manuscripta math. 69, 387 - 410 (1990)

manuscripta mathematica

Les extensions quadratiques du corps des rationnels, ou du corps de Gauss, ou du corps des racines cubiques de l'unité de calibres 1

Stéphane LOUBOUTIN

Résumé: Nous transposons certains des résultats sur le problème du nombre de classes 1 établis dans le cas des extensions quadratiques réelles de $\mathbb{Q}$ au cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$: nous caractérisons (en terme de contrainte sur leurs discriminants relatifs) les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$ dont la classe principale est de calibre 1, puis déterminons, sous l'assomption d'une forme convenable de l'hypothèse de Riemann, ces extensions quadratiques de calibre 1, i.e. ces extensions à classe principale de calibre 1 qui sont principales. Le cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$ est particulièrement satisfaisant: après avoir amendé dans ce cadre les valeurs des bornes de Minkowski jusqu'à ce jour connues, nous disposerons d'une caractérisation de principalité des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$ qui se spécialisera en une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle extension soit de calibre 1.

La motivation de cette détermination repose sur le résultat de R Paysant-Le Roux suivant lequel il n'existe qu'un nombre fini de corps de nombres de degré et de calibre donnés. Notons que nos résultats s'étendent sans difficulté au cas des extensions quadratiques d'un des neuf corps quadratiques imaginaires principaux, et ce d'autant plus aisément que les deux cas que nous traitons ici sont ceux qui sont source du plus de difficulté du fait qu'ils correspondent aux corps quadratiques imaginaires pour lesquels le groupe des racines de l'unité n'est pas réduit à $\{-1,+1\}$.

Subject Classification: 11 R Algebraic number theory: global fields

Plan:

§1. Introduction: Nous exposons aux théorèmes A et B les caractérisations de principalité connues dans le cas des corps quadratiques imaginaires et de certains corps quadratiques réels. Nous subsumons ces deux résultats sous la notion de corps quadratique de calibre 1.

§2. Caractérisation des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ dont la classe principale est de calibre 1: Nous rappelons la notion d'idéal réduit introduite dans le cadre des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ par H. Amara, ce qui nous donne une notion de calibre pour ces corps biquadratiques étendant celle du paragraphe précédent. Nous caractérisons au théorème 3 ces extensions pour lesquelles la classe principale est de calibre 1 en obtenant un strict analogue du résultat connu pour le cas des extensions quadratiques réelles de $\mathbb{Q}$ de classe principale de calibre 1. Les résultats de ce papier s'étendent sans difficulté au cas des extensions quadratiques d'un des neuf corps quadratiques imaginaires principaux.

§3. Condition nécessaire pour qu'une extension quadratique de $\mathbb{Q}(i)$ soit de calibre 1; §4. Minorations de nombres de classes et détermination des corps des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ de calibre 1: De même que la détermination effective des corps quadratiques réels de calibre 1 ne peut être aujourd'hui faite que sous une forme convenable de l'hypothèse de Riemann généralisée, nous déterminons au théorème 5 avec le même genre d'hypothèse les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ de calibre 1 en bornant leur discriminant. Une condition nécessaire satisfaite par les corps biquadratiques qui sont de calibre 1 (théorème 4) nous permet de les cribler jusqu'à cette borne.

§5. Bornes de Minkowski, cas particulier des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$, et extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$ de calibre 1: Si dans le cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ de classe principale de calibre 1 nous ne sommes parvenus à donner au paragraphe précédent qu'une condition nécessaire de principalité, nous parvenons à en énoncer au théorème 9 une nécessaire et suffisante pour le cas des extensions quadratiques du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(j)$.

§6. Questions ouvertes: Quels sont les corps cubiques cycliques ou cubiques purs de calibre 1 ?

§ 1. Introduction:

a) Les corps quadratiques imaginaires de calibre 1:

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ un corps quadratique imaginaire de discriminant $D < 0$. Nous appelons **réduit** un idéal primitif entier $\mathbf{I}$ tel que $\displaystyle\operatorname*{Min}_{\substack{z\in\mathbf{I}\\ z\neq 0}} |z| \geq N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I})$. Toute classe d'idéaux contient un idéal réduit. En effet, si $\mathbf{I}$ est un idéal primitif entier d'une classe, si $z_0 \in \mathbf{I}$ est tel que $|z_0| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{\substack{z\in\mathbf{I}\\ z\neq 0}} |z|$ et si $\mathbf{J}$ est défini par $(z_0) = \mathbf{IJ}$, alors l'idéal $\mathbf{J}'$, conjugué de l'idéal $\mathbf{J}$, est réduit et dans la classe de $\mathbf{I}$. Un idéal entier primitif $\mathbf{I} = (Q, \frac{P+\sqrt{D}}{2})_{\mathbb{Z}}$ de $\mathbf{K}$ (avec P choisi tel que $0 \leq |P| \leq Q$) est réduit si et seulement si $P^2+|D| \geq 4Q^2$. Conséquemment, si $Q \leq \frac{1}{2}\sqrt{|D|}$, $\mathbf{I}$ est réduit, et si $\mathbf{I}$ est réduit, alors $Q \leq \sqrt{|D|/3}$. En particulier, les idéaux réduits sont en nombre fini, noté $m(\mathbf{K})$ et appelé le **calibre** de $\mathbf{K}$.

Théorème A: Soit $D < 0$ le discriminant d'un corps quadratique imaginaire $\mathbf{K}$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes:

a) $m(\mathbf{K}) = 1$, i.e. $\mathbf{K}$ est de calibre 1.

b) $h(\mathbf{K}) = 1$, i.e. $\mathbf{K}$ est principal.

c) $D = -4, -8$, ou $D \equiv 1\ [4]$ est premier et $(\frac{D}{q}) = -1$, $2 \leq q < \frac{|D|+1}{4}$ et q premier.

d) $D = -4, -8$, ou $D \equiv 1\ [4]$ est premier et les $f(k) = k^2 + k + \frac{|D|+1}{4}$ sont premiers pour $0 \leq k \leq \frac{|D|-7}{4}$.

e) $D = -4, -8$, ou $D = -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$.

Preuve: a) $\Rightarrow$ b) résulte de la minoration $m(\mathbf{K}) \geq h(\mathbf{K})$. b) $\Rightarrow$ a): si $\mathbf{I}$ est un idéal réduit de norme Q, étant principal égal à $(\frac{X+Y\sqrt{D}}{2})$, nous avons $Q = \frac{X^2+Y^2|D|}{4}$. Si Y n'est pas nul alors $Q > \sqrt{|D|/3}$. Donc Y est nul et $\mathbf{I} = (\frac{X}{2})$ étant primitif, on a $X = 2$ et $\mathbf{I} = \mathbf{R}_{\mathbf{K}}$. Les autres équivalences sont connues, le c) est prouvé dans [4], le d) est connu sous le nom de théorème de Frobénius-Rabinowitsch (voir [5], [18]). Le e) est dû à H. Stark.

Le cas quadratique imaginaire est aussi simple qu'on puisse l'espérer: chaque classe d'idéaux contient en général un seul idéal réduit. Plus précisément, deux idéaux réduits **I** et **J** sont équivalents dans le groupe des classes si et seulement si **J** = **I**, ou **J** = **I'** (idéal conjugué de **I**) avec I^2 principal (si $I = (Q, \frac{P+\sqrt{D}}{2})_{\mathbb{Z}}$ avec P choisi tel que $|P| \leq Q$, on a alors $|D| + P^2 = 4Q^2$).

b) Les corps quadratiques réels de calibre 1:

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ un corps quadratique réel de discriminant $D > 0$ et τ le $\mathbb{Q}$-isomorphisme non trivial de **K**. Les idéaux primitifs entiers **I** de **K** s'écrivent $I = (Q, \frac{P+\sqrt{D}}{2})_{\mathbb{Z}}$ avec $Q = N_{K/\mathbb{Q}}(I)$ et P seulement défini modulo 2Q. Posons $x_0(I) = \frac{P+\sqrt{D}}{2Q}$ et remarquons qu'il existe un unique P tel que l'on ait $-1/x_0^{\tau}(I) > 1$. Appelons **réduit** un idéal primitif entier **I** tel que:

$$\operatorname*{Min}_{\substack{z \in I \\ z \neq 0}} \left[\operatorname{Max}(|z|, |z^{\tau}|)\right] \geq N_{K/\mathbb{Q}}(I), \text{ c'est à dire tel que:}$$

$$\operatorname*{Min}_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left[\operatorname{Max}(|m+nx_0(I)|, |m+nx_0^{\tau}(I)|)\right] \geq 1.$$

