## Werk

**Titel:** Modules des differentielles en caracteristique p.

**Autor:** André, Michel

**Jahr:** 1988

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0062|log36

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

manuscripta math. 62, 477 - 502 (1988)

manuscripta mathematica


# MODULES DES DIFFERENTIELLES EN CARACTERISTIQUE p.

Michel André

For a Nagata ring A , the module of absolute differentials is flat if and only if the morphism from $A^p$ into A is flat with a so-called elementary fibre. For the proof strong modules and basic rings are defined and studied. A complete local ring is basic and produces strong modules in a natural way.

Avec un anneau noethérien local A contenant un corps, on considère le module $\Omega_A$ des différentielles absolues. On sait (N. Radu) que dans le cas de caractéristique 0 , le A-module $\Omega_A$ est plat si et seulement si A est régulier. On va étudier le cas de caractéristique p . S'il s'agit d'un anneau de Nagata, on a le résultat suivant : le A-module $\Omega_A$ est plat si et seulement si l'homomorphisme de $A^p$ dans A est plat avec une fibre aussi élémentaire que possible. Dans le cas d'un anneau réduit, on sait (E. Kunz) qu'il ne peut s'agir que d'un anneau régulier. Mais d'autres cas sont possibles, le nombre minimal de générateurs du noyau de l'homomorphisme de Frobenius de A étant alors égal à la deuxième déviation de A .

Comme toujours dans ce genre de question, on va s'appuyer sur une bonne connaissance du cas particulier, où A est régulier et complet. Classiquement on présente $A^p$ comme une intersection d'anneaux intermédiaires proches de A . Dans ce travail, on préfère présenter A comme une réunion d'anneaux intermédiaires proches de $A^p$ . Cela conduit à l'étude des modules dits forts qui sont en général de type infini, tout en se comportant comme des modules de type fini.

## I. Modules forts

L'anneau A est noethérien. On généralise la notion de modules de type fini de la manière suivante.

DEFINITION 1 : Un A-module X est dit fort si pour tout sous-module de type fini F il existe un sous-module de type fini G contenant F et donnant un quotient plat X/G.

Voici le moyen de vérifier qu'un module est fort.

LEMME 2 : Un A-module X est fort s'il possède un ensemble E de sous-modules de type fini avec la propriété suivante : pour tout sous-module de type fini T et pour tout élément U de E , il existe un élément V de E avec V contenant U + T et avec V/U projectif.

En effet, si l'élément U de E est fixé, la famille des éléments V de E avec U dans V et avec V/U projectif est filtrante avec X comme réunion. Mais alors le quotient

$$X/U \overset{\sim}{=} (\varinjlim V) \,/\, U \overset{\sim}{=} \varinjlim (V/U)$$

est plat. Comme les sous-modules U sont suffisamment nombreux, le module X est fort.

Parmi tous les ensembles E du lemme, il en existe un qui est maximal ; il est décrit dans la remarque suivante.

REMARQUE 3 : Avec un A-module X , on peut considérer l'ensemble E de tous les sous-modules de type fini $X_e$ à quotient plat $X/X_e$ . Mais alors le A-module X est fort si et seulement si la famille des sous-modules $X_e$ est filtrante et a X comme réunion. Avec une inclusion $X_e \subset X_f$ , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X_f/X_e \longrightarrow X/X_e \longrightarrow X/X_f \longrightarrow 0 \ .$$

Mais alors $X_f/X_e$ est plat, donc projectif, vu son type fini. Dans le cas d'un module fort, l'ensemble E a donc la propriété du lemme. En outre, l'injection d'un sous-module $X_e$ , dans un sous-module T de type fini, est toujours fendue. Pour le voir, on agrandit T en un sous-module $X_f$ .

Rappelons qu'un sous-module pur H du A-module X donne par définition un monomorphisme de $H \otimes_A W$ dans $X \otimes_A W$ pour tout A-module W .

DEFINITION 4 : Un A-module X est dit quasi-fort si pour tout sous-module de type fini F il existe un sous-module pur de type fini H contenant F . Un A-module fort X est quasi-fort puisque les sous-modules $X_e$ sont purs. Une A-algèbre B et un B-module quasi-fort X donnent un A-module quasi-fort X , si le A-module B est de type fini.

Les modules forts sont assez stables, comme le montrent les quelques résultats suivants.

LEMME 5 : Si dans une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ , le module X est de type fini et le module Y est fort, alors le module Z est fort.

Avec un sous-module F de type fini de Z , on peut trouver un sous-module G de type fini de Y contenant l'image inverse de F et donnant un quotient plat Y/G . Mais alors l'image directe H de G est un sous-module de type fini de Z contenant F et donnant le même quotient plat Z/H .

LEMME 6 : Si dans une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ , le module Y est fort et le module Z est de type fini, alors le module X est fort.

On transforme l'extension en question par un épimorphisme $F \longrightarrow Z$ de noyau G avec F libre de rang fini :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0 .$$

On utilise l'extension suivante pour démontrer que M est fort (voir la proposition suivante) :

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0 .$$

Mais on a aussi une extension

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

qui permet de conclure par le lemme précédent.

