manuscripta math. 67, 251 - 269 (1990)

manuscripta mathematica

THEORIE DE NEVANLINNA p-ADIQUE

Abdelbaki BOUTABAA

We study meromorphic functions in all $\mathbb{C}p$ or in a disc of $\mathbb{C}p$. Using some properties of the valuation polygon notion, we show p-adic results perfectly analogous to those of Nevanlinna in the complex case.

As an application we prove the p-adic analogue of Malmquist-Yosida Theorem:
Let $m\in\mathbb{N}$ and $R(x,y)\in\mathbb{C}p(x,y)$. If the differential equation :
$(dy/dx)^m = R(x,y)$, $m\in\mathbb{N}$,
has a non rational meromorphic solution in all $\mathbb{C}p$, then $R(x,y)$ is a polynomial in y of degree $\leq 2m$.

INTRODUCTION

Dans [2] *Hà Huy Khoai* considère des fonctions méromorphes dans le disque unité de $\mathbb{C}p$. Sa définition de la "fonction caractéristique" **T** ne lui permet d'obtenir un résultat comparable au "premier théorème fondamental" classique de *Nevanlinna* [4], que pour une classe restreinte de fonctions qu'il appelle "fonctions à croissance modérée". Hà Huy Khoai a annoncé avoir amélioré ces résultats. Cependant, il apparait qu'aucun papier de lui autre que [2] et se rapportant à ce sujet n'a été publié.

Dans ce travail, on considère des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}p$ tout entier ou dans un disque quelconque de $\mathbb{C}p$. En modifiant la définition de la fonction **T** on montre, sans aucune restriction, des résultats parfaitement analogues à ceux de Nevanlinna. En application on montre l'analogue p-adique du théorème de *Malmquist-Yosida* (cf. [3] et[7]):

<u>Théorème</u> :

Soient $m \in \mathbb{N}$ *et* $R(x,y) \in \mathbb{C}_p(x,y)$. *Si l'équation différentielle:*

$(dy/dx)^m = R(x,y)$

admet une solution méromorphe dans tout $\mathbb{C}_p$ *qui ne soit pas une fraction rationnelle, alors* $R(x,y)$ *est un polynôme en* y *de degré* $\leq 2m$

Je tiens à exprimer ma gratitude aux Professeurs Y. Amice , D. Barsky et J.P. Bézivin pour leur aide et leurs encouragements qui ont été déterminants dans la réalisation de ce travail .

I <u>THEORIE DE NEVANLINNA</u>

Soit $\rho \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ et $D_\rho = \{ x \in \mathbb{C}_p \ / \ v(x) > \rho \}$ où v est la valuation du corps $\mathbb{C}_p$, complété de la clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$. On a ainsi $\mathbb{C}_p = D_{-\infty}$. On note $A(D_\rho)$ (resp. $M(D_\rho)$) l'espace des fonctions analytiques (resp. méromorphes) dans D_ρ. Pour $\varphi \in M(D_\rho)$, $\varphi \neq 0$ et pour $\mu > \rho$, on note :

$$z(\mu,\varphi) = \sum_{v(x)=\mu} \max (0, \mathrm{ord}_x \varphi) \text{ et } p(\mu,\varphi) = -\sum_{v(x)\mu} \min(0, \mathrm{ord}_x \varphi).$$

C'est à dire que $z(\mu,\varphi)$ (resp. $p(\mu,\varphi)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de φ sur le cercle $v(x) = \mu$, chaque zéro (resp. pôle) étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité l'indique .

Dans toute la suite toutes les fonctions $\varphi \in M(D_\rho)$ considérées sont supposées vérifier $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(0) \neq \infty$.

Rappelons que si $f \in A(D_\rho)$ est donnée, pour $x \in D_\rho$, par $f(x) = \sum_{n\geq o} a_n x^n$ et si $\mu > \rho$, on note $v(f,\mu) = \inf_{n\geq 0} (v(a_n)+n\mu)$. Si $\varphi \in M(D_\rho)$ est donnée par $\varphi = f/g$, avec $f,g \in A(D_\rho)$, on écrit $v(\varphi,\mu) = v(f,\mu) - v(g,\mu)$. Le graphe de la fonction $(\mu \longmapsto v(\varphi,\mu))$ est appelé polygone de valuation de la fonction φ.

Pour les différentes propriétés du polygone de valuation voir [1] ou [5] par exemple .

I.1 <u>Formule</u> <u>de</u> <u>Jensen</u>:

<u>Pour</u> $\varphi \in M(D_\rho)$ <u>telle</u> <u>que</u> $\varphi(0) \neq 0$ <u>et</u> $\varphi(\infty) \neq 0$ <u>et</u> <u>pour</u> $\lambda > \rho$, <u>on</u> <u>a</u> : (1.1) $\quad v(\varphi(0)) = v(\varphi,\lambda) + \sum_{\mu\geq\lambda} \{z(\mu,\varphi) - p(\mu,\varphi)\}(\mu-\lambda)$.

La démonstration de cette formule est facile ; elle est conséquence des propriétés du polygone de valuation .■

Pour φ et λ comme précédemment, posons :

(1.2) $\quad m(\lambda,\varphi) = v^+(\frac{1}{\varphi},\lambda) = \max\{v(\frac{1}{\varphi},\lambda),\ 0\}$,

(1.3) $\quad N(\lambda,\varphi) = \sum_{\mu\geq\lambda} p(\mu,\varphi)[\mu-\lambda]$,

(1.4) $\quad T(\lambda,\varphi) = m(\lambda,\varphi) + N(\lambda,\varphi)$.

La fonction $(\lambda \longmapsto T(\lambda,\varphi))$ est appelée *fonction caractéristique* de φ .

Avec ces notations la formule (1.1) devient :

(1.5) $\quad T(\lambda, \frac{1}{\varphi}) = T(\lambda,\varphi) + v(\varphi(0))$.