Toute classe d'idéaux contient un idéal réduit et **I** est réduit si et seulement si on peut choisir P modulo 2Q tel que $x_0(I) > 1$ et $-1/x_0^{\tau}(I) > 0$. Les idéaux réduits sont en nombre fini et les idéaux réduits de chaque classe d'idéaux sont ordonnés en cycles d'idéaux réduits à l'aide de la théorie des fractions continues (voir S. Louboutin [13"]). Nous appelons **calibre d'une classe d'idéaux** le nombre d'idéaux réduits de cette classe et **calibre du corps** le nombre total d'idéaux réduits, il est noté m(**K**). Le calibre du corps est donc égal à la somme sur toutes les classes d'idéaux des calibres respectifs de ces classes. En particulier, le corps est de calibre 1 si et seulement si il est de classe principale de calibre 1 et de nombres de classes 1. G. Lachaud a montré que le théorème de Siegel impliquait que Log(m(**K**)) est équivalent à $\operatorname{Log}(\sqrt{D})$, d'où il résulte qu'il n'existe qu'un nombre fini de corps quadratiques réels de calibre donné. Pour rendre cette détermination explicite, et du fait de l'ineffectivité du théorème de Siegel, il faut de plus assumer une forme convenable de l'hypothèse de Riemann généralisée portant sur le signe de la fonction zêta de ces corps. On dispose alors du très satisfaisant résultat suivant:

Théorème B: Soit $D > 0$ le discriminant d'un corps quadratique réel **K**,

a) La classe principale est de calibre 1 si et seulement si $D = m^2+4$, $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour $4/D$, le corps est de calibre 1 si et seulement si $D = 8$.

c) Pour $D \equiv 1$ [4], le corps est de calibre 1 si et seulement si $D = m^2+4$ et $(\frac{D}{q}) = -1$, $2 \leq q < m$.

d) Pour $D \equiv 1$ [4], le corps est de calibre 1 si et seulement si $D = m^2+4$ et les $|k^2+k+\frac{1-d}{4}|$ sont premiers ou égaux à 1 pour $0 \leq k \leq \frac{3m-5}{2}$.

e) Les corps de calibre 1 sont en nombre fini (non effectif).

f) Soit $\zeta_{\mathbf{K}}$ la fonction zêta du corps. Sous l'hypothèse de Riemann généralisée $\zeta_{\mathbf{K}}(\frac{1}{2}) \leq 0$ les corps quadratiques réels de calibre 1 sont les 7 corps de discriminant D = 8, 5, 13, 29, 53, 173 et 293.

g) Il existe au plus un autre corps de calibre 1 que les 7 corps donnnés au point précédent.

Le point 1) se démontre en écrivant que le développement en fractions continues du générateur de l'anneau des entiers est de longueur de période 1.

L'absence d'une description aussi commode des cycles d'idéaux réduits dans le cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$ qui rendra la caractérisation de ces corps à classe principale de calibre 1 beaucoup plus délicate.

Le point 2) est trivial et résulte de ce que pour $D = m^2+4$, $\frac{m+\sqrt{D}}{2}$ étant une unité de norme -1, l'unité fondamentale du corps est de norme -1 et le 2-rang du groupe des classes n'est donc nul que si D possède un seul facteur premier, donc que si $D = 8$.

Le point 7) résulte du théorème de Siegel-Tatuzawa. Pour une preuve complète de ce théorème, voir [10], [13'], [14].

Dans ce papier, nous étendons ces résultats au cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$. Nous nous intéressons en premier lieu au cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$. Nous notons $\delta_{K/\mathbb{Q}(i)}$, ou plus simplement δ, le discriminant relatif de l'extension $K/\mathbb{Q}(i)$ (il n'est déterminé qu'au carré des unités de $\mathbb{Q}(i)$ près, donc qu'au signe près) et remarquons que demander que l'extension biquadratique $K/\mathbb{Q}$ ne soit pas galoisienne c'est demander que δ ne soit ni purement réel, ni purement imaginaire. Nous notons R_K l'anneau des entiers de K, τ le $\mathbb{Q}(i)$-isomorphisme non trivial de K, η_K une unité fondamentale de R_K (le groupe des unités est de rang 1) et $h(K)$ le nombre de classes d'idéaux de K. Nous posons $D = |\delta|^2$; donc $D \in \mathbb{N}^*$ et le discriminant absolu $D_{K/\mathbb{Q}}$ vaut $16D$. Nous remarquons finalement que si $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$, alors changer δ en $-\delta$ ne change pas le corps, et changer δ en son conjugué $\bar{\delta}$ change K en un corps isomorphe $\bar{K}$ par la conjugaison complexe.

Nous remarquons préalablement que le problème du nombre de classes 1 est résolu dans le cas où l'extension biquadratique $K/\mathbb{Q}$ est supposée galoisienne, i.e. dans le cas où $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{d})$ avec $d \in \mathbb{N}$ non carré parfait et $d \neq 0,1$, son groupe de Galois étant alors $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Théorème 1: $K/\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(i,\sqrt{d})/\mathbb{Q}(i)$, $d \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, une extension quadratique telle $K/\mathbb{Q}$ soit galoisienne. Alors, K est principal si et seulement si $d = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 37, 43, 67$ ou 163.

Preuve: Si $h_+ = h(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))$ et $h_- = h(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$, alors $h(K) = \frac{1}{2}h_+h_-$, sauf si l'idéal (2) est ramifié dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et si l'idéal premier au dessus de (2) est principal, au quel cas $h(K) = h_+h_-$ (H. Cohn, théorème 19.8). Le problème du nombre de classes 1 et 2 étant résolu dans le cas des corps quadratiques imaginaires, nous avons le résultat.

§ 2. Caractérisation des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ dont la classe principale est de calibre 1:

Dans les trois paragraphes qui suivent (§2, §3, §4), $\mathbf{K}$ désigne une extension quadratique de $\mathbb{Q}(i)$ avec $K/\mathbb{Q}$ non galoisienne, hypothèse requise pour pouvoir utiliser la théorie des cycles d'idéaux réduits développée par H. Amara.

Un idéal de $\mathbf{K}$ est dit $\mathbb{Z}[i]$-primitif (ou plus simplement **primitif**) si il est entier et n'est divisible par aucun idéal principal (α), $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $|\alpha| \neq 1$. Toute classe d'idéaux contient un idéal primitif. En tant que $\mathbb{Z}[i]$-modules, les idéaux primitifs $\mathbf{I}$ de $\mathbf{R_K}$ s'écrivent $\mathbf{I} = (a,\frac{b+\sqrt{\delta}}{2})_{\mathbb{Z}[i]}$ avec a et b dans $\mathbb{Z}[i]$, b seulement défini modulo $2a\mathbb{Z}[i]$ et avec 4a divisant $b^2-\delta$ (dans $\mathbb{Z}[i]$).

Nous posons $x_0(\mathbf{I}) = \frac{b+\sqrt{\delta}}{2a}$. Remarquons que pour un idéal primitif, nous avons $a\mathbb{Z}[i] = \mathbf{I}\cap\mathbb{Z}[i]$, $a = N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(i)}(\mathbf{I})$ et $|a|^2 = N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I})$. H. Amara définit un idéal primitif comme étant **réduit** lorsqu'il vérifie:

$$\underset{\substack{z\in\mathbf{I}\\ z\neq 0}}{\mathrm{Min}}\left[\mathrm{Max}(|z|,|z^{\tau}|)\right] \geq |a|, \text{ soit } \underset{(m,n)\neq(0,0)}{\mathrm{Min}}\left[\mathrm{Max}(|m+nx_0(\mathbf{I})|,|m+nx_0^{\tau}(\mathbf{I})|)\right] \geq 1.$$

Il établit que toute classe d'idéaux contient un idéal réduit, que les idéaux réduits sont en nombre fini, et que conséquemment le nombre de classes d'idéaux est fini. Nous appelons **calibre d'une classe d'idéaux** le nombre d'idéaux réduits de cette classe, et **calibre du corps** le nombre total d'idéaux réduits. Le calibre du corps est donc également la somme sur toutes les classes d'idéaux des calibres respectifs de ces classes. En particulier, le corps est de calibre 1 si et seulement si il est principal et de classe principale de calibre 1.

Nous adoptons la démarche qui s'est avérée fructueuse dans le cas des corps quadratiques réels: déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de principalité de certaines familles de corps biquadratiques, extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$. La famille la plus naturelle est, à la lumière des notations précédemment introduites, la famille des corps de calibre 1. Elle l'est d'autant plus que nous montrerons que le calibre du corps tend vers l'infini avec le discriminant absolu de ce corps (Théorème 2).

Nous caractérisons les corps **K** extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ (avec $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ non galoisienne) dont la classe principale est de calibre 1 (théorème 3). Nous établissons ensuite une condition nécessaire de principalité de ces corps (théorème 4) nous permettant de rapidement déterminer ces corps de calibre 1 tels que $|\delta|^2 \leq 2.10^{12}$, et de conséquemment conjecturer que nous les avons tous obtenus. Pour appuyer la pertinence de cette conjecture, nous montrerons finalement que sous une forme convenable de l'hypothèse de Riemann généralisée nous les avons effectivement tous obtenus (théorème 5).

