Werk

Titel: Fonctions entieres prenant des valeurs entieres ainsi que ses derivees sur des su...

Autor: Bezivin, Jean-Paul

Jahr: 1991

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0070|log29

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

manuscripta math. 70, 325 - 338 (1991)

manuscripta mathematica
© Springer-Verlag 1991

FONCTIONS ENTIERES PRENANT DES VALEURS ENTIERES AINSI QUE SES DERIVEES SUR DES SUITES RECURRENTES BINAIRES

Jean-Paul Bézivin

Let $f(z)$ be an entire function of a complex variable, and $u(n) \in \mathbb{Z}$ a binary recurrent sequence. Suppose that s is a positive rational integer and that f, together with its derivatives of order less that s, assumes integer rational values in the sequence $u(n)$. We show in this paper that if f is of slow growth, and under some conditions on the sequence $u(n)$, then f is a polynomial.

I. INTRODUCTION

Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe, et q un nombre entier rationnel plus grand que un. En 1933, Gel'fond démontre ([4]) le résultat suivant :

Théorème G1.- *On suppose que la fonction* f *est telle que :*

a) $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $|f|(r) = \underset{|z| \leq r}{\mathrm{Max}} |f(z)| \leq \exp[c(\log r)^2]$

avec $4c \operatorname{Log}|q| < 1$. *Alors* f *est un polynôme.*

En fait le résultat est un peu plus précis en ce qui concerne la naissance de f, voir en particulier [6] où une étude complète est faite, et Gel'fond montre par un exemple que la valeur $\frac{1}{4 \operatorname{Log}|q|}$ est la meilleure possible.

En 1967, Gel'fond revient sur cette question, en considérant les valeurs prises par la fonction f et ses dérivées aux points q^n, et démontre le résultat suivant ([5]) :

Théorème G2.- *Soit* s *un entier naturel non nul, et* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. *Soit* f *une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que :*

a) $f^{(j)}(q^n) \in \mathbb{Z}$ *pour* $j = 0,1,..,s-1$ *et* $n \in \mathbb{N}$

b) $|f|(r) \leq \exp\left[\dfrac{c(\log r)^2}{\operatorname{Log}|q|}\right]$

avec $4\left(1 + 3\dfrac{s-1}{s\pi^2}\right)c < s$. *Alors* f *est un polynôme.*

A la connaissance de l'auteur, on ne sait pas si la valeur $\dfrac{s}{4\left(1+3\dfrac{s-1}{\pi^2 s}\right)}$ est la meilleure possible ; Gel'fond donne un exemple dans [5] d'une fonction non polynomiale f(z) vérifiant a) et telle que : $|f|(r) \leq \exp\left[c\dfrac{(\operatorname{Log} r)^2}{\operatorname{Log}|q|}\right]$ avec $c = \dfrac{s}{4\left(1-\dfrac{3(s-1)}{s\pi^2}\right)}$.

Dans un article récent [1], nous avons entre autres, généralisé le théorème G1 en considérant, au lieu de la suite q^n, la suite $q^n + q^{-n}$, où q est la solution de module plus grand que un d'une équation $X^2+aX+1 = 0$, où $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 2$.

Dans le présent article, nous allons revenir sur ce résultat, en considérant les valeurs des dérivées de f(z) aux points de la suite $u(n) = q^n + q^{-n}$, q vérifiant X^2+aX+1, $|q| > 1$, $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 2$, et aussi dans le cas de la suite $v(n) = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$. Nous utiliserons la méthode d'interpolation, cf [5].

Pour ce qui concerne une bibliographie plus détaillée concernant les problèmes traités dans cet article, le lecteur intéressé pourra consulter [1] ou [3].

II. ENONCE DES RESULTATS

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème.- *Soit* u(n) *une suite récurrente binaire, de la forme* $u(n) = q^n + q^{-n}$ *ou* $u(n) = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$, q *étant la racine de module plus grand que un d'une équation* $X^2+aX+1 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 2$.

Soit f *une fonction entière d'une variable complexe, et* s *un entier naturel non nul. On suppose que :*

a) $f^{(j)}(u(n)) \in \mathbb{Z}$ *pour* $j = 0,1,\ldots,s-1$, *et* $n \in \mathbb{N}$.

b) $|f|(r) \leq \exp\left[c\dfrac{(\operatorname{Log} r)^2}{\operatorname{Log}|q|}\right]$ *avec* $c < \dfrac{s}{4\left(1+\dfrac{6(s-1)}{\pi^2 s}\right)} = c_0$ *dans le cas de la suite* q^n+q^{-n}, $c < \dfrac{s}{4\left(1+\dfrac{24(2s-1)}{\pi^2 s}\right)} = c_1$ *dans le cas de la suite* $u(n) = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$. *Alors* f *est un polynôme.*

Nous ne savons pas si les constantes c_i sont les meilleures possibles ; de plus, il semble que la méthode de construction d'un exemple de fonction non polynomiale vérifiant a) et b) , avec une constante c relativement petite, qu'utilise Gel'fond dans [5] ne fournisse ici aucun résultat .