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in M(D_\rho)$. On suppose que les fonctions φ_i $(1\leq i\leq k)$ ainsi que les fonctions $\varphi_1+\ldots+\varphi_k$ et $\varphi_1\ldots\varphi_k$ n'ont ni zéro ni pôle à l'origine . Par simple vérification on a alors ,pour $\lambda > \rho$:

(1.6) $\quad m(\lambda,\varphi_1\ldots\varphi_k) \leq m(\lambda,\varphi_1) + \ldots + m(\lambda,\varphi_k)$ et

$$m(\lambda,\varphi_1+\ldots+\varphi_k) \leq m(\lambda,\varphi_1) + \ldots + m(\lambda,\varphi_k),$$

(1.7) $\quad N(\lambda,\varphi_1\ldots\varphi_k) \leq N(\lambda,\varphi_1) + \ldots + N(\lambda,\varphi_k)$ et

$$N(\lambda,\varphi_1+\ldots+\varphi_k) \leq N(\lambda,\varphi_1) + \ldots + N(\lambda,\varphi_k).$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre, on obtient:

(1.8) $T(\lambda,\varphi_1\ldots\varphi_k) \le T(\lambda,\varphi_1) + \ldots + T(\lambda,\varphi_k)$ et

$$T(\lambda,\varphi_1+\ldots+\varphi_k) \le T(\lambda,\varphi_1) + \ldots + T(\lambda,\varphi_k) .$$

I.2 <u>Proposition</u> :

<u>Soient</u> $\varphi\in M(D_\rho)$ <u>et</u> $a\in\mathbb{C}p$ <u>tels que</u> $\varphi(0)\neq 0$, $\varphi(0)\neq a$ <u>et</u> $\varphi(0)\neq\infty$. <u>On a</u> :

(1.9) $T(\lambda, a\varphi) = T(\lambda,\varphi) + O(1)$, $\lambda\longrightarrow\rho$, $\lambda>\rho$,

(1.10) $T(\lambda,\varphi - a) = T(\lambda,\varphi) + O(1)$, $\lambda\longrightarrow\rho$, $\lambda>\rho$.

La démonstration se fait en appliquant les formules (1.8) aux fonctions φ et $\psi = a$.■

Comme conséquence immédiate de cette proposition on a :

I.3 <u>Théorème</u> : (*premier théorème fondamental de Nevanlinna*)

<u>Soient</u> $\varphi\in M(D_\rho)$ <u>et</u> $a\in\mathbb{C}p$ <u>tels que</u> $\varphi(0)\neq 0$, $\varphi(0)\neq\infty$ <u>et</u> $\varphi(0)\neq a$. <u>On a</u> :

(1.11) $T(\lambda,\dfrac{1}{\varphi - a}) = T(\lambda,\varphi) + O(1)$, $\lambda\longrightarrow\rho$.

La démonstration découle des formules (1.5) et (1.10).■

I.4 <u>Proposition</u> :

<u>Soit</u> $\varphi \in M(\mathbb{C}p)$ <u>telle que</u> $\varphi(0)\neq 0$ <u>et</u> $\varphi(0)\neq\infty$. <u>On a les équivalences suivantes</u> :

i) φ <u>est une constante</u> $\Longleftrightarrow T(\lambda,\varphi) = o(\lambda)$, $\lambda\longrightarrow\infty$,

ii) $\varphi \in \mathbb{C}p(x)$ $\Longleftrightarrow T(\lambda,\varphi) = O(\lambda)$, $\lambda\longrightarrow -\infty$,

iii) φ <u>est non constante</u> $\Longleftrightarrow$ <u>il existe</u> $c\in\mathbb{R}$ et $A>0$ <u>tels que</u> $T(\lambda,\varphi) \ge -\lambda + c$ <u>pour</u> $\lambda<-A$.

<u>Démonstration</u> :

i) Si $\varphi=a\in\mathbb{C}p^*$, on a $T(\lambda,\varphi)=max\{v(\frac{1}{a}),0\}=o(\lambda)$. Inversement φ n'a aucun pôle , car si x en était un on aurait : $T(\lambda,\varphi)\ge N(\lambda,\varphi)\ge v(x)-\lambda$; d'où, pour $\lambda<0$, $\dfrac{T(\lambda,\varphi)}{\lambda}\le\dfrac{v(x)-\lambda}{\lambda}$ et à la limite $0 \le -1$, ce qui est absurde. D'autre part la relation (1.5) montre que $T(\lambda,\frac{1}{\varphi}) = o(\lambda)$ et le raisonnement précédent appliqué à la fonction $\frac{1}{\varphi}$ montre que φ n'a aucun zéro .

ii) Si $\varphi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x),\ Q(x) \in \mathbb{C}_p(x)$ sont tels que $P(0)\neq 0$ et $Q(0)\neq 0$ et si $k = \deg P$ et $\ell = \deg Q$, on a au voisinage de $-\infty$: $v(P,\lambda) = k\lambda + O(1)$ et $v(Q,\lambda) = \ell\lambda + O(1)$; d'où $v(\frac{1}{\varphi},\lambda) = (\ell-k)\lambda+O(1)$ et :

$$m(\lambda,\varphi) = \begin{cases} O(1) & \text{si } k \le \ell , \\ (\ell-k)\lambda + O(1) & \text{si } k > \ell . \end{cases}$$

D'autre part $N(\lambda,\varphi) = -\ell\lambda + O(1)$. D'où

$$T(\lambda,\varphi) = \begin{cases} -\ell\lambda + O(1) & \text{si } k \le \ell \\ -k\lambda + O(1) & \text{si } k > \ell \end{cases} , \text{ i.e, } T(\lambda,\varphi) = O(\lambda).$$

Inversement si $T(\lambda,\varphi)=O(\lambda)$, il existe $\alpha>0$ tel que $-\alpha\le\frac{T(\lambda,\varphi)}{\lambda} \le 0$, pour $\lambda < 0$. Soit $n(\lambda) = \sum_{\mu\ge\lambda} p(\mu,\varphi)$. On a pour $\lambda < 0$:

$$N(2\lambda,\varphi) = \sum_{\mu\ge 2\lambda} p(\mu,\varphi)[\mu-2\lambda] \ge \sum_{\mu\ge\lambda} p(\mu,\varphi)[\mu-2\lambda]$$
$$\ge -\sum_{\mu\ge\lambda} p(\mu,\varphi)\lambda = - n(\lambda)\lambda \text{ , d'où}$$

$T(2\lambda,\varphi) \ge N(2\lambda,\varphi) \ge -n(\lambda)\lambda \ge 0$ et

$$-2\alpha \le \frac{2T(2\lambda,\varphi)}{2\lambda} \le -n(\lambda) \le 0, \quad \text{i.e,} \quad 0 \le n(\lambda) \le 2\alpha .$$

Comme $n(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ , $n(\lambda)$ a une limite quand $\lambda\longrightarrow -\infty$ et on a $\lim_{\lambda\to-\infty} n(\lambda)\le 2\alpha<+\infty$. Donc φ n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbb{C}_p$. D'autre part par la formule (1.5), on a $T(\lambda, \frac{1}{\varphi}) = O(\lambda)$ et le raisonnement précédent appliqué à la fonction $\frac{1}{\varphi}$ montre que φ n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}_p$. Donc $\varphi \in \mathbb{C}_p(x)$.

iii) Si φ est non constante, φ admet au moins un zéro ou un pôle. Vu la relation (1.5) et quitte à considérer $\frac{1}{\varphi}$, on peut supposer que φ a un pôle $a\neq 0$; d'où $T(\lambda,\varphi)\ge N(\lambda,\varphi)\ge v(a)-\lambda$.