Rappelons préalablement la description par H. Amara de la répartition en cycles des idéaux réduits, mais notons déjà que cette notion de cycle d'idéaux réduits développée par H. Amara ne coïncide pas avec celle développée postérieurement par J. Buchmann. En effet, un idéal est réduit au sens de J. Buchmann si il vérifie $\underset{\substack{z \in I \\ z \neq 0}}{\mathrm{Min}} \left(\mathrm{Max}(|z|,|z^\tau|)\right) \geq L(I)$, où $L(I) = \mathrm{Inf}\ \mathbb{N}^* \cap I$.

Puisque $I \cap \mathbb{Z} = (I \cap \mathbb{Z}[i]) \cap \mathbb{Z} = (a\mathbb{Z}[i]) \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ avec $n = mp_1 \ldots p_r$ lorsque $a = m\pi_1 \ldots \pi_r$ avec $p_1 = |\pi_1|^2 \equiv 1\ [4]$ premier, nous avons $L(I) \geq |a|$. Les idéaux réduits au sens de J. Buchmann le sont donc également au sens de H. Amara, la réciproque n'étant pas nécessairement vraie. Le calibre (d'une classe ou du corps) au sens de J. Buchmann est donc majoré par celui au sens de H. Amara.

Lemme: Soit I un idéal entier primitif de $\mathbf{R_K}$ et $a = N_{\mathbf{K/k}}(I)$. Il existe à multiplication par les unité de $\mathbb{Z}[i]$ près un unique $h_0 = h_0(I)$ dans I, appelé l'**élément de conversion** de l'idéal **I**, vérifiant:

a) $|h_0| < |a|$,

b) $h \in \mathbf{I}$ et $|h| < |a|$ impliquent $|h_0^\tau| \leq |h^\tau|$.

Un tel h_0 vérifie $|h_0^\tau|^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{|D_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}|}$, soit $|h_0^\tau| \leq \frac{4}{\pi}\sqrt{|\delta|}$.

Preuve: $E = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ |x| < |a| \text{ et } |y| < M\}$ est de volume $v(E) = \pi^2|a|^2M^2$. D'après le théorème du corps convexe de Minkowski, il contient un élément (h,h^τ) de $\mathbf{I}$, avec $h \neq 0$, dès que son volume $v(E)$ vérifie $v(E) > 2^4v(L_I) = 2^42^{-2}N_{K/\mathbb{Q}}(I)\sqrt{|D_{K/\mathbb{Q}}|}$, donc dès que $M^2 > \frac{4}{\pi^2}\sqrt{|D_{K/\mathbb{Q}}|}$. De plus, $E\cap L_I$ étant fini, il suffit pour avoir le résultat de choisir h_0 tel que $|h_0^\tau| = \underset{\substack{h\in X\cap L_I \\ h\neq 0}}{\mathrm{Min}} |h^\tau|$.

Partant d'un idéal réduit $\mathbf{I}$, H. Amara lui associe l'idéal fractionnaire $\mathbf{J} = \left[\frac{h_0^\tau(I)}{a}\right]\mathbf{I}$, où $a = N_{K/\mathbb{Q}(i)}(I)$. Il montre que $\mathbf{J}$ est un idéal entier réduit, appelé le **successeur** de $\mathbf{I}$ et peut alors ordonner en cycle l'ensemble fini des idéaux réduits de chaque classe d'idéaux.

Théorème 2: Le calibre du corps biquadratique $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ (supposé non galoisien sur $\mathbb{Q}$) de discriminant relatif δ tend vers l'infini avec $|\delta|$. Plus précisément, si on note $m(\mathbf{K})$ le calibre du corps et $m(\mathbf{C})$ le calibre d'une classe d'idéaux $\mathbf{C}$, alors:

a) $\lambda m(\mathbf{C}) \leq R(\mathbf{K}) \leq m(\mathbf{C})\mathrm{Log}(\frac{16|\delta|}{\pi^2})$, où $\lambda = \frac{1}{12}\mathrm{Log}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \geq 4.10^{-2}$ et où $R(\mathbf{K})$ est le régulateur du corps.

b) $m(\mathbf{K}) = O(\sqrt{D}\mathrm{Log}(D))$, où $D = |\delta|^2$.

c) $\mathrm{Log}(m(\mathbf{K}))$ est équivalent à $\mathrm{Log}(|\delta|)$, c'est à dire à $\mathrm{Log}(\sqrt{D})$.

Preuve: Le a) résulte des résultats de Buchmann [4']; le b) de Louboutin [13], et le c) du théorème de Siegel-Brauer.

Théorème 3: Pour $\delta \equiv \pm 1$ (4), la classe principale est de calibre 1 si et seulement si $\delta = m^2+4i$ avec $\mathrm{Re}(m).\mathrm{Im}(m) \geq 0$, ou $\delta = m^2-4i$ avec $\mathrm{Re}(m).\mathrm{Im}(m) \leq 0$ (Re et Im désignant les parties réelles et imaginaires, et $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ non galoisienne est équivalent à $\delta \neq \pm 3$).

La preuve de ce résultat est, pour plus de clarté, éclatée en une suite de lemmes. Il suffit d'en établir la première partie, la seconde en résultant du fait que $\mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ et $\mathbb{Q}(i,\sqrt{\bar{\delta}})$ sont isomorphes par conjugaison complexe.

Lemme 1: Si $h_0 = h_0(\mathbf{R_K})$ alors $\mathbf{I} = (h_0^\tau)$ est un idéal réduit. En particulier, si la classe principale est de calibre 1, alors h_0 est une unité.

D'après la théorie des cycles d'idéaux réduits développée par H. Amara, h_0^τ est même fondamentale. Nous n'avons nul besoin de ce surcroît d'information.

Preuve: Il faut voir que $\underset{\substack{z\in\mathbf{R_K}\\ z\neq 0}}{\mathrm{Min}}\left[\mathrm{Max}(|h_0^\tau z|,|h_0 z^\tau|)\right] \geq |h_0 h_0^\tau|$, et ce parce que $|a|^2 = N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}((h_0)) = |h_0 h_0^\tau|^2$. Il faut donc voir que pour z non nul et dans $\mathbf{R_K}$ on a $|z| \geq |h_0|$ ou $|z^\tau| \geq |h_0^\tau|$. Si $|z| < 1$, alors par définition de $h_0(\mathbf{R_K})$ on a $|z^\tau| \geq |h_0^\tau|$. Si $|z| > 1$, alors $|z| > 1 > |h_0|$. D'où le résultat.

Dans ce qui suit, pour m et z dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $|z| < |m|$, nous prenons la détermination de $\sqrt{m^2-z}$ égale à $m\sqrt{1-u}$, $u = \frac{z}{m^2}$, $\sqrt{1-u} = 1 - \frac{u}{2} - \sum_{n\geq 2} a_n u^n$, $a_n \geq 0$.

Lemme 2: η une unité telle que $N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(\eta) = \pm 1$, alors $\eta \neq h_0(\mathbf{R_K})$.

Si la classe principale est de calibre 1 alors $h_0(\mathbf{R_K}) = \eta$ est une unité telle que $N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(\eta) = \pm i$.

Preuve: Par changement de η en $i\eta$, on peut supposer que $N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(\eta) = +1$. Supposons que $|1-\eta| < 1$ ou $|1+\eta| < 1$. Puisque $(1-\eta)^\tau = -\eta^\tau(1-\eta)$ et $(1+\eta)^\tau = \eta^\tau(1+\eta)$, nous aurons $|(1-\eta)^\tau| < |\eta^\tau|$ ou $|(1+\eta)^\tau| < |\eta^\tau|$ et le résultat. Reste à prouver cette assertion. Ecrivons $\eta = \frac{\alpha-\beta\sqrt{\delta}}{2}$, et utilisons $N_{K/k}(\eta) = +1$ pour obtenir $\eta = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2} = \alpha\frac{1-\sqrt{1-4/\alpha^2}}{2}$. Par développement en séries entières nous en déduisons les majorations:

$$|1-\eta| \le |1 - \tfrac{1}{\alpha}| + \frac{|\alpha|}{2}\left[1 - \frac{2}{|\alpha|^2} - \sqrt{1 - \frac{4}{|\alpha|^2}}\right] \text{ et}$$

$$|1+\eta| \le |1 + \tfrac{1}{\alpha}| + \frac{|\alpha|}{2}\left[1 - \frac{2}{|\alpha|^2} - \sqrt{1 - \frac{4}{|\alpha|^2}}\right].$$

Puisque $|1 - \frac{1}{\alpha}|^2 = 1 + \frac{1-2a}{|\alpha|^2}$ et $|1 + \frac{1}{\alpha}|^2 = 1 + \frac{1+2a}{|\alpha|^2}$, où $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, puisque a n'est pas nul (sans quoi l'extension K/Q est galoisienne), un des deux réels $|1-\eta|$ ou $|1+\eta|$ est majoré par $\sqrt{1 - \frac{1}{|\alpha|^2}} + \frac{|\alpha|}{2}\left[1 - \frac{2}{|\alpha|^2} - \sqrt{1 - \frac{4}{|\alpha|^2}}\right]$, donc strictement majoré par 1 pour $|\alpha|^2 \ge 8$. Si $\delta\beta^2 = \alpha^2-4$, $|\alpha|^2 \le 7$, $\delta \equiv \pm 1$ (4) et K/Q n'est pas galoisienne, alors à conjugaison et changement de signe près nous avons $(\alpha,\delta) = (2+i,-1+4i)$ et $(1+2i,-7+4i)$. On vérifie que dans ces deux cas on a $|1-\eta| < 1$ ou $|1+\eta| < 1$. D'où le résultat.