Nous avons cependant donné, pour $s = 1$, un exemple dans [1] montrant que la constante $\frac{1}{4}$ était la meilleure possible dans le cas de la suite $u(n) = q^n + q^{-n}$.

III. LEMMES PRELIMINAIRES

Soit s un entier naturel non nul, et u(n) une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe une constante c_1 positive, et un nombre $q_1 > 1$, tel que $|u(n)| \sim c_1 q_1^n$ si n tend vers l'infini.

Pour $k \in \{0,1,\ldots,s-1\}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_{n,k}(z)$ le polynôme

$$P_{n,k}(z) = (z-u(o))^s \ldots (z-u(n-1)^s (z-u(n))^k.$$

Soit f une fonction entière d'une variable complexe. On note $A_{n,k}$ les nombres suivants : $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0,1,\ldots,s-1\}$:

$$A_{n,k} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{P_{n,k}(z)(z-u(n))} dz \qquad (1)$$

où l'intégrale est prise sur un cercle de rayon R supérieur à tous les $|u(k)|$, $k = 0,1,\ldots,n$. On a alors le résultat suivant :

Lemme1.- *On suppose que la fonction* f(z) *vérifie l'inégalité* $|f|(r) \leq \exp\left[c \frac{(\log r)^2}{\operatorname{Log} q_1}\right]$ *avec* $c < \frac{s}{2}$ *pour* r *assez grand. Alors la série de fonctions* $A_{n,k} P_{n,k}(z)$ *est normalement convergente sur tout compact de* $\mathbb{C}$, *et sa somme est égale à la fonction* f(z).

Démonstration.- Ce lemme n'est autre qu'un cas particulier du Hilfssatz 1, page 119 de [2].

Lemme 2.- *Soit* f *une fonction analytique entière, on suppose que* f *vérifie l'inégalité* $|f|(r) \leq \exp\left[c \frac{(\log r)^2}{\operatorname{Log} q_1}\right]$ *pour* r *assez grand. Soit* θ *un réel* > 1. *On a alors la majoration* : $|A_{r,k}| \leq \exp[(c\,\theta^2 - s\theta)n^2 \operatorname{Log} q_1 + o(n^2)]$.

Démonstration.- Nous utilisons la formule (1), en prenant $R = c_1 q_1^{n\theta}$, qui convient pour n assez grand. On a :

$$|f(z)| \leq \exp\left[c \frac{(n\theta \operatorname{Log} q_1 + \operatorname{Log} c_1)^2}{\operatorname{Log} q_1}\right] = \exp\left[c\, n^2 \theta^2 \operatorname{Log} q_1 + o(n^2)\right].$$

D'autre part : $|z-u(j)| \geq R - |u(j)| = c_1 q_1^{n\theta} - |u(j)| = c_1 q_1^{n\theta} [1 - c_1^{-1} q_1^{-n\theta} |u(j)|]$. Il existe $c_3>0$ tel que $|u(j)| \geq c_3 q_1^j$ pour j assez grand. Comme $\theta > 1$, on en conclut que pour n assez grand, on aura $(1 - c_1^{-1} q_1^{-n\theta} |u(j)|)$ plus grand que $1 - \frac{1}{q_1^{n-j}}$ $0 \leq j \leq n-1$.

Par suite :

$$|P_{n,k}(z)| \; |z-u(n)| \geq c_1^n q_1^{n^2\theta s} \delta^s \qquad (2)$$

où $\delta = \prod_0^\infty (1 - \frac{1}{q_1} k)$.

Donc :

$$|A_{n,h}| \leq c_1^{-n} q_1^{-n^2\theta s} \delta^{-s} c_1 q_1^{n\theta} \exp [c\, n^2 \theta^2 \operatorname{Log} q_1 + o(n^2)].$$

Soit

$$|A_{n,h}| \leq \exp [(c\theta^2 - s\theta)\, n^2 \operatorname{Log} q_1 + o(n^2)]$$

ce qui démontre le lemme.

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME DANS LE CAS $u(n) = q^n + q^{-n}$

Nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

IV.1.