La réciproque est évidente .■

En vue de démontrer d'autres résultats , nous posons , pour $\varphi \in M(D_\rho)$ telle que $\varphi(0)\neq 0$ $\varphi(0)\neq\infty$ et pour $\lambda > \rho$:

$$\bar{p}(\lambda,\varphi) = \sum_{v(x)=\lambda;\ ord_x\varphi<0} 1 \quad \text{et} \quad \bar{N}(\lambda,\varphi)=\sum_{\mu\geq\lambda}\bar{p}(\mu,\varphi)[\mu-\lambda] \ ;$$

donc $\bar{p}(\lambda,\varphi)$ est le nombre de pôles distincts de φ sur le cercle $v(x)=\lambda$.

I.5 Proposition :

Soit $\varphi \in M(\mathbb{C}_p)$ telle que $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(0)\neq\infty$. On a, pour $n\in\mathbb{N}$:

(1.12) $N(\lambda,\varphi^{(n)})=N(\lambda,\varphi)+n\bar{N}(\lambda,\varphi)$,

(1.13) $T(\lambda,\varphi^{(n)})\leq T(\lambda,\varphi)+n\bar{N}(\lambda,\varphi)\leq(n+1)T(\lambda,\varphi)$ pour $\lambda\leq 0$.

Nous avons besoin des lemmes suivants :

I.6 Lemme :

Soit $\varphi = \frac{f}{g}$ où f, $g \in A(\mathbb{C}_p)$ n'ont pas de zéro commun . Posons $F_0 = f$ et $F_n = gF'_{n-1} - ng'F_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On a : *i)* $\varphi^{(n)} = \dfrac{F_n}{g^{n+1}}$,

ii) Tout zéro d'ordre m $(m\geq 1)$ de g est un zéro d'ordre $n(m-1)$ de F_n et un pôle d'ordre $m+n$ de $\varphi^{(n)}$.

La démonstration se fait par récurrence sur n .■

I.7 Lemme :

Soit $\rho < 0$ et $\psi \in M(D_\rho)$ telle que $\psi(0)\neq 0$ et $\psi(0)\neq\infty$. On a pour $0 \geq \lambda > \rho$: $m(\lambda, \frac{\psi'}{\psi}) = 0$.

Démonstration :

Montrons d'abord que, pour $h \in A(D_\rho)$, on a : $v(\frac{h}{h'}, \lambda) \leq \lambda$ pour tout $\lambda > \rho$.

En effet si $h(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on a $h'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, d'où:

$$v(h',\lambda) = \inf_{n\geq 1} \{ v(n) + v(a_n) + (n-1)\lambda \}$$
$$\geq \inf_{n\geq 1} \{ v(a_n) + (n-1)\lambda \}$$
$$\geq -\lambda + \inf_{n\geq 0} \{ v(a_n) + n\lambda \} = -\lambda + v(h,\lambda) .$$

Maintenant si l'on écrit $\psi = \frac{f}{g}$ avec f, g $\in A(D_\rho)$, on a $\frac{\psi}{\psi'} = \frac{(f/f')(g/g')}{(g/g') - (f/f')}$. Donc, $v(\frac{\psi}{\psi'},\lambda) \leq v((f/f'),\lambda) + v((g/g'),\lambda) - \min \{v((f/f'),\lambda);\ v((g/g'),\lambda)\}$ $= \max \{v((f/f'),\lambda)\ ; v((g/g'),\lambda)\} \leq \lambda$. D'où $m(\lambda, \frac{\psi'}{\psi}) = v^+(\frac{\psi}{\psi'} , \lambda) = 0$ pour $0 \geq \lambda > \rho$.■

Démonstration de la proposition (I.5) :

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les pôles de φ dans le disque $v(x)\geq\lambda$, et supposons que chaque x_i est d'ordre m_i $(i=1,\ldots,q)$. Donc d'après le lemme (I.6), les pôles de $\varphi^{(n)}$ dans le disque $v(x)\geq\lambda$ sont $x_1, \ldots, x_q$ et leurs ordres sont respectivement $m_1 + n, \ldots, m_q + n$. D'où : $N(\lambda,\varphi^{(n)}) = (m_1+n)[v(x_1)-\lambda]+\ldots+(m_q+n)[v(x_q)-\lambda]$. Donc

$$N(\lambda,\varphi^{(n)}) = \{ m_1[v(x_1)-\lambda] +\ldots+m_q[v(x_q)-\lambda] \} + $$
$$+ n\{ [v(x_1)-\lambda]+\ldots+[v(x_q)-\lambda] \}$$
$$= N(\lambda,\varphi) + n\bar{N}(\lambda,\varphi) .$$

La relation (1.12) est donc démontrée.

Pour la relation (1.13), on a:

$$T(\lambda,\varphi^{(n)}) = N(\lambda,\varphi^{(n)}) + m(\lambda,\varphi^{(n)})$$
$$= N(\lambda,\varphi)+n\bar{N}(\lambda,\varphi)+m(\lambda,\frac{\varphi^{(n)}}{\varphi^{(n-1)}}\cdots\frac{\varphi'}{\varphi}.\varphi)$$
$$\leq N(\lambda,\varphi)+n\bar{N}(\lambda,\varphi)+m(\lambda,\varphi),$$ en vertu de la relation (1.6) et du lemme (I.7). D'où, $T(\lambda,\varphi^{(n)}) \leq T(\lambda,\varphi)+n\bar{N}(\lambda,\varphi)$.■

I.8 Théorème :

Soit $f\in M(\mathbb{C}_p)$, f non constante. Soient $a_1, \ldots, a_q$ des éléments distincts de $\mathbb{C}_p$ et $\delta\in\mathbb{R}$ tels que $v(a_i-a_j) \leq \delta$ pour

$1 \le i \ne j \le q$. On suppose que $f(0)\ne 0$, $f(0)\ne\infty$ et $f(0)\ne a_i$ pour tout i , $1 \le i \le q$. Posons pour $i = 1,\dots,q$:
$m(\lambda, a_i) = m(\lambda, \frac{1}{f-a_i})$ et $N(\lambda,a_i) = N(\lambda, \frac{1}{f-a_i})$. Posons aussi : $m(\lambda,\infty) = m(\lambda,f)$ et $N(\lambda,\infty) = N(\lambda,f)$. On a :

$$(1.14) \quad m(\lambda,\infty) + \sum_{i=1}^{q} m(\lambda,a_i) \le 2T(\lambda,f) - N_1(\lambda) + S(\lambda) \quad ,$$

où $N_1(\lambda) = 2N(\lambda,\infty) + N(\lambda,1/f') - N(\lambda,f')$ et

$$S(\lambda) = m(\lambda, f'/f) + m(\lambda, \sum_{i=1}^{q} \frac{f'}{f-a_i}) + q\delta^+ + v(f'(0))$$

avec $\delta^+ = max\ (0, \delta)$.