Si δ est le discriminant relatif d'une extension quadratique $K/\mathbb{Q}(i)$, si t est le nombre de facteurs premiers distincts dans $\mathbb{Z}[i]$ de δ et si la norme relative de l'unité fondamentale de K vaut $\pm i$, alors le 2-rang du groupe des classes de K vaut t-1. En particulier, si h(K) = 1 alors δ est premier dans $\mathbb{Z}[i]$, $\delta \ne q \equiv 3$ [4] puisque K/Q n'est pas galoisienne et δ est congru à ± 1 modulo l'idéal (4) (ce qui implique $D \equiv 1$ [8]), ou bien $\delta = 4i$ ou $4(1+i)$, à changement de signe et conjugaison près. Puisque nous cherchons à caractériser et déterminer les corps de calibre 1, nous pouvons supposer δ congru à ± 1 modulo l'idéal (4) de $\mathbb{Z}[i]$, le lemme ci-dessous s'occupant des autres cas possibles (l'extension de discriminant relatif 4i est galoisienne sur Q) ainsi que du cas $\delta = 1+4i$ qui nous posera problème dans la suite.

Lemme 3: Les corps biquadratiques $\mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ avec $\delta = 1+4i$ ou $4(1+i)$ sont de calibre 1.

Preuve: Chaque classe d'idéaux contenant un idéal entier I tel que $|N_{K/\mathbb{Q}}(I)| \le \frac{|\delta|}{2}$, ces deux corps sont principaux. Il ne reste alors plus qu'a vérifier "à la main" que leur classe principale est de calibre 1.

Lemme 4: Soit $\delta \equiv \pm 1$ (4). Si $\eta = \frac{A-B\sqrt{\delta}}{2}$ est une unité telle que $\eta = h_0(\mathbf{R_K})$, alors $|B| = 1$. On peut donc supposer $B = 1$. Conséquemment, pour $\delta \equiv \pm 1$ (4), si la classe principale est de calibre 1 alors $\delta = A^2 \pm 4i$ et $h_0(\mathbf{R_K}) = \eta = \frac{A-\sqrt{\delta}}{2}$.

Preuve: On a $|B\sqrt{\delta}| = |\eta^{\tau} - \eta| = |\frac{N_{K/k}(\eta)}{\eta} - \eta| \le |\eta| + \frac{1}{|\eta|}$. Puisque $|\eta| < 1$, on en déduit $|\eta| \le \frac{2}{|B|\sqrt{|\delta|} + \sqrt{|B|^2|\delta|-4}}$. Maintenant, $|B|\sqrt{|\delta|} - |\eta| \le |\eta^{\tau}|$ implique $|B| \le \frac{4}{\pi} + \frac{2/\sqrt{|\delta|}}{|B|\sqrt{|\delta|} + \sqrt{|B|^2|\delta|-4}}$. Puisque $f(t) = t - \frac{2/\sqrt{|\delta|}}{t\sqrt{|\delta|} + \sqrt{t^2|\delta|-4}} - \frac{4}{\pi}$ est croissante, puisque $f(\sqrt{2}) > 0$ dès que $|\delta|^2 = D \ge 32$, on a $|B| = 1$ dès que $|\delta|^2 = D \ge 32$. Si $|\delta|^2 = D < 32$, $\delta \equiv \pm 1$ (4) impliquant $D \equiv 1$ [8], nous avons $D = 9$ ou 17. Si $D = 17$, alors à changement de signe et conjugaison près, nous avons $\delta = 1+4i$ et le résultat. Si $D = 9$, alors $\delta = \pm 3$ ou $\pm 3i$ et l'extension $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ est galoisienne, cas que nous excluons.

Lemme 5: Soit $\delta = m^2+4i \equiv \pm 1$ (4) avec $\eta = \frac{m-\sqrt{\delta}}{2}$ une unité telle que $\eta = h_0(\mathbf{R_K})$. Alors, $|A+\eta| < 1$ implique $|\eta^{\tau}| \le |A+\eta^{\tau}|$, $A \in \{\pm 1, \pm i\}$, si et seulement si $\mathrm{Im}(m).\mathrm{Re}(m) \ge 0$.

Preuve: Nous avons donc $N_{K/k}(\eta) = \eta\eta^{\tau} = -i$. Ecrivons que $\eta = h_0(\mathbf{R_K})$ avec $h = A+\eta$, $A = \pm 1, \pm i$. On a $|A+\eta| = |1+\bar{A}\eta| < 1$ implique $|\eta^{\tau}| \le |A+\eta^{\tau}|$, soit après multiplication par $|i\eta|$: $|1+\bar{A}\eta| < 1$ implique $|1+iA\eta| \ge 1$. En écrivant que ces implications sont satisfaites pour $A \in \{1,-1,i,-i\}$ on obtient:

$$(|1+\eta| < 1 \text{ implique } |1+i\eta| \ge 1) \text{ et } (|1-\eta| < 1 \text{ implique } |1-i\eta| \ge 1).$$

Supposons $m = a+ib$ tel que $|m|^2 \ge 8$. Puisque $\left|1 - \frac{i}{m}\right|^2 = 1 + \frac{1-2b}{|m|^2}$, semblablement à la preuve du lemme 2, nous avons $|1+\eta| < 1$ pour $b \ge 1$. Pour $b = 0$, nous avons $|1+\eta| \ge \sqrt{1+\frac{1}{|m|^2}} - \frac{|m|}{2}\left[1 - \frac{2}{|m|^2} - \sqrt{1-\frac{4}{|m|^2}}\right] > 1$.

De même, $|1+i\eta| < 1$ pour $a \le -1$, et $|1-\eta| > 1$ pour $b = 0$. Pour $|m|^2 \ge 8$, nous avons donc $b \ge 1 \Rightarrow |1+\eta| < 1 \Rightarrow |1+i\eta| \ge 1 \Rightarrow a \ge 0$.

De même, Pour $|m|^2 \ge 8$, nous avons donc $b \le -1 \Rightarrow |1-\eta| < 1 \Rightarrow |1-i\eta| \ge 1 \Rightarrow a \le 0$. D'où le résultat.

Finalement, si $|m|^2 \le 7$ et $\delta = m^2+4i \equiv \pm 1$ (4) et $K/\mathbb{Q}$ n'est pas galoisienne, alors $(\delta,m) = (1+4i,\pm 1)$, $(-1+4i,\pm i)$, $(3+8i,\pm(2+i))$ ou $(-3+8i,\pm(1+2i))$. Pour ces valeurs $\mathrm{Im}(m)\mathrm{Re}(m) \ge 0$ et le lemme est vérifié.

Lemme 6: Soit $\delta = m^2 \pm 4i \equiv \pm 1$ (4) et posons $\eta = \frac{m-\sqrt{\delta}}{2}$. Alors, $h_0(\mathbf{R_K}) = \eta$ si et seulement si $|A+\eta| < 1$ et $A \in \{\pm 1, \pm i\}$ impliquent $|\eta^{\tau}| \le |A+\eta^{\tau}|$.

Preuve: Supposons que η ne soit pas égal à l'élément de conversion $h_0(\mathbf{R_K})$ de $\mathbf{R_K}$. Il existe alors $h \in \mathbf{R_K}$ non nul tel que $|h| < 1$ et $|h^{\tau}| < |\eta^{\tau}|$. Si $h = a + b\eta$ (car $\{1,\eta\}$ est une $\mathbb{Z}[i]$-base de $\mathbf{R_K}$), alors $b \ne 0$ (sans quoi $|h| < 1$ implique $h = 0$) et nous avons $|h - h^{\tau}| = |b||\eta - \eta^{\tau}| = |b|\sqrt{|\delta|} < 1+|\eta^{\tau}|$, soit $|b| < \frac{1+|\eta^{\tau}|}{\sqrt{|\delta|}}$. Nous aurons donc $|b| = 1$ dès que $1 + |\eta^{\tau}| \le \sqrt{2}\sqrt{|\delta|}$, soit dès que $|\eta^{\tau}| \le \sqrt{2}\sqrt{|\delta|} - 1$. Puisque $|\eta^{\tau}| \le \frac{\sqrt{|\delta|} + \sqrt{|\delta|+4}}{2}$, nous aurons $|b| = 1$ dès que $\sqrt{|\delta|} + \sqrt{|\delta|+4} - 2\sqrt{2|\delta|} + 2 \le 0$, i.e. dès que $D = |\delta|^2 \ge \frac{193+132\sqrt{2}}{4}$, i.e. $D \ge 95$.