Lemme 3.- *Soient* m *un entier naturel tel que* $0 \leq m \leq s-1$, n *un entier naturel non nul*, i *un entier fixé, appartenant à* $\{1,2,\ldots,n\}$, *et, pour* j *appartenant à* $\{1,\ldots,n\}$, $j \neq i$, k_j *des entiers tels que* $k_1 + \ldots + k_n = m$. *On pose, avec* $\underline{k} = (k_1,\ldots,k_n)$

$$F(i, n, \underline{k}, x) = \prod (x^i + x^{-i} - x^h - x^{-h})^{s+k_h}$$

Le produit étant effectué sur les indices h, *différents de* i, *et appartenant à* $\{1,2,\ldots,n\}$. *D'autre part, soit* $\psi_n(x)$ *le polynôme*

$$\psi_n(x) = \prod_{d=1}^{2n} \phi_d(x)^{\theta(d,n)}$$

où ϕ_d *est le d-ième polynôme cyclotomique, et*

$$\theta(d,n) = s\left[\frac{2n}{d}\right] + s - 1.$$

On a alors :

$$\psi_n(x) \;/\; F(i, n, \underline{k}, x) \in \mathbb{Z}\,[x, \tfrac{1}{x}].$$

Démonstration.- On peut raisonner aux unités de $\mathbb{Z}\,[x, \frac{1}{x}]$ près, qui sont les $\pm x^h$, $h \in \mathbb{Z}$. On voit donc que l'on peut remplacer $F(i,n,\underline{k},x)$ par le produit des $(x^{|h-i|} - 1)^{s+k_h} (x^{h+i} - 1)^{s+k_h}$ sur le même ensemble d'indice, produit que nous notons $H(x)$. Le polynôme $H(x)$ est un produit des polynômes cyclotomiques ϕ_d, $1 \leq d \leq 2n$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que l'exposant de ϕ_d dans $H(x)$ est inférieur ou égal à $\theta(d,n)$.
Soit η cet exposant. On a :

$$\eta = \Sigma_1 (s+k_h) + \Sigma_2 (s+k_h)$$

où la première somme est étendue aux indices h, tels que d divise h-i, et $h \neq i$; soit E_1 ce premier ensemble d'indices ; la seconde somme est étendue aux indices h, tels que d divise h+i, $h \neq i$; soit E_2 ce deuxième ensemble d'indices.
Nous notons $\varepsilon_d(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par $\varepsilon_d(x) = 0$ si d ne divise pas x, et 1 si d divise x.
On calcule facilement le cardinal de E_1 ; on a :

$$\text{card } E_1 = \left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right] \quad \text{où } [x] \text{ désigne la partie entière du réel } x.$$

On a de même :

$$\text{card } E_2 = \left[\frac{n+i}{d}\right] - \left[\frac{i+1}{d}\right] + \varepsilon_d(1+i) - \varepsilon_d(2i).$$

(Le terme $\varepsilon_d(2i)$ provient de la condition $h \neq i$).

On a donc :

$$\eta = s\left\{\left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right] + \left[\frac{n+i}{d}\right] - \left[\frac{1+i}{d}\right] + \varepsilon_d(1+i) - \varepsilon_d(2i)\right\} + \lambda$$

où $\lambda = \Sigma_1 k_h + \Sigma_2 k_h$.

On a :

$$\left[\frac{n-i}{d}\right] \leq \frac{n-i}{d}, \quad \left[\frac{n+i}{d}\right] \leq \frac{n+i}{d}, \quad \text{donc } \left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{n+i}{d}\right] \leq \frac{2n}{d}$$

et par suite :

$$\left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{n+i}{d}\right] \leq \left[\frac{2n}{d}\right].$$

D'autre part, si $k = \left[\frac{i-1}{d}\right]$, on a $i = kd+r+1$, avec $r \in \{0,1,\ldots,d-1\}$, donc $\left[\frac{i+1}{d}\right] = k + \left[\frac{r+2}{d}\right]$ et :

$$\left[\frac{i-1}{d}\right] - \left[\frac{i+1}{d}\right] + \varepsilon_d(1+i) = -\left[\frac{r+2}{d}\right] + \varepsilon_d(1+i).$$

Si $\varepsilon_d(1+i) = 0$, cette quantité est négative ou nulle.

Si $\varepsilon_d(1+i) \neq 0$, alors d divise 1+i, donc 1+r, et par suite $\left[\frac{1+r}{d}\right] \geq 1$. La quantité est donc encore négative ou nulle.

On a donc :

$$\eta \leq s\left[\frac{2n}{d}\right] - s\varepsilon_d(2i) + \lambda.$$

Nous considérons maintenant l'expression λ.

Si $\varepsilon_d(2i) = 0$, c'est-à-dire si d ne divise pas $2i$, on voit que les deux ensembles d'indices E_1 et E_2 sont disjoints.

On peut donc alors majorer λ par la somme de tous les k_h, donc par $s-1$.

Ceci fournit dans ce cas la majoration du lemme.

Si $\varepsilon_d(2i) = 1$, donc si d divise $2i$, on majore λ par 2 fois la somme des k_h, donc par $2(s-1)$. On a alors $\eta \leq s\left[\frac{2n}{d}\right] - s + 2(s-1) = s\left[\frac{2n}{d}\right] + s - 2 \leq s\left[\frac{2n}{d}\right] + s-1$, et ceci termine la démonstration du lemme 3.