PROPOSITION 7 : Si dans une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ , les modules X et Z sont forts, alors le module Y est fort.

Soit F un sous-module de type fini de Y . Son image directe est contenue dans un sous-module G de type fini de Z donnant un quotient plat Z/G . Sans perdre le type fini, on peut agrandir F de manière à avoir exactement G comme image directe. L'image inverse de F est contenue dans un sous-module H de type fini de X donnant un quotient plat X/H . Sans perdre le type fini de F et sans modifier l'image directe de F , on peut agrandir F de manière à avoir exactement H comme image inverse. On a alors non seulement la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

mais encore la suite exacte

$$0 \longrightarrow X/H \longrightarrow Y/F \longrightarrow Z/G \longrightarrow 0 .$$

Comme $X/H$ et $Z/G$ sont plats, le quotient $Y/F$ est plat (après avoir agrandi $F$ deux fois). Le module $Y$ est donc fort.

REMARQUE 8 : Un $A$-module fort $X$ est plat si et seulement si un des sous-modules $X_e$ est plat, autrement dit projectif. Dans ce cas, tous les sous-modules $X_e$ sont projectifs. Un $A$-module libre est plat et fort.

LEMME 9 : Un $A$-module $X$ est fort si et seulement s'il existe une une suite exacte $0 \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ , où $W$ est de type fini et où $Y$ est plat et fort.

La condition est nécessaire : on choisit $W$ égal à $X_e$ et le quotient plat $Y$ est fort d'après le lemme 5. La condition est suffisante selon la proposition 7.

Dans le cas local et complet, on peut utiliser le théorème de Chevalley : une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0 ,$$

où $W$ est de type fini et où $Y$ est plat, est fendue (voir [7] proposition 8.2).

COROLLAIRE 10 : Pour un anneau local complet, un module fort est la somme directe d'un module de type fini et d'un module plat et fort.

Si $H$ est un sous-module pur de $X$ et si $K$ est un sous-module pur de $Y$ , alors $H \otimes_A K$ est un sous-module pur de $X \otimes_A Y$ , donnant lieu à une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \otimes (Y/K) \longrightarrow (X \otimes Y)/(H \otimes K) \longrightarrow (X/H) \otimes Y \longrightarrow 0 .$$

Cette remarque démontre les deux résultats suivants.

LEMME 11 : Le produit tensoriel de deux modules quasi-forts est un module quasi-fort.

LEMME 12 : Le produit tensoriel de deux modules plats et forts est un module plat et fort.

En outre le changement de base se fait de manière satisfaisante.

LEMME 13 : Un $A$-module fort (respectivement quasi-fort) $X$ et une $A$-algèbre noethérienne $B$ donnent un $B$-module fort (respectivement quasi-fort) $X \otimes_A B$ .

C'est clair, grâce aux sous-modules $X_e \otimes_A B$ du $B$-module $X \otimes_A B$ ,

selon le lemme 2 (respectivement la définition 4).

Abordons maintenant le cas local (l'anneau $A$ est local d'idéal maximal $M$ ou $M_A$ et de corps résiduel $L$ ou $L_A$ ). Rappelons qu'un $A$-module $X$ est idéalement séparé (respectivement absolument séparé) si le $A$-module $X \otimes_A W$ est séparé (pour la topologie $M$-adique) quel que soit l'idéal $W$ (respectivement le module de type fini $W$) : voir [5] paragraphe 5, définition 1 (respectivement exercice 1).

LEMME 14 : Dans le cas local, un module quasi-fort est absolument séparé.

Un module quasi-fort $X$ et un module de type fini $W$ donnent un module quasi-fort $X \otimes_A W$ . Il suffit donc de démontrer que $X$ quasi-fort est séparé. On utilise alors les carrés commutatifs dus aux sous-modules purs $H$ de type fini :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & \Pi_{k\geq 1} \; H/M^k H \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & \Pi_{k\geq 1} \; X/M^k X \; . \end{array}$$

L'homomorphisme $f$ est injectif, vu le type fini de $H$ . L'homomorphisme $g$ est injectif, vu la pureté de $H$ . On laisse alors $H$ varier, pour constater que l'homomorphisme $h$ est injectif.

COROLLAIRE 15 : Pour une $A$-algèbre locale noethérienne $B$ , le $B$-module $X_1 \otimes_A \ldots \otimes_A X_n \otimes_A B$ est absolument séparé si les $A$-modules $X_i$ sont quasi-forts.

Prenons note aussi d'une généralisation du lemme de Nakayama.

LEMME 16 : Dans le cas local, un sous-module $Y$ d'un module fort $X$ , donnant un quotient $Y/MY$ de type fini est lui-même de type fini.

Soit $W$ un sous-module de type fini de $Y$ donnant un isomorphisme de $W/MW$ sur $Y/MY$ . On va démontrer que le quotient $Y/W$ est nul. On remarque que $X/W$ est aussi un module fort (lemme 5). On est donc ramené au cas $Y = MY$ . Mais alors non seulement $X$ est séparé, mais encore $Y$ est séparé. Par conséquent l'égalité $Y = MY$ n'est possible qu'avec $Y$ nul.