Pour $\delta \equiv \pm 1$ (4), $D = |\delta|^2$ et $D < 95$ impliquent $D = 17, 25, 41, 49, 65, 73, 81$ ou 89. Pour $D = 25, 49$ ou 81 l'extension $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ est galoisienne, donc à rejeter.

Pour $D = 17, 41, 73$ ou 89 qui sont premiers, on a à conjugaison près $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ avec respectivement $\delta = 1+4i, 5+4i, 3+8i$ ou $5+8i$, la valeur $D = 41$ étant donc à rejeter puisque ne provenant pas d'un δ de la forme $\delta = m^2 \pm 4i$. Restent donc les corps biquadratiques tels que $D = 17, 73$ et 89 qui sont tels que $\frac{1+|\eta^\tau|}{\sqrt{|\delta|}} = \frac{1+|\eta^\tau|}{D^{1/4}} \leq \sqrt{2}$, ce qui donne encore $|b| = 1$.

Si $|b| = 1$ nous pouvons nous ramener après multiplication par ± 1 ou $\pm i$ au cas de $b = +1$. Maintenant, $|h| = |a + b\eta| < 1$ implique $|a| < 1 + |\eta| \leq \sqrt{2}$, et implique donc $|a| = 1$ dès que $|\eta| \leq \sqrt{2} - 1$. Mais $\eta = m\frac{1-\sqrt{1\pm 4i/m^2}}{2}$ et donc $|\eta| \leq |m|\frac{1-\sqrt{1-4/|m|^2}}{2} = \frac{|m|-\sqrt{|m|^2-4}}{2} \leq \sqrt{2} - 1$ dès que $|m| \geq 2\sqrt{2}$, soit dès que $|m|^2 \geq 8$. Puisque, à changement de signe et conjugaison près, nous avons $|m|^2 < 8$ si et seulement si $\delta = 1+4i$, $3+8i$ ou 3, cette dernière valeur étant à rejeter puisque conduisant à une extension galoisienne sur $\mathbb{Q}$, puisque $|\eta| \leq \sqrt{2} - 1$ pour $\delta = 3+8i$, puisque pour $\delta = 1+4i$ le corps est de calibre 1, nous avons le résultat: si $h_0(\mathbf{R_K}) \neq \eta$, alors il existe h dans $\mathbf{R_K}$ de la forme $h = A + \eta$ avec $A \in \{\pm 1, \pm i\}$, $|h| < 1$ et $|h^\tau| < |\eta^\tau|$. La réciproque est immédiate.

§ 3. Condition nécessaire pour qu'une extension quadratique de $\mathbb{Q}(i)$ soit de calibre 1:

Nous établissons une condition nécessaire pour que $\mathbf{K}$ soit de calibre 1, condition suffisamment simple pour pouvoir nous permettre de rapidement et efficacement cribler ces corps biquadratiques, mais suffisamment forte pour ne pas obtenir comme résidus de ce criblage un trop grand nombre de corps candidats. Nous notons X le caractère de l'extension $\mathbf{K}/\mathbb{Q}(i)$ (voir [7], [13]).

Théorème 4: Si $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ de discriminant relatif δ sur $\mathbb{Q}(i)$ est de calibre 1, si $(-)$ désigne le symbole de Legendre et si $D = |\delta|^2$, alors:
$(\frac{D}{p}) = +1$ pour p premier impair, $p \equiv 1$ [4] et $p \leq \frac{\sqrt{D}}{4}$ et
$(\frac{D}{q}) = -1$ pour q premier impair, $q \equiv 3$ [4] et $q^2 \leq \frac{\sqrt{D}}{4}$.
Pour $\delta \equiv \pm 1$ (4), on a de plus $D = (a^2+b^2)^2 + 16(ab+1)$ avec $a>b\geq 0$ de parité contraire.

Preuve: Remarquons préalablement qu'un idéal entier $\mathbb{Z}[i]$-primitif I de K tel que $N_{K/\mathbb{Q}}(I) = |N_{K/\mathbb{Q}(i)}(I)|^2 \leq \frac{\sqrt{D}}{4}$ est réduit. En effet, sinon, il existe $(m,n) \neq (0,0)$ dans $\mathbb{Z}[i]$ tel que $|m+nx_0(I)| < 1$ et $|m+nx_0^{\tau}(I)| < 1$. Mais alors $\frac{\sqrt{|\delta|}}{|N_{K/\mathbb{Q}(i)}(I)|} = |x_0(I) - x_0^{\tau}(I)| < 2$, soit $|N_{K/\mathbb{Q}(i)}(I)|^2 > \frac{|\delta|}{4} = \frac{\sqrt{D}}{4}$. Maintenant, pour $p \equiv 1$ [4] premier l'idéal (p) de $\mathbb{Z}$ se décompose totalement en $\mathbf{P}\overline{\mathbf{P}}$ dans $\mathbb{Z}[i]$ avec $\mathbf{P} = (\pi)$ et $\overline{\mathbf{P}} = (\overline{\pi})$ principaux. $\mathbf{P}$ est inerte, ramifié ou totalement décomposé suivant que $X(\pi) = -1$, 0 ou +1. Si $X(\pi) \neq -1$, on a donc $\mathbf{P}R_K = \mathcal{P}\mathcal{P}'$ avec $|N_{K/\mathbb{Q}(i)}(\mathcal{P})|^2 = |\pi|^2 = p$. Pour $p \leq \frac{\sqrt{D}}{4}$ l'idéal $\mathcal{P}$ est donc réduit et distinct de R_K. Donc $X(\pi) \neq -1$ implique $p \geq \frac{\sqrt{D}}{4}$. De même $X(\overline{\pi}) \neq -1$ implique $p \geq \frac{\sqrt{D}}{4}$. Puisque $X(\overline{\pi}) = (\frac{D}{p})X(\pi)$, nous obtenons le premier résultat. Pour le second, on utilise le fait que (q) est inerte dans $\mathbb{Z}[i]$ et que $X(q) = (\frac{D}{q})$.
Le dernier point découle du théorème 3 et de ce qu'à conjugaison près et en posant $m = a+ib$, on a $\delta = m^2+4i$.

Un criblage sur microordinateur des $D \equiv 1$ [8], $D \leq 10^8$ vérifiant $(\frac{D}{p}) = +1$, $p \equiv 1$ [4] premier et $p \leq \frac{\sqrt{D}}{4}$, et vérifiant $(\frac{D}{q}) = -1$, $q \equiv 3$ [4] premier et $q^2 \leq \frac{\sqrt{D}}{4}$, donne 191 valeurs possibles de D, la plus grande d'entre elles étant D = 56969. Seules 7 de ces valeurs sont de la forme $D = (a^2+b^2)^2 + 16(ab+1)$ avec $a > b \geq 0$ de parité contraire: D = 17, 73, 97, 281, 369, 641 et 1481. Nous avons poussé ce criblage, en le restreignant aux D de cette forme, jusqu'à $D \leq 2.10^{12}$ sans pour autant obtenir de nouveaux corps candidats.

Excepté $D = 369$ qui n'étant pas premier est tel que le nombre de classes du corps correspondant est pair, ces six discriminants correspondent à six corps de nombres de classes 1 et de classe principale de calibre 1, donc à six corps de calibre 1. Le criblage précédent où l'on impose de plus la primalité de D ne fournit plus que 78 corps candidats, le plus grand D étant alors $D = 42929$.

Remarque: Dans le cas d'un corps quadratique réel **K**, un idéal **I** tel que $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) \leq \frac{1}{2}\sqrt{D}$ est réduit. Réciproquement, d'après le théorème du corps convexe de Minkowski, toute classe d'idéaux contient un idéal entier **I** tel que $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) \leq \frac{1}{2}\sqrt{D}$. Une fois établi que la classe principale est de calibre 1 si et seulement si $D = m^2+4$ (ce qui se fait beaucoup plus simplement que pour le cas des corps biquadratiques ici abordé en écrivant que le développement en fractions continues de $x_0(R_{\mathbf{K}})$ est purement périodique de longueur 1), on dispose, pour $D = m^2+4$, de l'équivalence $h(\mathbf{K}) = 1 \Leftrightarrow (\frac{D}{p}) = -1$, $2 \leq p \leq \frac{1}{2}\sqrt{D}$.