Lemme 4.- *Soit* f *une fonction analytique entière,* n *un entier naturel non nul, et* $k \in \{0,1,\ldots,s-1\}$. *Soit :*

$$F(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=0}^{n-1} (z-x^j-x^{-j})^s (z-x^n-x^{-n})^{k+1}}.$$

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. *On pose* $R_i(x)$ *égal au résidu de la fonction* $F(z)$ *au point* x^i+x^{-i}.
Il existe alors des $S_{i,\ell}$ $\ell = 0,1,\ldots,s-1$, *dans* $\mathbb{Q}(x)$ *tels que :*

$$(s-1)!\ R_i(x) = \sum_{\ell=0}^{s-1} S_{i,\ell}(x)\, f^{(\ell)}(x^i+x^{-i})$$

avec $\psi_n(x)\, S_{i,\ell}(x) \in \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{x}\right]$ *pour tout* ℓ.

Démonstration.- Nous considérons d'abord le cas $i \neq n$. On a alors :

$$(s-1)!\ R_i(x) = \left(\frac{d}{dz}\right)^{s-1}\left[(z-x^i-x^{-i})^s F(z)\right] \quad \text{pour } z = x^i+x^{-i}.$$

Donc, on a, en prenant l'égalité qui suit au point $z = x^i + x^{-i}$:

$$(s-1)!\ R_i(x) = \sum_{\ell=0}^{s-1} \binom{s-1}{\ell} \left(\frac{d}{dz}\right)^{(s-1-\ell)} \left(\prod_{j\neq i} (z-x^j-x^{-j})^{-s} (z-x^n-x^{-n})^{-k-1}\right) f^{(\ell)}(x^i+x^{-i}).$$

Donc $S_{i,\ell}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de termes de la forme :

$$\prod_{h\neq i} (x^i+x^{-i}-x^h-x^{-h})^{-s-k_h} (x^i+x^{-i}-x^n-x^{-n})^{-k-1-k_n}$$

avec $k_h \in \mathbb{N}$, de somme inférieure ou égale à $s-1$. Comme au pire la quantité $k+1$ est égale à s, le lemme 3 s'applique et donne le résultat.

Pour $i = n$, on a une démonstration analogue, avec :

$$(k-1)!\ R_n(x) = \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left((z-x^n-x^{-n})^k F(z)\right).$$

Lemme 5.- *Soit* n *un entier positif, et* $\alpha(n)$ *la quantité* $\alpha(n) = \frac{1}{2}\sum_{d=3}^{2n}\left(s\left[\frac{2n}{d}\right] + s-1\right)\varphi(d)$, *où* φ *est l'indicateur d'Euler, avec* $\alpha(1) = 0$.

Alors $H_n(x) = x^{-\alpha(n)}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2ns+s-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ns+s-1}\psi_n(x)$ *est un élément de* $\mathbb{Z}\left[x+\frac{1}{x}\right]$.

Démonstration.- Pour $n = 1$, l'assertion est évidente. Nous supposons donc $n \geq 2$. Pour $d \geq 3$, le polynôme cyclotomique ϕ_d est réciproque de degré pair. Par suite, on peut écrire :

$$\phi_d(x) = x^{\frac{\varphi(d)}{2}} S_d(x + \tfrac{1}{x}) \text{ , avec } S_d(u) \in \mathbb{Z}[u].$$

On a donc :

$$H_n(x) = (1 - \tfrac{1}{x})^{2ns+s-1} (1 + \tfrac{1}{x})^{ns+s-1} (x-1)^{2ns+s-1} (x+1)^{ns+s-1} \prod_{d=3}^{2n} S_d(x + \tfrac{1}{x})^{\theta(d,n)}.$$

Mais $\quad (1 - \frac{1}{x})(x-1) = x + \frac{1}{x} - 2$

$\quad (1 + \frac{1}{x})(x+1) = x + \frac{1}{x} + 2,$

et par suite $H_n(x) \in \mathbb{Z}[x + \frac{1}{x}]$.

Lemme 6.- *Avec les notations du lemme 5, on a, pour la solution* q *de l'équation* $X^2+aX+1 = 0$, $(a \in \mathbb{Z},\ |a| > 2)$ *de module plus grand que un, la majoration :*

$$|H_n(q)| \leq \exp\left[(s + \frac{6}{\pi^2}(s-1))\, n^2 \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right].$$

Démonstration.- Le terme prépondérant dans $H_n(q)$ est le terme $q^{-\alpha(n)} \psi_n(q)$. Soit $d \geq 1$; si μ est la fonction de Moebius, on a :

$$\phi_d(x) = \prod_{k|d} (x^k - 1)^{\mu\left(\frac{d}{x}\right)} = x^{\varphi(d)} \prod_{k|d} (1 - x^{-k})^{\mu\left(\frac{d}{x}\right)} = x^{\varphi(d)} G_d(x)$$

$$|G_d(q)| \leq \prod_{k|d} (1 + \mu(\tfrac{d}{k})\, |q|^{-k})^{\mu\left(\frac{d}{k}\right)} \leq \frac{\prod_{k\geq 1} (1 + |q|^{-k})}{\prod_{k\geq 1} (1 - |q|^{-k})} = c_2.$$