Démonstration :

Soit $g = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f-a_i}$. Montrons que

$$(1.15) \quad m(\lambda,g) \ge \sum_{i=1}^{q} m(\lambda,a_i) - q\delta^+ .$$

Pour ça distinguons deux cas ,

1°) Si $v(f-a_j ,\lambda) > \delta$ pour un certain j . Alors on a pour $i \ne j$: $v(f-a_i ,\lambda) = v(a_i - a_j) \le \delta$ et donc $v(\frac{1}{g} , \lambda) = v(f-a_j ,\lambda)$ et $v^+(\frac{1}{g} ,\lambda) = v^+(f - a_j ,\lambda)$.
Comme $v^+(f-a_i ,\lambda) \le \delta^+$ pour $i \ne j$, il suit que :

$$v^+(\frac{1}{g} ,\lambda) \ge \sum_{i=1}^{q} v^+(f-a_i ,\lambda) -(q-1)\delta^+ \ge \sum_{i=1}^{q} v^+(f- a_i ,\lambda) - q\delta^+ .$$

2°) Si $v(f-a_i ,\lambda) \le \delta$ pour $i \in \{ 1,\dots, q \}$.

On a $v^+(f-a_i ,\lambda) - \delta^+ \le 0$ pour tout i ; d'où

$v^+(\frac{1}{g} ,\lambda)\ge\sum_{=1}^{q} v^+(f-a_i,\lambda)-q\delta^+$. La relation (1.15) est donc démontrée .

D'autre part on a :

$$m(\lambda,g)=m(\lambda, (1/f)(f/f')f'g) \le m(\lambda,1/f)+m(\lambda,f/f') + m(\lambda,f'g)$$

$$=\{T(\lambda,f)-N(\lambda,\frac{1}{f})+v(f(0))\} + \{m(\lambda,\frac{f'}{f})+N(\lambda,\frac{f'}{f})-N(\lambda,\frac{f}{f'})+v(\frac{f'}{f}(0))\}+m(\lambda,f'g) ,$$

en vertu de la relation (1.5) .

Ceci avec la relation (1.15) nous donne :

$$m(\lambda,\infty)+\sum_{i=1}^{q} m(\lambda,a_i)\le m(\lambda,g)+m(\lambda,\infty)+q\delta^{+} \quad \text{et donc,}$$

$$m(\lambda,\infty)+\sum_{i=1}^{q} m(\lambda,a_i)\le T(\lambda,f)-N(\lambda,\frac{1}{f})+N(\lambda,\frac{f'}{f})-N(\lambda,\frac{f}{f'})+m(\lambda,\frac{f'}{f})+$$
$$+m(\lambda,f'g)+v(f'(0))+T(\lambda,f)-N(\lambda,f)+q\delta^{+}$$
$$\le 2T(\lambda,f)-N(\lambda,\frac{1}{f})+N(\lambda,\frac{f'}{f})-N(\lambda,\frac{f}{f'})-N(\lambda,f)+$$
$$+m(\lambda,\frac{f'}{f})+m(\lambda,f'g)+v(f'(0))+q\delta^{+} .$$

Le résultat demandé découle alors du fait que :

$$(1.16)\quad N(\lambda,\frac{f'}{f})-N(\lambda,\frac{f}{f'}) = N(\lambda,\frac{1}{f})-N(\lambda,f)+N(\lambda,f')-N(\lambda,\frac{1}{f'}) .$$

Démontrons cette identité. Il est clair que les pôles de $\frac{f'}{f}$ sont des pôles simples: ce sont les zéros et les pôles de f comptés sans multiplicité .D'où

$$N(\lambda,\frac{f'}{f}) = \bar{N}(\lambda,f) + \bar{N}(\lambda,\frac{1}{f}) \qquad (1)$$

D'autre part, les pôles de $\frac{f}{f'}$ sont les zéros de f' qui ne sont pas des zéros multiples de f. D'où

$$N(\lambda,\frac{f}{f'}) = N(\lambda,\frac{1}{f'}) - \{ N(\lambda,\frac{1}{f}) - \bar{N}(\lambda,\frac{1}{f}) \} \qquad (2)$$

En retranchant (2) de (1) , on a

$N(\lambda,\frac{f'}{f})-N(\lambda,\frac{f}{f'}) = \bar{N}(\lambda,f)+N(\lambda,\frac{1}{f})-N(\lambda,\frac{1}{f'})$. On conclut par la relation (1.12) ■

<u>Remarque</u> :

La quantité $S(\lambda)$ du théorème (I.8) vérifie :

$$(1.17)\quad S(\lambda) = O(1) \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow -\infty .$$

En effet $S(\lambda)=m(\lambda,\frac{f'}{f})+m(\lambda,\frac{F'}{F})+O(1)$, avec $F=(f-a_1)\dots(f-a_q)$, et on conclut en utilisant le lemme (I.7) .■

Nous terminons cette partie en démontrant le deuxième théorème fondamental .

Soit $f \in M(\mathbb{C}_p)$ non constante telle que $f(0)\neq 0$ et $f(0)\neq\infty$. Posons : $m(\lambda,\infty)=m(\lambda,f)$, $N(\lambda,\infty)=N(\lambda,f)$ et, pour $a\in\mathbb{C}_p$ tel que $f(0)\neq a$: $m(\lambda,a)=m(\lambda,\frac{1}{f-a})$, $N(\lambda,a) = N(\lambda,\frac{1}{f-a})$. Avec ces notations la relation (1.11) devient :

$m(\lambda,a) + N(\lambda,a) = T(\lambda,f) + O(1)$.

