux-Moulis, N., Morvan, J.M., éds, Travaux en Cours **26**, Paris, Hermann, 103-121 (1988)
13. Turiel, F.J.: Classification locale d'un couple de formes symplectiques Poisson-compatibles. C.R. Acad. Sci. Paris **308**, série I, 575-578 (1989)
14. Turiel, F.J., Structures bihamiltoniennes sur le fibré cotangent. C.R. Acad. Sci. Paris **315**, série I, 1085-1088 (1992)
15. Vansnick, J.C.: Théorème de réduction simultanée d'une paire de formes différentielles quadratiques réelles. Bull. Acad. Roy. de Belgique, Classe des Sciences **60**, 1038-1045 (1974)
16. Vansnick, J.C.: Structures presque complexes généralisées. Equations à structure presque complexe. Memoires Acad. Roy. de Belgique, Classe des Sciences **42 num. 1**, 1974
17. Weinstein, A.: The local structure of Poisson manifolds. J. of Diff. Geometry **18**, 523-557 (1983)

Sección de Matemáticas
Facultad de Ciencias Ap. 59
28080 MALAGA
ESPAGNE
E-mail: TURIEL@CCUMA.UMA.ES

(Reçu le 28 avril 1993;
la version révisée le 24 septembre 1993)