Par suite :

$$|\phi_d(q)| \leq |q|^{\varphi(d)}\, c_2 .$$

Donc :

$$|H_n(q)| \leq c_2^{2n(s-1) + \sum_{d=1}^{n} s\left[\frac{2n}{d}\right]} |q|^{-\alpha(n) + \sum \theta(n,d)\varphi(d)} = c_2^{O(n \operatorname{Log} n)} |q|^{\alpha(n)} = \exp\left[\alpha(n) \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right].$$

On a :

$$\alpha(n) = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{2n} \left(s\left[\frac{2n}{d}\right] + s - 1\right) \varphi(d) + o(n)$$

et d'autre part :

$$\sum_{d=1}^{2n} \left[\frac{2n}{d}\right] \varphi(d) = \frac{1}{2} 2n(2n+1) = 2n^2 + n$$

et

$$\sum_{d=1}^{2n} \varphi(d) = \frac{12\, n^2}{\pi^2} + o(n^2) \quad \text{(cf [5])}.$$

Finalement :

$$|H_n(q)| \leq \exp\left[\left(sn^2 + \frac{6(s-1)\, n^2}{\pi^2}\right) \operatorname{Log}|q| + o(n^2)\right]$$

ce qui démontre le lemme 6.

IV - 2 PREUVE DU THEOREME QUAND $u(n) = q^n + q^{-n}$

Nous considérons les quantités $H_n(q)\, A_{n,k}$ $0 \leq k \leq s-1$, n assez grand, avec les notations de la partie IV.1.

D'après le lemme 5, le polynôme $H_n(x)$ appartient à $\mathbb{Z}[x+x^{-1}]$. Par suite, $H_n(q)$ est un élément de $\mathbb{Z}$, puisque $q+q^{-1} \in \mathbb{Z}$. D'autre part $(s-1)!$, $A_{n,k}$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels en les dérivées de f en les points $u(k)$, qui sont des éléments de $\mathbb{Z}$ par l'hypothèse a) du théorème.

On a d'ailleurs, avec les notations du lemme 4 :

$$(s-1)!\quad A_{n,k} = \sum_i \sum_\ell S_{i,\ell}(q)\, f^{(\ell)}(u(i))$$

et les $S_{i,\ell}(q)$ sont des expressions rationnelles en les $u(h)$, donc des nombres rationnels. Il en résulte que $H_n(q)\, S_{i,\ell}(q) \in \mathbb{Q}$ pour tout n, i, ℓ.

D'autre part par le lemme 4

$$\psi_n(x)\, S_{i,\ell}(x) \in \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{x}\right].$$

Il en est donc de même de :

$$H_n(x)\; S_{i,\ell}(x)$$

et par suite $H_n(q)\, S_{i,\ell}(q) \in \mathbb{Z}[q]$, et est donc un entier algébrique.

Par suite $H_n(q)\, S_{i,\ell}(q) \in \mathbb{Z}$. Comme par hypothèse les $f^{(\ell)}(u(i))$ sont dans $\mathbb{Z}$, il en résulte que $(s-1)!\; H_n(q)\, A_{n,k} \in \mathbb{Z}$.

Nous majorons maintenant ces quantités.

Par le lemme 2, on a, où $\theta > 1$ est fixé :

$$|A_{n,k}| \leq \exp\left[(c\,\theta^2 - s\theta)\, n^2 \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right]$$

puisque $|u(n)| \sim |q|^n$ si $n \longrightarrow +\infty$,

et par le lemme 6,

$$|H_n(q)| \leq \exp\left[\left(s + \frac{6(s-1)}{\pi^2}\right) n^2 \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right].$$

On cherche le minimum de la quantité $c\theta^2 - s\theta$, qui est atteint pour $\theta = \frac{s}{2c}$, quantité qui est bien supérieure à 1 d'après les hypothèses du théorème, et on en déduit que :

$$(s-1)!\quad |H_n(q)|\; |A_{n,k}| \leq \exp\left[\left(-\frac{s^2}{4c} + s + 6\,\frac{(s-1)}{\pi^2}\right) n^2 + o(n^2)\right].$$

Sous les hypothèses du théorème, la quantité $-\frac{s^2}{4c} + s + 6\,\frac{s-1}{\pi^2}$ est négative.

Par suite pour n assez grand, $H_n(q)\, A_{n,k} = 0$, et donc $A_{n,k} = 0$.

Mais nous sommes dans les conditions d'application du lemme 1, et par suite $f(z)$ est un polynôme, ce qui termine la démonstration.

V. DEMONSTRATION DU THEOREME DANS LE CAS $u(n) = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$.

Nous allons suivre le même schéma de démonstration que dans la partie IV.