Posons :

$$\delta(a)= \liminf_{\lambda\longrightarrow-\infty} \frac{m(\lambda,a)}{T(\lambda,f)} = 1-\limsup_{\lambda\longrightarrow-\infty} \frac{N(\lambda,a)}{T(\lambda,f)} = \lim_{\mu\to-\infty}\left\{\inf_{\lambda\leq\mu} \frac{m(\lambda,a)}{T(\lambda,f)}\right\}$$

$$\Theta(a)=1-\limsup_{\lambda\longrightarrow-\infty} \frac{\bar{N}(\lambda,a)}{T(\lambda,f)} =1- \lim_{\mu\to-\infty}\left\{ \sup_{\lambda\leq\mu} \frac{\bar{N}(\lambda,a)}{T(\lambda,f)} \right\},$$

$$\theta(a)= \liminf_{\lambda\longrightarrow-\infty} \frac{N(\lambda,a)-\bar{N}(\lambda,a)}{T(\lambda,f)} = \lim_{\mu\to-\infty}\left\{ \inf_{\lambda\leq\mu} \frac{N(\lambda,a)-\bar{N}(\lambda,a)}{T(\lambda,f)} \right\}.$$

Pour $\varepsilon>0$ et λ suffisament proche de $-\infty$, on a :

$N(\lambda,a)-\bar{N}(\lambda,a)>(\theta(a)-\varepsilon)T(\lambda,f)$, $\quad N(\lambda,a)<(1-\delta(a)+\varepsilon)T(\lambda,f)$,

d'où : $\bar{N}(\lambda,a)<(1-\delta(a)-\theta(a)+2\varepsilon)T(\lambda,f)$ et $\Theta(a)\geq\delta(a)+\theta(a)$.

La quantité $\delta(a)$ est appelée le *défaut* de a . $\theta(a)$ est appelée l'*indice de multiplicité* de a .

I.9 Théorème : (*deuxième théorème fondamental de Nevanlinna*)

Soit $f \in M(\mathbb{C}_p)$, f non constante . Alors l'ensemble des valeurs $a \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ pour lesquelles $\Theta(a) > 0$ est au plus dénombrable et on a :

(1.18) $$\sum_a \{ \delta(a)+\theta(a)\} \leq \sum_a \Theta(a) \leq 2 .$$

Démonstration :

En ajoutant $N(\lambda,\infty) + \sum_{i=1}^{q} N(\lambda,a_i)$ aux deux membres de l'inégalité (1.14) du théorème (I.8) , on a :

$(q+1)T(\lambda,f)+O(1)\leq 2T(\lambda,f)-N_1(\lambda)+S(\lambda)+N(\lambda,\infty)+ \sum_{i=1}^{q} N(\lambda,a_i)$, d'où

$(q-1)T(\lambda,f)+O(1)\leq -N(\lambda,\infty)-N(\lambda,\frac{1}{f'})+N(\lambda,f')+S(\lambda)+ \sum_{i=}^{q}N(\lambda,a_i)$.

Comme $N(\lambda,f')= N(\lambda,f)+\bar{N}(\lambda,f)$ (Prop.(I.5)) , il vient que :

$$(q-1)\mathbf{T}(\lambda,f)+O(1)\leq \bar{N}(\lambda,f)+ \sum_{i=1}^{q} N(\lambda,a_i)- N(\lambda,\tfrac{1}{f'})+ S(\lambda).$$

Remarquant que tout zéro de $f-a_i$ d'ordre m est un zéro de f' d'ordre m-1 , on déduit que :

$$\sum_{i=1}^{q} N(\lambda,a_i) - N(\lambda,\tfrac{1}{f'}) = \sum_{i=1}^{q} \bar{N}(\lambda,a_i)-N_o(\lambda,\tfrac{1}{f'}) ,$$

où $N_o(\lambda,\frac{1}{f'})$ est obtenu à partir de $N(\lambda,\frac{1}{f'})$ en omettant les termes correspondant aux zéros de f' qui sont des zéros de $f-a_i$ pour $i=1, 2,\dots, q$. Il suit que :

$$(q-1)\mathbf{T}(\lambda,f)+O(1)\leq\bar{N}(\lambda,f)+ \sum_{i=}^{q}\bar{N}(\lambda,a_i)-N_o(\lambda,\tfrac{1}{f'})+ S(\lambda)$$ et donc ,

$$(q-1)\mathbf{T}(\lambda,f) +O(1) \leq \bar{N}(\lambda,f)+ \sum_{i=1}^{q} \bar{N}(\lambda,a_i) + S(\lambda) .$$

Sachant ,d'après la remarque au théorème (I.8), que $S(\lambda)=O(1)$ quand $\lambda\longrightarrow-\infty$, et utilisant le *iii)* de la proposition (I.4) on obtient en divisant par $\mathbf{T}(\lambda,f)$ et en passant à la limite :

$$\limsup_{\lambda\longrightarrow-\infty} \frac{\bar{N}(\lambda,\infty)}{\mathbf{T}(\lambda,f)} + \sum_{i=1}^{q} \limsup_{\lambda\longrightarrow-\infty} (\bar{N}(\lambda,a_i)/ \mathbf{T}(\lambda,a_i)) \geq q-1 \text{ , d'où}$$

$$1-\Theta(\infty)+ \sum_{i=1}^{q} \{1-\Theta(a_i)\} \geq q-1 \text{ , i.e , } \Theta(\infty)+ \sum_{i=1}^{q} \Theta(a_i) \leq 2 .$$

Ceci montre que $\Theta(a) > \frac{1}{N}$ pour au plus 2N-1 valeurs finies distinctes a. Si l'ensemble des valeurs a telles que $\Theta(a)>0$ est fini, le théorème est démontré , sinon les valeurs a pour lesquelles $\Theta(a)>0$ peuvent être rangées en une suite :

$$a_1 , a_2 ,\dots,a_{i_1},a_{i_1+1} ,\dots,a_{i_n},\dots$$

de sorte que la suite des $\Theta(a_i)$ soit décroissante et que pour $j\leq i_n$, on ait $\Theta(a_j)\geq \frac{1}{n}$. En posant $a_0=\infty$, on déduit, pour la suite $(a_i)_{i\geq0}$, que $\sum_{i=0}^{q} \Theta(a_i) \leq 2$ pour tout q . D'où : $\sum_{i=0}^{\infty} \Theta(a_i) \leq 2$.■

Remarque :

L'inégalité çi-dessus est la meilleure possible . En effet on montre que pour tout ε, $0<\varepsilon<2$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in M(\mathbb{C}_p)$ pour laquelle $\sum_a \Theta(a) > \varepsilon$. Car pour $0<\varepsilon<2$, il existe $n=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ tel que $\varepsilon<1+\frac{n-1}{n}$ et si l'on considère alors la fonction $f_\varepsilon(x)=(x-1)^n$, on a au voisinage de $-\infty$:

$m(\lambda,\infty)=m(\lambda,f)=-n\lambda$, $N(\lambda,\infty)=\bar{N}(\lambda,\infty)=N(\lambda,f)=0$. D'où $\mathbf{T}(\lambda,f)=-n\lambda$, $\Theta(\infty)=1$ et $\Theta(0)=\frac{n-1}{n}$. Il en résulte que :

$\sum_a \Theta(a) \geq \Theta(0)+\Theta(\infty) = 1+\frac{n-1}{n} > \varepsilon$.