Pour **K** une extension quadratique non galoisienne de $\mathbb{Q}(i)$, si $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) \leq \frac{1}{4}\sqrt{D}$ alors **I** est réduit. Malheureusement, la meilleure borne connue, celle établie par Lakein, affirme seulement que toute classe d'idéaux de **K** contient un idéal **I** tel que $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) \leq \frac{1}{2}\sqrt{D}$. Une fois caractérisées les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ dont la classe principale est de calibre 1, on ne peut donc point tout uniment disposer pour ces extensions de l'équivalence:

$$h(\mathbf{K}) = 1 \Leftrightarrow X(\pi) = -1,\ \pi \text{ premier dans } \mathbb{Z}[i] \text{ tel que } 1 < |\pi|^2 \leq \frac{1}{4}\sqrt{D},$$

mais seulement de l'implication $\Rightarrow$, non plus que disposer de l'équivalence:

$$h(\mathbf{K}) = 1 \Leftrightarrow X(\pi) = -1,\ \pi \text{ premier dans } \mathbb{Z}[i] \text{ tel } 1 < |\pi|^2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{D},$$

mais seulement de l'implication $\Leftarrow$.

Pour obtenir des énoncés s'exprimant en termes de conditions nécessaires et suffisantes, il est clair qu'il suffit de disposer d'une borne de Minkowski B_{Mk} suffisamment petite pour que les idéaux de norme inférieure à B_{Mk} soient réduits, ce qui à lieu dans le cas quadratique réel avec $B_{Mk} = \frac{1}{2}\sqrt{D}$. Nous reprendrons ces considérations au paragraphe 5.

§4. Minorations de nombres de classes et détermination des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ de calibre 1

Lemme: Soit $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ une extension quadratique de $\mathbb{Q}(i)$ de discriminant relatif δ supposé vérifier $\delta \equiv \pm 1$ (4) et $D = |\delta|^2$ libre de carrés dans $\mathbb{N}^*$. Soit ζ_K la fonction zêta de ce corps et ζ la fonction zêta de Riemann. Alors, nous avons la majoration $|\zeta_K(s)/\zeta(s)| \leq 4D+6$ dans le disque fermé $|s-2| \leq \frac{4}{3}$.

Preuve: ζ_K se factorise en $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi)L(s,X)$, où χ est le caractère de l'extension $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ et X celui de l'extension $K/\mathbb{Q}(i)$. Majorons maintenant $L(s,\chi)$ et $L(s,X)$ dans ce disque. Posons $S_b(a) = \sum_{k=0}^{a} X(k+ib)$. Nous avons alors

$$L(s,X) = \sum_{\substack{z=a+ib\\ a>0,\ b\geq 0}} \frac{X(a+ib)}{|a+ib|^{2s}} = \sum_{b\geq 0}\left[-\frac{X(ib)}{(b^2+1)^s} + \sum_{a>0} S_b(a)\left(\frac{1}{(a^2+b^2)^s} - \frac{1}{((a+1)^2+b^2)^s}\right)\right].$$

Puisque $\delta \equiv \pm 1$ (4) et $|\delta|^2$ est libre de carrés, le caractère X de l'extension $K/\mathbb{Q}(i)$ est défini par $X(z) = X(x+iy) = \left[\frac{z}{\delta}\right] = \left[\frac{x+iy}{\alpha+i\beta}\right] = \left(\frac{k\alpha+b\beta}{D}\right)$ (Louboutin [13]). Puisque $k \mapsto X(k+ib)$ est périodique de période D, à valeurs dans $\{-1,0,+1\}$ et telle que $\sum_{k=1}^{D} X(k+ib) = \sum_{k=1}^{D} \left[\frac{k+ib}{\alpha+i\beta}\right] = \sum_{k=1}^{D} \left(\frac{k\alpha+b\beta}{D}\right) = \left(\frac{\alpha}{D}\right)\sum_{k=1}^{D}\left(\frac{k+\gamma}{D}\right)$ où γ est tel que $\alpha\gamma \equiv b\beta$ [D], donc telle que $\sum_{k=1}^{D} X(k+ib) = 0$, nous avons $|S_b(a)| \leq \frac{D}{2}$. D'où $|L(s,X)| \leq \sum_{b\geq 0}\left[\frac{1}{(b^2+1)^\sigma} + \frac{D}{2}\frac{|s|}{\sigma}\sum_{a>0}\left(\frac{1}{(a^2+b^2)^\sigma} - \frac{1}{((a+1)^2+b^2)^\sigma}\right)\right]$, puis $|L(s,X)| \leq \left(1 + \frac{D}{2}\frac{|s|}{\sigma}\right)\sum_{b\geq 0} \frac{1}{(b^2+1)^\sigma}$, avec $\sigma = \mathrm{Re}(s)$.

Dans le disque fermé considéré, nous avons $\frac{|s|}{\sigma} \leq \frac{3}{\sqrt{5}}$ et $\sigma \geq \frac{2}{3}$ (faire un dessin), d'où: $\sum_{b\geq 0} \frac{1}{(b^2+1)^\sigma} \leq \sum_{b\geq 0} \frac{1}{(b^2+1)^{2/3}} = c = 4{,}145.....$

Soit χ le caractère de l'extension $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ et $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \chi(k)$, alors $L(s,\chi) = \sum_{n\geq 0} S(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$. Puique $|S(n)| \leq 1$, nous avons $|L(s,\chi)| \leq \frac{|s|}{\sigma} \leq \frac{3}{\sqrt{5}}$, toujours dans ce même disque. Finalement, $|L(s,\chi)L(s,X)| \leq \frac{9c}{10}D + \frac{3c}{\sqrt{5}} \leq 4D+6$.

Lemme: Pour $\delta = m^2 \pm 4i$ on a $R(K) \leq \text{Log}(\sqrt{D} + 4)$.

Preuve: $\eta = \frac{m+\sqrt{\delta}}{2}$ étant une unité, $R(K) \leq |\text{Log}(|\eta|^2)|$. Puisque $|m| \leq \sqrt{|\delta|+4}$, nous avons $|\eta|^2 \leq \sqrt{D} + 4$. De même, $\frac{1}{\eta} = i\frac{m-\sqrt{\delta}}{2}$, et donc $|\frac{1}{\eta}|^2 \leq \sqrt{D} + 4$.

Théorème 5: Soit $K = \mathbb{Q}(i,\sqrt{\delta})$ un corps biquadratique de discriminant relatif δ sur $\mathbb{Q}(i)$ tel que $\delta = m^2+4i$, $m = a+ib$, $a > b \geq 0$, a et b de parité contraire (et $\delta \neq \pm 3$). Sous l'hypothèse de Riemann généralisée $\zeta_K(\sigma) \leq 0$, $\sigma \in [1 - \frac{1}{4\text{Log}(4D+6)}, 1[$, où $D = |\delta|^2$ et où ζ_K est la fonction zêta du corps K, nous avons $h(K) = 1$ si et seulement si $D = 17, 73, 97, 281, 641$ ou 1481; i.e. il n'existe à isomorphisme près que 8 extensions quadratiques non galoisiennes de $\mathbb{Q}(i)$ de calibre 1: les six précédentes et les deux données au lemme 3.

Preuve: D'après le lemme 11.7 de Washington et en remarquant que sa minoration est optimale pour $\alpha = 1 - \frac{1}{4\text{Log}(M)}$ et vaut alors $\frac{1}{16e\text{Log}(M)}$, nous avons la minoration $L(1,\chi)L(1,X) = \frac{\pi}{4}L(1,X) \geq \frac{1}{16e\text{Log}(4D+6)}$. De la formule du nombre de classes $h(K) = \frac{\sqrt{D}L(1,X)}{\pi R(K)}$ nous déduisons alors la minoration:

$$h(K) \geq \frac{1}{4\pi^2 e}.\frac{\sqrt{D}}{R(K)\text{Log}(3D+5)} \geq \frac{1}{4\pi^2 e}.\frac{\sqrt{D}}{\text{Log}(\sqrt{D} + 4)\text{Log}(4D+6)}.$$

Si $h(K) = 1$, nous obtenons donc la majoration $D \leq 10^9$.

§5. Bornes de Minkowski, cas particulier des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$, et extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$ de calibre 1:

Nous montrons que les bornes de Minkowski établies par R. B. Lakein ne sont pas optimales, sans pour autant que dans le cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(i)$ notre nouvelle borne soit suffisante pour établir une des équivalences que nous eussions aimé vraie à la remarque suivant le théorème 4. En revanche, dans le cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$, $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, nous amendons sa borne de Minkowski de telle sorte que nous puissions énoncer un strict analogue du cas quadratique réel, i.e. du théorème 3 de Louboutin [12"].

Proposition 6: a) Toute classe d'idéaux de $\mathbf{K}$ extension quadratique de $\mathbb{Q}(i)$ de discriminant relatif $\delta_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(i)}$ contient un idéal entier primitif $\mathbf{I}$ tel que $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) = |N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(i)}(\mathbf{I})|^2 \le \frac{|\delta|}{3}$.

b) Toute classe d'idéaux de $\mathbf{K}$ extension quadratique de $\mathbb{Q}(j)$ de discriminant relatif $\delta_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)}$ contient un idéal entier primitif $\mathbf{I}$ tel que $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) = |N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)}(\mathbf{I})|^2 \le \frac{|\delta|}{\sqrt{13}}$.