Lemme 7.- *Soient* m *un entier naturel, tel que* $0 \le m \le s-1$, n *un entier naturel non nul,* i *un entier fixé appartenant à* $\{1,2,\ldots,n\}$, *et, pour* j *appartenant à* $\{1,2,\ldots,n\}$, $j \neq i$, k_j *des entiers tels que* $k_1+\ldots+k_n = m$. *On pose* $\underline{k} = (k_1,\ldots,k_n)$ *et :*

$$U(i, n, \underline{k}, x) = \prod \left(\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}} - \frac{x^h - x^{-h}}{x - x^{-1}} \right)^{s+k_h}$$

le produit étant effectué sur les indices h, *différents de* i, *et appartenant à* $\{1,2,\ldots,n\}$.
D'autre part, soit $\psi_n^*(x)$ *le polynôme* $\prod_{d=1}^{4n-2} \phi_d(x)^{\lambda(d,n)}$ *avec* $\lambda(d,n) = s\left[\frac{2n}{d}\right] + 2s-1$.
Alors $\psi_n^*(x) / U(i, n, \underline{h}, x) \in \mathbb{Z}[x, \frac{1}{x}]$.

Démonstration.- On a $x^i - x^{-i} - x^h + x^{-h} = x^i - x^h + \dfrac{x^i - x^h}{x^{i+h}}$; donc $(x^{|i-h|} -1)(x^{i+h} +1)$ est égal à $x^i-x^{-i}-x^h+x^{-h}$ à une unité de $z[x, \frac{1}{x}]$ près.
Il suffit donc de démontrer l'assertion pour le produit des $(x^{|i-h|} -1)^{s+k_h} (x^{i+h} +1)^{s+k_h}$; produit que nous notons $V(i, n, \underline{k}, x) = V(x)$.
Nous cherchons l'exposant de $\phi_d(x)$ dans $V(x)$, pour d dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,4n-2\}$.
En effet, ϕ_d divise x^h+1 équivaut à dire ϕ_d divise $x^{2h}-1$ et ne divise pas x^h-1, ie d divise $2h$ et ne divise pas h.

Cet exposant est égal à :

$$\Sigma_1 (s+k_h) + \Sigma_2 (s+k_h) = \beta(n, d, \underline{k}, i) = \beta,$$

la première sommation ayant lieu sur les indices h, appartenant à $\{1, 2,\ldots,n\}$, différents de i et tels que d divise $h-i$, ensemble que nous notons F_1 et la seconde sur les indices h, appartenant à $\{1, 2,\ldots,n\}$, différents de i, et tels que d divise $2(h+i)$, et ne divise pas $h+i$.
Nous cherchons tout d'abord les cardinaux de F_1 et F_2. On a :

$$\mathrm{Card}(F_1) = \left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right].$$

Pour le cardinal de F_2, la formule est un peu plus compliquée ; on trouve :

$$\mathrm{Card}(F_2) = \left[\frac{n+i}{d} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2}\right] + \varepsilon_{2d}(2i+2-d) - \eta(i),$$

où $\eta(x)$, pour $x \in \mathbb{N}$, est égal à 1 si d divise $4x$ et ne divise pas $2x$, et à zéro sinon. (le terme $\eta(i)$ provient du cas $h = i$).

Il en résulte :

$$\beta = s\left\{\left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right] + \left[\frac{n+i}{d} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2}\right] + \varepsilon_{2d}\,(2i+2-d) - \eta(i)\right\} + \mu$$

avec $\mu = \Sigma_1 k_h + \Sigma_2 k_h$.

Les deux ensembles d'indices F_1 et F_2 ne peuvent avoir d'éléments en commun que si d divise 4i et ne divise pas 2i.
On peut donc majorer λ par s-1 si $\eta(i) = 0$, et deux fois cette quantité si $\eta(i) = 1$.
Au total on a :

$$\beta \le s\left\{\left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right] + \left[\frac{n+i}{d} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2}\right] + \varepsilon_{2d}\,(2i+2-d) - \eta(i)\right\} s + (1+\eta(i))(s-1)$$

soit :

$$\beta \le s\left\{\left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right] + \left[\frac{n+i}{d} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2}\right] + \varepsilon_{2d}\,(2i+2-d).\right\} + s-1$$

D'autre part :

$$\left[\frac{n-i}{d}\right] + \left[\frac{i-1}{d}\right] \le \left[\frac{n-1}{d}\right]$$