2 THEOREME DE MALMQUIST-YOSIDA .

En vue de faire une application des résultats précédents à l'étude des équations différentielles p-adiques , nous commençons par démontrer le théorème suivant dû dans le cas complêxe à *Valiron* [6].

Si $P(x,y)\in\mathbb{C}_p[x,y]$, $P(x,y)\not\equiv 0$, on note $\deg_y P(x,y)$ le degré de $P(x,y)$ en y . Si $R(x,y)\in\mathbb{C}_p(x,y)$, on écrit $R(x,y)=P(x,y)/Q(x,y)$, où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont deux éléments étrangers de $\mathbb{C}_p[x,y]$; on appelle alors degré de $R(x,y)$ en y le nombre $\deg_y R(x,y)=\max\{\deg_y P(x,y),\deg_y Q(x,y)\}$

II.1 Théorème : (*Valiron*)

Soit $R(x,y)\in\mathbb{C}_p(x,y)$, $R(x,y)$ irréductible de degré ℓ en y . Soit $\varphi \in M(\mathbb{C}_p)$. On Suppose que les fonctions $\varphi(x)$ et $R(x,\varphi(x))$ n'ont ni zéro ni pôle à l'origine . On a :

(2.1) $\mathbf{T}(\lambda, R(x,\varphi(x)) = \ell\, \mathbf{T}(\lambda,\varphi) + O(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow -\infty$.

Démonstration :

La démonstration est relativement longue ; nous allons la faire en deux étapes .

I) Considérons le cas particulier où $R(x,y)\in\mathbb{C}_p[x,y]$. On a alors: $R(x,y)=R_0(x)+\ldots+R_\ell(x)y^\ell$; avec $R_0(x),\ldots,R_\ell(x)\in\mathbb{C}_p[x]$ et $R_\ell(x)\neq 0$. Donc $R(x,\varphi(x))=R_0(x)+\ldots+R_\ell(x)(\varphi(x))^\ell$; d'où:

(2.2) $N(\lambda,R(x,\varphi(x))-\ell N(\lambda,\varphi)=O(\lambda)$, $\lambda\longrightarrow -\infty$.

Il existe $\delta>0$ tel que, pour tous les polynômes $R_i(x)$ non identiquement nuls (en particulier pour $R_\ell(x)$), on ait :

(2.3) $v(R_i,\lambda) < \delta$, dès que λ est assez proche de $-\infty$.

D'autre part soit $d = max\{\deg(R_0),\ldots, \deg(R_\ell)\}$. Il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $i\in \{0,\ldots,\ell\}$, on ait:

(2.4) $v(R_i,\lambda)\geq A+d\lambda$, dès que λ est assez proche de $-\infty$.

Pour λ assez proche de $-\infty$ distinguons deux cas .

<u>Premier</u> <u>cas</u> : $v(\varphi,\lambda)\leq(d+1)\lambda$.

Alors $v^+(\frac{1}{\varphi},\lambda)=v(\frac{1}{\varphi},\lambda)\geq-(d+1)\lambda$. D'autre part les relations (2.3) et (2.4) entraînent dans ce cas que:

$v(R(x,\varphi),\lambda)=v(R_\ell,\lambda)+\ell v(\varphi,\lambda)$; d'où :

$v^+(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda)=-v(R_\ell,\lambda)+\ell v^+(\frac{1}{\varphi},\lambda)$, i.e ,

$$-\delta < m(\lambda,R(x,\varphi))-\ell m(\lambda,\varphi) = -v(R_\ell,\lambda) \leq -A-d\lambda \qquad (1)$$

<u>Deuxième</u> <u>cas</u> : $v(\varphi,\lambda)>(d+1)\lambda$.

On a alors $v^+(\frac{1}{\varphi},\lambda)<-(d+1)\lambda$, i.e., $m(\lambda,\varphi)<-(d+1)\lambda$. On a aussi: $v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda) \leq -\inf_i \{v(R_i,\lambda)+iv(\varphi,\lambda)\}$

$$=\sup_i \{-v(R_i,\lambda)+iv(\frac{1}{\varphi},\lambda)\}\leq-A-d\lambda-\ell(d+1)\lambda,$$

i.e., $m(\lambda,R(x,\varphi))\leq-A-d\lambda-\ell(d+1)\lambda$. D'où:

$$-\ell(d+1)\lambda < m(\lambda,R(x,\varphi))-\ell m(\lambda,\varphi) \leq -A-d\lambda-\ell(d+1)\lambda \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) montrent que :

(2.5) $m(\lambda,R(x,\varphi))-\ell m(\lambda,\varphi)=O(\lambda)$, $\lambda \longrightarrow -\infty$.

L'addition des relations (2.2) et (2.5) donne la relation (2.1) dans ce cas particulier .

II) Supposons maintenant que $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont deux éléments de $\mathbb{C}_p[x,y]$ premiers entre eux. Quitte à remplaçer $R(x,y)$ par $\frac{1}{R(x,y)}$ on peut supposer que $\deg_y P(x,y) \le \deg_y(Q(x,y))$. On écrit alors:

$P(x,y)=P_0(x)+\ldots+P_k(x)y^k$, $Q(x,y)=Q_0(x)+\ldots+Q_\ell(x)y^\ell$; où $P_0(x),\ldots, P_k(x)$, $Q_0(x),\ldots, Q_\ell(x)\in \mathbb{C}_p[x]$ et $P_k(x)\not\equiv 0$, $Q_\ell(x)\not\equiv 0$.

On suppose enfin que $P_0(x),\ldots,P_k(x)$, $Q_0(x),\ldots,Q_\ell(x)$ ne s'annulent pas tous à la fois. Montrons que :

(2.6) $\quad T(\lambda,R(x,\varphi)) = T(\lambda, \frac{1}{Q(x,\varphi)}) + O(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow -\infty$.