Preuve: a) Soit $\mathbf{I} = (Q, \frac{P+\sqrt{\delta}}{2})_{\mathbb{Z}[i]}$ un idéal entier primitif de cette classe. D'après le résultat de L. R. Ford sur les approximations dans $\mathbb{Q}(i)$, il existe une infinité de fractions $\frac{q}{p}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}[i]$ telles que $|\frac{P+\sqrt{\delta}}{2Q} - \frac{q}{p}| < \frac{1}{\sqrt{3}|p|^2}$.

En posant $\alpha = pP-2qQ$ et $\beta = p\sqrt{\delta}$, nous avons $|\alpha - \beta| < \frac{2Q}{\sqrt{3}|p|}$, puis $|\alpha^2 - \beta^2| \le |\alpha - \beta|(|\alpha - \beta| + 2|\beta|) < \frac{2Q}{\sqrt{3}|p|}\left(\frac{2Q}{\sqrt{3}|p|} + 2|p|\sqrt{|\delta|}\right)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Puisqu'il existe une infinité de telles fractions $\frac{q}{p}$, il en existe au moins une telle que $|\alpha^2 - \beta^2| < 4Q(\sqrt{|\delta|/3} + \varepsilon)$. Alors, $z = \frac{\alpha+\beta}{2} \in \mathbf{R_K}$ est tel que $z \in \mathbf{I}$ et $|N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(i)}(\mathbf{I})| < Q(\sqrt{|\delta|/3} + \varepsilon)$. L'idéal $\mathbf{J}$ défini par $(z) = \mathbf{I}\mathbf{J}^{\tau}$ est dans la classe de $\mathbf{I}$ et de norme relative majorée par $\sqrt{|\delta|/3} + \varepsilon$. Les idéaux de norme relative bornée étant en nombre fini, on peut passer à l'inégalité large sans plus tenir compte de ε. Le b) se prouve de même.

Plus généralement, notons C_d la constante d'Hurwitz d'un corps quadratique imaginaire principal $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec $d > 0$ libre de carrés (voir G. Poitou). Le raisonnement précédent montre que toute classe d'idéaux d'une extension quadratique $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ de discriminant relatif $\delta_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}$ (donc de discriminant absolu $D_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}} = |D|^2|\delta_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}|^2$ où D est le discriminant de $\mathbf{k}$) contient un idéal entier primitif $\mathbf{I}$ tel que $N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I}) = |N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(\mathbf{I})|^2 \le \frac{|\delta|}{(C_d)^2}$. Les valeurs numériques suivantes des constantes d'Hurwitz: $C_1 = \sqrt{3}$, $C_2 = \sqrt{2}$, $C_3 = \sqrt[4]{13}$, $C_7 = \sqrt[4]{8}$, $C_{11} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $C_{19} = 1$ améliorent les bornes de R. B. Lakein. Dans le cas de $\mathbb{Q}(j)$, on peut de plus suffisamment amender ces bornes en utilisant les premières valeurs $\sqrt[4]{13}$ et 2 du spectre de Markov, de sorte que l'obstruction explicitée à la suite du théorème 4 soit levée. En effet, il résulte du paragraphe VI.6 de G. Poitou que si x est quadratique sur $\mathbb{Q}(j)$ et de constante d'Hurwitz $\sqrt[4]{13}$, alors il est équivalent à l'une des racines de $X^2 - jX - 1$. En particulier, $\mathbb{Q}(j,x) = \mathbb{Q}(j,\sqrt{3-j})$. Conséquemment, pour $\mathbf{K} \ne \mathbb{Q}(j,\sqrt{3-j})$, nous pouvons amender le b) de la proposition précédente en: $|N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)}(\mathbf{I})|^2 \le \frac{|\delta|}{4}$. Notons que d'après la proposition précédente $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(j,\sqrt{3-j})$ est principal.

Théorème 7: Soit $\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)$ une extension quadratique du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(j)$ (avec $\mathbf{K} \ne \mathbb{Q}(j,\sqrt{3-j})$ et $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ non galoisienne). Soit $\mathbb{E}(\mathbf{K}) = \{N_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathbf{I});\ \mathbf{I}$ idéal réduit principal de $\mathbf{K}\}$.

Alors, $\mathbf{K}$ est principal si et seulement si $\mathbb{E}(\mathbf{K})$ contient $\{|N_{\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}}(\mathbf{P})|^2;\ \mathbf{P}$ idéal premier de $\mathbb{Z}[j]$ non inerte dans $\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)$ et $|N_{\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}}(\mathbf{P})|^2 \le \frac{|D_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{2}}}{12}\}$.

Preuve: identique à celle du théorème 3 de [13"], et ce parce que les idéaux primitifs $\mathbf{I}$ avec $|N_{\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}}(\mathbf{I})|^2 \le \frac{|D_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}|^{\frac{1}{2}}}{12}$ sont réduits (voir preuve du th. 4).

Si $\mathbf{K}$ est une extension quadratique de $\mathbb{Q}(j)$ de classe principale de calibre 1, $\mathbb{E}(\mathbf{K})$ est réduit à $\{1\}$. Une fois caractérisées les extensions à classe principale de calibre 1, nous aurons donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient principales, i.e. de calibre 1.

Théorème 8: Soit $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ une extension quadratique de $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(j)$ (avec $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ non galoisienne) de discriminant relatif $\delta_{\mathbf{K}/\mathbf{k}} = \delta$ tel que $D = |\delta_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}|^2$ soit impair. Alors, la classe principale de $\mathbf{K}$ est de calibre 1 si et seulement si, au carré des racines de l'unité de $\mathbf{k}$ près, δ est de la forme $\delta = m^2+4$, $m = a+bj$ avec a ou b impair. De plus, $\eta = \frac{m-\sqrt{\delta}}{2}$ est alors l'unité fondamentale de $\mathbf{K}$, et $h_0(\mathbf{R}_{\mathbf{K}}) = \eta$.

Remarquons que $\mathbf{K}/\mathbb{Q}$ est galoisienne si et seulement si $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(j,\sqrt{\delta})$ avec $\delta \in \mathbb{Z}$, $j\mathbb{Z}$ ou $j^2\mathbb{Z}$. Pour $\delta = m^2+4$ cela n'arrive que pour $b = 0$, et alors $\delta = a^2+4$, ou pour $b = 2a$, et alors $\delta = 4-3a^2$, ou pour $\delta = -4j$, ou finalement pour $\delta = -4j^2$.

Théorème 9: Le corps biquadratique $\mathbb{Q}(j,\sqrt{\delta})$ (supposé non galoisien sur $\mathbb{Q}$) avec δ libre de carrés dans $\mathbb{Z}[j]$ est de calibre 1 si et seulement si au carré des racines de l'unité de $\mathbb{Q}(j)$ près on a $\delta = m^2+4$, $D = |\delta|^2$ impair et si les idéaux premiers (π) de $\mathbb{Z}[j]$ tels que $|\pi|^2 \leq \frac{|\delta|}{4}$ sont inertes dans $\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)$. En particulier, il doit vérifier:

$D \equiv 1$ [12] et D premier,

$(\frac{D}{q}) = +1$, q premier impair, $q = 3$ ou $q \equiv 1$ [6] et $q \leq \frac{1}{4}\sqrt{D}$,

$(\frac{D}{q}) = -1$, $q = 2$ ou q premier impair, $q \equiv 5$ [6] et $q^2 \leq \frac{1}{4}\sqrt{D}$.

Pour $D \leq 10^8$ il n'existe à isomorphisme près que 14 tels corps: ceux obtenus pour D = 13, 37, 61, 73, 97, 109, 181, 229, 277, 421, 541, 1093, 1213 et 1621. Sous l'assomption de l'hypothèse de Riemann $\zeta_{\mathbf{K}}(s) \leq 0$, $s \in]0,1[$ pour la fonction zêta des corps biquadratiques, il n'en existe pas d'autre.

Preuves: Pour $\delta = m^2+4$, $m = a+jb$ avec a ou b impair et $\eta = \frac{m-\sqrt{\delta}}{2}$, on remarque $|A+\eta| < 1$ implique $|\eta^\tau| \leq |A+\eta^\tau|$ pour $A \in \{\pm1,\pm j,\pm j^2\}$ si et seulement si les trois implications suivantes sont satisfaites:

$$(*)\qquad \begin{aligned} |1+\eta| < 1 &\Rightarrow |1-\eta| \geq 1 \\ |j+\eta| < 1 &\Rightarrow |j^2-\eta| \geq 1 \\ |j^2+\eta| < 1 &\Rightarrow |j-\eta| \geq 1. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \pm1$, nous avons ensuite $\left| 1 + \frac{\varepsilon}{m} \right|^2 = 1 + \frac{1+\varepsilon(2a-b)}{|m|^2}$, $\left| j + \frac{\varepsilon}{m} \right|^2 = 1 + \frac{1+\varepsilon(-a-b)}{|m|^2}$, $\left| j^2 + \frac{\varepsilon}{m} \right|^2 = 1 + \frac{1+\varepsilon(2b-a)}{|m|^2}$ (les deux dernières résultant de la première par changement de m en respectivement jm et j^2m). Il en résulte que les trois implications (*) sont satisfaites.