Posons :

$$\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2} = k_1 + \xi_1 \quad k_1 \in \mathbb{N} \quad 0 \le \xi_1 < 1, \quad \text{si } \frac{v+1}{d} - \frac{1}{2} \ge 0$$

et :

$$\frac{n-1}{d} = k_2 + \xi_2 \quad k_2 \in \mathbb{N} \quad 0 \le \xi_2 < 1.$$

Alors :

$$\beta \le s\,\{2k_2 + [\xi_1 + \xi_2] + \varepsilon_{2d}\,(2i+2-d)\} + s-1.$$

Si $\xi_1 = 0$, on a $\varepsilon_{2d}\,(2i+2-d) = 1$, et :

$$\beta \le s(2k_2+1)+s-1 = s\left(2\,[\tfrac{n-1}{d}] + 1\right) + s-1.$$

Si $\xi_1 > 0$, on a $\varepsilon_{2d}\,(2i+2-d) = 0$, et $[\xi_1+\xi_2] \le 1$, donc

$$\beta \le s(2k_2+1)+s-1 = s\left(2\,[\tfrac{n-1}{d}] + 1\right) + s-1.$$

Enfin, si $\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2} < 0$, on a $\left[\frac{i+1}{d} - \frac{1}{2}\right] = -1$, $\varepsilon_{2d}\,(2i+2-d) = 0$, donc

$$\beta \le s(2k_2+1)+s-1 = s\left(2\,[\tfrac{n-1}{d}] + 1\right) + s-1.$$

On a $2\left[\frac{n-1}{d}\right] \le \frac{2n}{d}$, d'où l'assertion du lemme.

Lemme 8.- *Soit* f *une fonction analytique entière,* n *un entier naturel non nul, et* $k \in \{0,1,\ldots,s-1\}$. *Soit :*

$$F^*(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=0}^{n-1} \left(z - \left(\frac{x^j - x^{-j}}{x - x^{-1}}\right)^s\right) \cdot \left(z - \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}}\right)^{k+1}}$$

Soit $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. *On note* $R_i^*(x)$ *le résidu de la fonction* f *au point* $\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}}$.
Il existe alors des $S_{i,\ell}^*(x)$, $\ell = 0,1,\ldots,s-1$ *dans* $\mathbb{Q}(x)$, *tels que* :

$$(s-1)!\ R_i^*(x) = \sum_{\ell=0}^{s-1} S_{i,\ell}^*(x)\ f^{(\ell)}\left(\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}}\right)$$

avec $\psi_n^*(x)\, S_{i,\ell}^*(x) \in \mathbb{Z}\,[x, \frac{1}{x}]$ *pour tout* ℓ, i, n.

Démonstration.- Nous considérons d'abord le cas $i \neq n$. La démonstration suit exactement celle du lemme 6 : on montre que les $S_{i,\ell}^*$ sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de termes de la forme :

$$\prod_{h \neq i} \left(\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}} - \frac{x^h - x^{-h}}{x - x^{-1}}\right)^{-(s+k_h)} \left(\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}} - \frac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}}\right)^{-(k+1+k_n)}$$

avec les k_h dans $\mathbb{N}$, de somme inférieure ou égale à $s-1$.

La quantité $k+1$ est inférieure ou égale à s, le lemme 7 s'applique donc et donne le résultat annoncé.
On a une démonstration analogue pour $i = n$.

Lemme 9.- *Soit* n *un entier positif, et* $\beta(n)$ *la quantité définie par* $\beta(1) = 0$, *et, pour* $n \geq 2$

$$\beta(n) = \frac{1}{2} \sum_{d=3}^{4n-2} \left(s\left[\frac{2n}{d}\right] + 2s - 1\right) \varphi(d).$$

Soit :

$$H_n^*(x) = (x - x^{-1})^{ns}\ (1 + \tfrac{1}{x})^{2ns+2s-1}\ (1 - \tfrac{1}{x})^{ns+2s-1}\ x^{-\beta(n)}\, \psi_n^*(x).$$

Alors $H_n^*(x)$ *est dans l'anneau engendré sur* $\mathbb{Z}$ *par les* $\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}}$ $i \geq 1$.

Démonstration.- Soit tout d'abord un entier d, $d \geq 3$, et considérons le polynôme cyclotomique $\phi_d(x)$. Il est réciproque de degré pair ; on peut alors écrire $(x - x^{-1})\, x^{-\frac{\varphi(d)}{2}}\, \phi_d(x)$ comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des $x^i - x^{-i}$, et par suite :

$$\prod_{d \geq 3} \left(x^{-\frac{\varphi(d)}{2}}\, \phi_d(x)\right)^{\lambda(d,n)}$$

est dans l'anneau engendré sur $\mathbb{Z}$ par les $\frac{x^i - x^{-i}}{x - x^{-1}}$.

Pour $d = 1$, $(1 + \frac{1}{x})(x-1) = x - x^{-1}$
et $d = 2$, $(1 - \frac{1}{x})(x+1) = x - x^{-1}$.

D'autre part :

$$(x - x^{-1})^2 = \left(\frac{x^2 - x^{-2}}{x - x^{-1}}\right)^2 - 4 \ ;$$

on en déduit l'assertion du lemme.