$P(x,y)$ et $Q(x,y)$ étant premiers entre eux, il éxiste deux éléments:

$U(x,y)=U_0(x)+\ldots+U_r(x)y^r$ et $V(x,y)=V_0(x)+\ldots+V_s(x)y^s$ de $\mathbb{C}_p[x,y]$ avec $U_r(x)\not\equiv 0$ et $V_s(x)\not\equiv 0$ et un élément $S(x)\in\mathbb{C}_p[x]$, $S(x)\not\equiv 0$ tels que :

(2.7) $\quad U(x,y)P(x,y)+V(x,y)Q(x,y)=S(x)$.

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble composé des éléments $P_0(x),\ldots,P_k(x)$, $Q_0(x),\ldots,Q_\ell(x)$, $U_0(x),\ldots,U_r(x)$, $V_0(x),\ldots,V_s(x)$, et $S(x)$. Il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $W(x)\in\mathbb{E}$, $W(x)\not\equiv 0$ (en particulier pour $P_k(x)$, $Q_\ell(x)$, $U_r(x)$, $V_s(x)$ et $S(x)$), on ait :

(2.8) $\quad v(W,\lambda) < \delta$, dès que λ est assez proche de $-\infty$.

Soit $d = max\ \{\deg(W)\ /\ W\in\mathbb{E}\}$. Il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que, pour $W\in\mathbb{E}$, on ait :

(2.9) $\quad v(W,\lambda)\ge A+d\lambda$, dès que λ est assez proche de $-\infty$.

Pour λ assez proche de $-\infty$, on distingue les cas suivants:

<u>Premier cas</u> : $v(\varphi,\lambda)\le(d+1)\lambda$.

On a alors d'après le premier cas de la partie I) :

$$(2.10)\quad \begin{cases} v(P(x,\varphi),\lambda)=v(P_k,\lambda)+kv(\varphi,\lambda), \\ v(Q(x,\varphi),\lambda)=v(Q_\ell,\lambda)+\ell v(\varphi,\lambda). \end{cases}$$

D'où, $v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda)=v(Q_{\ell},\lambda)-v(P_{k},\lambda)+(\ell-k)v(\varphi,\lambda)$
$\leq\delta-A-d\lambda+(\ell-k)(d+1)\lambda$, et par suite , $m(\lambda,R(x,\varphi))\leq\delta-A-d\lambda+(\ell-k)(d+1)\lambda$. Comme $v(Q_{\ell},\lambda)<\delta$, on a en vertu de la relation (2.10), $v(Q(x,\varphi),\lambda)<\delta+\ell(d+1)\lambda$; d'où $m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})<\delta+\ell(d+1)\lambda$. Donc :

$$-\delta-\ell(d+1)\lambda<m(\lambda,R(x,\varphi))-m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})\leq\delta-A-d\lambda+(\ell-k)(d+1)\lambda, \quad (3)$$

Si $v(\varphi,\lambda)>(d+1)\lambda$, on a d'après le deuxième cas de la partie I)

$$(2.11)\begin{cases} v(P(x,\varphi),\lambda)\geq A+d\lambda+k(d+1)\lambda, & v(Q(x,\varphi),\lambda)\geq A+d\lambda+\ell(d+1)\lambda,\\ v(U(x,\varphi),\lambda)\geq A+d\lambda+r(d+1)\lambda, & v(V(x,\varphi),\lambda)\geq A+d\lambda+s(d+1)\lambda.\end{cases}$$

<u>Deuxième cas</u>: $v(\varphi,\lambda)>(d+1)\lambda$ et $v(Q(x,\varphi),\lambda)\leq\delta-A-d\lambda-s(d+1)\lambda$. On a alors $m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})\leq\delta-A-d\lambda-s(d+1)\lambda$. D'autre part on a en vertu de (2.11), $v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda)=v(Q(x,\varphi),\lambda)-v(P(x,\varphi),\lambda)$
$\leq\delta-2A-2d\lambda-(s+k)(d+1)\lambda$, et donc,

$$-\delta+A+d\lambda+s(d+1)\lambda\leq m(\lambda,R(x,\varphi))-m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})$$
$$\leq\delta-2A-2d\lambda-(s+k)(d+1)\lambda, \quad (4)$$

<u>Troisième cas</u> : $v(\varphi,\lambda)>(d+1)\lambda$ et $v(Q(x,\varphi),\lambda)>\delta-A-d\lambda-s(d+1)\lambda$.

$$v(V(x,\varphi)Q(x,\varphi),\lambda)=v(V(x,\varphi),\lambda)+v(Q(x,\varphi),\lambda)$$
$$>A+d\lambda+s(d+1)\lambda+\delta-A-d\lambda-s(d+1)\lambda=\delta \quad \text{(cf. (2.11))}.$$

Ceci avec les relations (2.7) et (2.8) nous donne : $v(S,\lambda)=v(U(x,\varphi),\lambda)+v(P(x,\varphi),\lambda)$, d'où, par (2.8) et (2.11):

$$A+d\lambda+k(d+1)\lambda\leq v(P(x,\varphi),\lambda)=v(S,\lambda)-v(U(x,\varphi),\lambda)$$
$$<\delta-A-d\lambda-r(d+1)\lambda, \quad (5).$$

D'autre part ,dans ce cas , on a aussi:

$$m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})=v^{+}(Q(x,\varphi),\lambda)=v(Q(x,\varphi),\lambda) \quad (6).$$

On a $v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda)-v(Q(x,\varphi),\lambda) = v(\frac{1}{P(x,\varphi)},\lambda)$, d'où, $\max\{v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda)-v(Q(x,\varphi),\lambda),\ 0\} = m(\lambda,P(x,\varphi))$ et donc,

$max\{v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda), v(Q(x,\varphi),\lambda)\}-m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})=m(\lambda,P(x,\varphi))$ (7).

Comme $v(Q(x,\varphi),\lambda)>0$ pour λ au voisinage de $-\infty$, on a aussi:

$max\{v(\frac{1}{R(x,\varphi)}, 0) \leq max\{v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda), v(Q(x,\varphi),\lambda)\}$, i.e,

$m(\lambda,R(x,\varphi))\leq max\{v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda), v(Q(x,\varphi),\lambda)\}$ (8).

De (7) et (8), on a :

$m(\lambda,R(x,\varphi))-m(\lambda, \frac{1}{Q(x,\varphi)}) \leq m(\lambda,P(x,\varphi))$ (9).

De (6) et du fait que $v(\frac{1}{R(x,\varphi)},\lambda) \leq m(\lambda,R(x,\varphi))$, on a:

$-v(P(x,\varphi),\lambda) \leq m(\lambda,R(x,\varphi))-m(\lambda, \frac{1}{Q(x,\varphi)})$ (10).