On raisonne alors semblablement au cas des extensions de $\mathbb{Q}(i)$, ce qui précède montrant de plus que le lemme 5 n'a plus d'objet dans le cas des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(j)$. En particulier, si **K** est une extension quadratique de $\mathbb{Q}(j)$ de classe principale de calibre 1, alors son unité fondamentale est de norme relative -1 et le groupe des classes de **K** est donc de 2-rang t-1, où t est le nombre de facteurs premiers du disicriminant relatif $\delta_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)}$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Conséquemment, si **K** est de calibre 1, son discriminant est premier dans $\mathbb{Z}[i]$ donc $D = |\delta|^2$ est ou bien impair ou bien une puissance de 2, ce dernier cas ne se produisant que pour $\delta = \pm2$ (au carré des racines de l'unité de $\mathbb{Q}(j)$ près) et $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(j,\sqrt{2})$ qui est galoisien sur $\mathbb{Q}$. Des simulations numériques sur microordinateur conduisent au résultat suivant: il existe 68 entiers D tels que $D \leq 10^8$ satisfaisant aux trois conditions nécessaires du théorème 9, le plus grand d'entre eux étant D = 53197. Parmi ceux-ci, il y en a 20 qui sont de la forme $D = |m^2+4|$, $m \in \mathbb{Z}[j]$, le plus grand d'entre eux étant D = 14553, et 14 pour lesquels les idéaux premiers (π) de $\mathbb{Z}[j]$ tels que $|\pi|^2 \leq \frac{1}{4}\sqrt{D}$ sont inertes dans $\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)$. Pour tester cette condition nous remarquons premièrement que l'on peut supposer π non inerte dans $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}$. En effet, la troisième condition nécessaire du théorème 9 demande que les π inertes dans $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}$ le restent dans $\mathbf{K}/\mathbb{Q}(j)$. Nous remarquons secondement que pour $p = \pi\bar{\pi}$ avec p non inerte dans $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}$ la seconde condition nécessaire de ce théorème demandant que (π) et $(\bar{\pi})$ soient tous deux simultanément inertes ou totalement décomposés dans $K/\mathbb{Q}(j)$, il suffit de vérifier que l'un d'entre eux reste inerte dans $K/\mathbb{Q}(j)$. Cette vérification se fait par le calcul des symboles de Dirichlet $\left[\frac{\delta}{\pi}\right] = (\frac{\alpha b-\beta a}{D})(\frac{b}{D})$ lorsque $\delta = \alpha+j\beta$ et $\pi = a+jb$, symboles dont il faut vérifier qu'ils valent -1 pour ces π. Nous donnons ci-dessous ces valeurs de D, une valeur de m telle que $D = |m^2+4|$ ainsi que le nombre de classes h(K) du corps biquadratique K correspondant, nombre de classes calculé par voie analytique ainsi que nous l'exposons ailleurs (voir [13]).

D	m	δ	h(K)
13	j	3-j	1
37	1-j	4-3j	1
61	3j	-5-9j	1
73	1-2j	1-8j	1
97	1+4j	-11-8j	1
109	2-j	7-5j	1
181	1-3j	-4-15j	1
229	2+5j	-17-5j	1
277	3-j	12-7j	1
421	2-3j	-1-21j	1
541	5j	-21-25j	1
613	4-j	19-9j	3
1093	3+7j	-36-7j	1
1213	5-j	28-11j	1
1549	2-5j	-17-45j	3
1621	1+7j	-44-35j	1
2221	7j	-45-49j	3
4957	1+9j	-76-63j	3
9013	9-j	84-19j	5
14533	9-3j	76-63j	7

§6. Questions ouvertes:

Caractériser (en terme de contrainte sur leurs discriminants) les corps cubiques cycliques ou cubiques purs de classe principale de calibre 1 (voir [19] pour une indication quant à la réponse possible à cette question pour le cas cyclique). Dans ces deux cas, dès lors que la classe principale est de calibre 1, nous disposons d'après J. Buchmann ou R. Paysant-Le Roux d'un majorant pour le régulateur. D'après G. Lettl pour le cas cubique cyclique, et P. Barrucand pour le cas cubique pur, nous en déduisons alors un minorant pour le nombre de classes tendant vers l'infini avec le discriminant du corps. La détermination numérique de ces corps de calibre 1, i.e. de classe principale de calibre 1 et principaux, ne poserait donc guère de problème. Pour cette détermination numérique, il n'est même nul besoin de d'abord caractériser ces corps cubiques à classe principale de calibre 1. Pour des raisons esthétiques, et pour les considérables simplifications numériques qu'elle apporterait, cette caractérisation nous paraît néanmoins à préalablement obtenir.

[1] H. AMARA, "Cycles canoniques d'idéaux réduits et nombres de classes de certains corps quadratiques réels"; Nagoya Math. J.; Vol. **103** (1986), 127-132

[1'] H. AMARA, "Groupe des classes et unité fondamentale des extensions quadratiques relatives d'un corps quadratique imaginaire principal",Pac. J. of Math., Vol. **96**, N° 1 (1981), 1-12

[1"] H. AMARA, "Détermination de la structure du groupe des classes, et de l'unité fondamentale des extensions quadratiques relatives d'un corps quadratique imaginaire principal", Thèse de Doctorat de troisième cycle, Mathématiques pures, Université Scientifique et Médicale de Grenoble (Juin 1977)

[2] N.C. ANKENY, S. CHOWLA, H. HASSE, "On the class number of the maximal real subfield of a cyclotomic field" J. Reine Angew. Math.; **217** (1965), 217-220

[3] P. BARRUCAND, J. LOXTON and H.C. WILLIAMS, "Some explicit upper bounds on the class number and regulator of a cubic field with negative discriminant" Pacific J. of Math., Vol. **128** (1987), 209-222

[4] J. BUCHMANN, "A generalization of Voronoi's algorithm, I&II" J. of Nb. Th., Vol. **20**, Nb. 2 (1978), 177-209

[4'] J. BUCHMANN, "On the period length of the generalized Lagrange algorithm"; J. of Nb. Th., Vol. **26**, Nb. 1 (1987), 31-37

[5] S. CHOWLA, "On Euler's polynomial", J. of Nb. Th. **13** (1981), 443-445

[6] H. COHN, A classical invitation to algebraic number fields Universitext, Springer-Verlag (1978)

[7] P. G. L. DIRICHLET, "Recherche sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes"; Werke I, 533-618

[8] L. R. FORD, "On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number"; A. M. S. Trans. **27** (1925), 146-154

[9] D. HILBERT, "Über den Dirichlesten biquadratishen Zahlkörper" Werke I, 24-52

[10] G. LACHAUD "On real quadratic fields" Bul. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), N° 2, 307-311

[11] R. B. LAKEIN, "A Gauss bound for a class of biquadratic fields" J. of Nb. Th., Vol. **1** (1969), 108-112

[12] G. LETTL, "A lower bound for the class number of certain cubic number fields", Math. of Comp., Vol. **46**, Nb. 174 (1986), 659-666

[13] S.LOUBOUTIN, "Nombres de classes d'idéaux des extensions quadratiques du corps de Gauss"; Preprint

[13'] S. LOUBOUTIN, "Prime producing polynomials and class numbers of real quadratic fields"; to appear in Canadian J. of Math

[13"] S. LOUBOUTIN, "Continued Fractions and Real Quadratic Fields" J. of Nb. Th., Vol. **30**, Nb. 2 (1988), 167-176

[14] R. A. MOLLIN and H. C. WILLIAMS, "On prime valued polynomials and class numbers of real quadratic fields"; Nagoya Math. J., Vol. **112** (1988), 143-151

[15] J. OESTERLE, "Le problème de Gauss sur le nombre de classes" L'Enseignement mathématique, Tome **34** (1988), 43-67

[16] R. PAYSANT-LE ROUX, "Calibre d'un corps global" J. of Nb. Th., Vol. **30**, Nb. 3 (1988), 267-287

[17] G. POITOU, "Sur l'approximation des nombres complexes" Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Vol. **89** (1953)

[18] P. RIBENBOIM, "Euler's famous prime generating polynomial and the class number of imaginary quadratic fields" L'Enseignement mathématique, Tome **34** (1988), 23-42

[19] R. SMADJA, "Sur les groupes des classes des corps de nombres" C.R.A.S., t. **276** (1973), 1636-1641

[20] L. C. WASHINGTON, Introduction to cyclotomic fields Graduate Texts in Mathematics **83** Springer-Verlag (1982)

Université de Caen, U.F.R. Sciences, Département de Mathématiques,
Esplanade de la Paix, 14032 Caen Cedex, FRANCE

(Reçu le 6 juillet 1990)