Lemme 10.- *Avec les notations du lemme 9, on a pour la solution* q *de module plus grand que un de l'équation* $X^2 + aX + 1 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$ $|a| > 2$, *la majoration :*

$$|H_n^*(q)| \leq \exp\left[\left(s + (2s-1)\frac{24}{\pi^2}\right) n^2 \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right] .$$

Démonstration.- On a déjà vu qu'il existait une constante $c_2 > 0$, telle que :

$$|\Phi_d(q)| \leq c_2 \, |q|^{\varphi(d)} .$$

Par suite :

$$|H_n^*(q)| \leq (|q|+1)^{ns} \left(1 + \frac{1}{|q|}\right)^{3ns+4s-2} . \, |q|^{-\beta(n)} \, |\psi_n^*(q)| \leq \exp\left[\beta(n) \log |q| + o(n \log n)\right]$$

$$\beta(n) = \frac{s}{2} \sum_{d=1}^{4n-2} \left[\frac{2n}{d}\right] \varphi(d) + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{4n-2} (2s-1)\varphi(d) + o(n)$$

donc, en tenant compte de $\left[\frac{2n}{d}\right] = 0$ si $d > 2n$

$$\beta(n) = sn^2 + (2s-1)\frac{24\, n^2}{\pi^2} + o(n^2)$$

et par suite :

$$|H_n^*(q)| \leq \exp\left[\left(s + (2s-1)\frac{24}{\pi^2}\right) n^2 \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right] .$$

V.2.- PREUVE DU THEOREME DANS LE CAS DE $u(n) = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$

Nous considérons les quantités $H_n^*(q)\, A_{n,k}^*$, pour n assez grand, où $A_{n,k}^*$ est l'expression (1) quand $u(n) = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$.

Tout comme dans la preuve du théorème quand $u(n) = q^n + q^{-n}$, on a que $H_n^*(q)\, A_{n,k}^* \in \mathbb{Q}$, puisque $A_{n,k}^* \in \mathbb{Q}$, et, grâce au lemme 9 et au fait que $u(n) \in \mathbb{Z}$ $\forall n$, il en est aussi ainsi de $H_n^*(q)$.

D'autre part, $(s-1)!\ H_n^*(q)\ A_{n,h}^*$ appartient à l'anneau $\mathbb{Z}[q]$, et par suite c'est un entier algébrique ; c'est donc un élément de $\mathbb{Z}$.

Nous majorons maintenant ces quantités.

Par le lemme 2, on a :

$$|A_{n,h}^*| \leq \exp\left[(c\theta^2 - s\theta)\, n^2 \operatorname{Log} |q| + o(n^2)\right]$$

On choisit $\theta = \frac{s}{2c}$ qui fournit la majoration

$$|A^*_{n,h}| \leq \exp\left[-\frac{s^2}{4c}\, n^2 \operatorname{Log}|q| + o(n^2)\right]$$

Le lemme 10 fournit la majoration

$$|H^*_n(q)| \leq \exp\left[\left(s + (2s-1)\frac{24}{\pi^2}\right) n^2 \operatorname{Log}|q| + o(n^2)\right]$$

donc :

$$(s-1)!\quad |A^*_{n,h}|\ |H^*_{n,h}| \leq \exp\left[\left(-\frac{s^2}{4c} + s + (2s-1)\frac{24}{\pi^2}\right) n^2 \operatorname{Log}|q| + o(n^2)\right]$$

Sous les hypothèses du théorème, la quantité :

$$-\frac{s^2}{4c} + s + (2s-1)\frac{24}{\pi^2}$$

est négative ; par suite $(s-1)!\ H^*_n(q)\ A^*_{n,k}$ tend vers zéro si n tend vers $+\infty$, et par suite $A^*_{n,h} = 0$ si n est assez grand.

Nous appliquons alors le lemme 1, et par suite $f(z)$ est un polynôme, ce qui termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **BEZIVIN, J.P.**- Sur les points où une fonction analytique prend des valeurs entières. Ann. Inst. Fourier (à paraître)

[2] **BUNDSCHUH, P.**- Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen Mehrerer Variablen. J. für die reine angew Math. **313**, 116-132, (1980)

[3] **GRAMAIN, F, SCHNITZER, F.J.** Ganze ganzwertige Funktionen : Historiche Bemerkungen. Complex Methods on partial differential equations. 151-177, Math Res **53**, Akademic Verlag, Berlin 1989

[4] **GEL'FOND, A.O.**- Sur les fonctions entières qui prennent des valeurs entières aux points β^n (En russe). Mat Sb **40**, 42-47, (1933)

[5] **GEL'FOND, A.O.**- Functions which takes on integral values. Math. Notes **1**, 337-340, (1967)

[6] **WALLISSER, R.**- On entire functions assuming integer values in a geometric sequence. Théorie des Nombres, C.R. Conférence International. Université Laval 1987. (J.M. de Konnink et C. Levesque Ed) de Gruyter, 981-989, (1989)

Jean-Paul Bézivin
Université de Caen - Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX FRANCE

(Reçu le 5 décembre 1990)