Des relations (5), (9), et (10), on voit que:

$$-\delta+A+d\lambda+h(d+1)\lambda < m(\lambda,R(x,\varphi))-m(\lambda, \frac{1}{Q(x,\varphi)}) \leq -A-d\lambda-k(d+1)\lambda \quad (11).$$

Maintenant les relations (3), (4) et (11) montrent que :

(2.12) $m(\lambda,R(x,\varphi))-m(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})=O(\lambda)$, $\lambda\longrightarrow -\infty$.

D'autre part il est clair que les pôles de $R(x,\varphi)$ proviennent des pôles de φ qui sont des zéros de $Q_\ell(x)$ et des zéros de $Q(x,\varphi)$ qui ne sont pas des zéros de $P(x,\varphi)$. Or, $P(x,\varphi)$ et $Q(x,\varphi)$ étant premiers entre eux , leurs zéros communs sont en nombre fini . On a donc :

(2.13) $N(\lambda,R(x,\varphi))-N(\lambda,\frac{1}{Q(x,\varphi)})=O(\lambda)$, $\lambda\longrightarrow -\infty$.

Maintenant la relation (2.6) découle des relations (2.12) et (2.13) . Enfin la relation (1.5) permet de se ramener à la situation traitée dans la première partie et de conclure ■

II.2 Théorème :

Soient $R(x,y)$, $R_1(x,y)\in\mathbb{C}_p(x,y)$ irréductibles et de degrés respectifs d et d_1 en y . Si l'équation différentielle :

(2.14) $R(x, (d^ny)/(dx^n))=R_1(x,y)$

admet au moins une solution $y(x)\in M(\mathbb{C}_p)$ telle que $y(x)\notin\mathbb{C}_p(x)$, alors on a $(n+1)d \geq d_1$.

Démonstration :

De $T(\lambda, R(x, y^{(n)})) = T(\lambda, R_1(x, y))$, on a par le théorème (II.1): $dT(\lambda, y^{(n)}) = d_1 T(\lambda, y) + O(\lambda)$. Par la proposition (I.5), Il en résulte que : $d(n+1)T(\lambda, y) \geq d_1 T(\lambda, y) + O(\lambda)$; d'où : $d(n+1) \geq d_1 + \frac{O(\lambda)}{T(\lambda, y)}$. On conclut en utilisant le *ii*) de la proposition (I.4) .■

II.3 Théorème : (*Yosida*)

Si l'équation différentielle

(2.15) $\quad (\frac{dy}{dx})^m = R_1(x, y)$, $\quad m \in \mathbb{N}^*$,

admet au moins une solution $y(x) \in M(\mathbb{C}p)$ telle que $y(x) \notin \mathbb{C}p(x)$, alors $R_1(x, y)$ est un polynôme en y de degré$\leq 2m$.

Démonstration :

Posons $\quad R_0(x, y) = \dfrac{A_0(x) + \ldots + A_k(x) y^k}{B_0(x) + \ldots + B_\ell(x) y^\ell}$, où les $A_i(x)$ et les $B_j(x)$ sont des éléments de $\mathbb{C}p[x]$ tels que $A_k(x) \not\equiv 0$ et $B_\ell(x) \not\equiv 0$. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}p$ tel que le polynôme $A_0(x) + \alpha A_1(x) + \ldots + \alpha^k A_k(x)$ ne soit pas identiquement nul. Considérons le changement de variable $z = \frac{1}{y - \alpha}$. L'équation (2.15) devient

(2.16) $\quad (\frac{dz}{dx})^m = R_2(x, z)$,

où $\quad R_2(x, z) = (-1)^m . \dfrac{C_0(x) z^{2m} + C_1(x) z^{2m-1} + \ldots + C_k(x) z^{2m-k}}{D_0(x) + D_1(x) z^{-1} + \ldots D_\ell(x) z^{-\ell}}$

avec $C_0(x) = A_0(x) + \alpha A_1(x) + \ldots + \alpha^k A_k(x) \not\equiv 0$.

Premier cas : si $k - 2m \geq \ell$. On a:

$$R_2(x, z) = (-1)^m \frac{C_0(x) z^k + C_1(x) z^{k-1} + \ldots + C_k(x)}{D_0(x) z^{k-2m} + D_1(x) z^{k-2m-1} + \ldots D_\ell(x) z^{k-2m-\ell}} .$$

Donc $\deg_z R_2(x, z) = k$; et on a, en appliquant le théorème

(II.2) à l'équation (2.16) : $2m \geq k$ et donc $\ell=0$.

<u>Deuxième cas</u> : si $k-2m < \ell$. On a:

$$R(x,z)=(-1)^m \frac{C_0(x)z^{2m+\ell}+C_1(x)z^{2m+\ell-1}+\dots+C_k(x)z^{2m+\ell-k}}{D_0(x)z^{\ell}+D_1(x)z^{\ell-1}+\dots+D_\ell(x)} .$$

Donc $\deg_z R_2(x,z) = 2m+\ell$; d'où , par le théorème (II.2) , $2m \geq 2m+\ell$ et donc $\ell=0$ et $k < 2m$.■

II.4 <u>Corollaire</u> : (*Malmquist*)

<u>Si l'equation différentielle</u>

(2.17) $\frac{dy}{dx} = R(x,y)$, $R(x,y) \in \mathbb{C}_p(x)$,

<u>admet une solution</u> $y(x) \in M(\mathbb{C}_p)$, $y(x) \notin \mathbb{C}_p(x)$, <u>alors c'est une équation de Riccati</u> .

<u>Démonstration</u> :

C'est le cas particulier où m=1 du théoreme II.3 . ■

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> :

[1] Amice, Y., *Les nombres p-adiques* ,Paris, P.U.F.,1975

[2] Hà Huy Khoai , *On p-adic meromorphic functions* , Duke Math.J., vol. 50, n° 3, 695-711, (1983).

[3] Malmquist, J., *Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre* , Acta Math. 36, 297-343, (1913)

[4] Nevanlinna, R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* , Paris , 1929

[5] Robba, P., *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n° 10, 109-218, (1973), (Paris Soc. Math. Fr.)

[6] Valiron , G., *Sur la dérivée des fonctions algébroides*, Bull. Soc. Math. de France n° 49, 17-39, (1931). [7] Yosida , K., *A generalization of Malmquist's theorem* , Japan J. Math. 9, 253-256, (1932)

Abdelbaki BOUTABAA,
Institut de Mathématiques,
U.S.T.H.B.,
B. P. n° 09, Dar el Beida,
Alger, ALGERIE.

(Reçu le 4 avril 1989)