Enfin rappelons les résultats classiques pour les modules idéalement séparés, donnés ici pour les modules quasi-forts.

LEMME 17 : Dans le cas d'un anneau local $A$ , le $A$-module quasi-fort $X$ est plat si et seulement si les $A/M^k$-modules $X/M^kX$ sont plats.

Voir [12] théorème 22.3.

LEMME 18 : Dans le cas d'un anneau local $A$ , le $\hat{A}$-module quasi-fort $X$ est plat sur $\hat{A}$ si et seulement s'il est plat sur $A$ .

On remarque l'isomorphisme des modules $X/M^kX$ et $X/\hat{M}^kX$ et on applique deux fois le lemme précédent, le module $X$ étant idéalement séparé non seulement sur $\hat{A}$ , mais encore sur $A$ .

Supposons maintenant l'anneau noethérien $A$ (local ou non) de caractéristique $p$ .

DEFINITION 19 : L'anneau $A$ est dit basique s'il possède un ensemble $F$ de sous-algèbres de type fini sur $A^p$ avec la propriété suivante : pour toute sous-algèbre $Q$ de type fini sur $A^p$ et pour tout élément $R$ de $F$ , il existe un élément $S$ de $F$ avec $S$ contenant $R$ et $Q$ et avec une $p$-base de $S$ sur $R$ .

On a une première relation immédiate entre les anneaux basiques et les modules forts et quasi-forts. On verra plus loin une seconde relation au moyen des modules des différentielles.

REMARQUE 20 : Soient $A$ un anneau basique et $R$ un élément de l'ensemble $F$ de la définition. Alors le $R$-module $A$ est plat et fort (grâce aux sous-modules que sont les éléments $S$ de $F$ contenant $R$) et le $A^p$-module $A$ est quasi-fort (par restriction de l'anneau de base ou encore grâce aux sous-modules que sont les éléments $S$ de $F$). Le $A^p$-module $A$ est plat si et seulement si le $A^p$-module $R$ est projectif (un sous-module pur d'un module plat est toujours plat). Le $A^p$-module $A$ est alors fort.

Les anneaux basiques sont assez stables, comme le montre le résultat suivant.

REMARQUE 21 : Soient $A$ un anneau basique, puis $C$ une sous-algèbre de type fini de la $A^p$-algèbre $A$ , enfin $D$ une algèbre sur $C$ donnant un anneau noethérien $A \otimes_C D$ . Supposons avoir une algèbre de type fini par l'homomorphisme suivant

$$f : A \otimes_C D \longrightarrow D \ , \quad f(x \otimes y) = x^p \cdot y^p \ .$$

Considérons l'anneau $B = A \otimes_C D$ et remarquons que l'image de l'homomorphisme canonique de $D$ dans $B$ est une sous-algèbre de type fini de la $B^p$-algèbre $B$. Pour un élément $R$ de $F$ contenant $C$, on a un $R$-module plat $A/R$, donc un monomorphisme

$$R \otimes_C D \longrightarrow A \otimes_C D = B .$$

Comme la $D$-algèbre $R \otimes_C D$ est de type fini, son image dans $B$ est une $B^p$-algèbre de type fini. En outre, si on a une inclusion $R \subset S$ avec une p-base pour deux éléments de $F$, on a une inclusion avec une p-base

$$R \otimes_C D \subset S \otimes_C D \quad \text{dans} \quad A \otimes_C D = B .$$

L'anneau $B$ est basique par conséquent.

LEMME 22 : Une algèbre essentiellement de type fini sur un anneau basique est un anneau basique.

Il suffit de traiter les trois cas particuliers suivants de $A$-algèbre $B$. Si $B$ est égal à $A/aA$, on utilise la remarque précédente comme suit :

$$C = A^p(a) \quad \text{et} \quad D = C/aC .$$

Si $B$ est égal à $A[x]$, on utilise la remarque précédente comme suit:

$$C = A^p \quad \text{et} \quad D = A^p[x].$$

Si $B$ est égal à $S^{-1}A$, on diminue l'ensemble multiplicativement clos $S$ sans changer $S^{-1}A$, de manière à avoir $S$ dans $A^p$ et on utilise la remarque précédente comme suit :

$$C = A^p \quad \text{et} \quad D = S^{-1}A^p .$$

Le lemme est démontré.

On va démontrer le théorème suivant. Grâce au lemme précédent, il suffit de traiter le cas d'un anneau régulier. C'est le sujet du chapitre suivant.

THEOREME 23 : Un anneau noethérien de caractéristique $p$, supposé local et complet, est un anneau basique.

## II. L'anneau $L[[t]]$

Considérons une extension de corps $K \subset L$ de caractéristique $p$ avec $L^p \subset K$, puis $m$ variables $t_1, \ldots, t_m$ (en bref $t$), enfin

l'algèbre suivante

$$A = K[[t]] \subset B = L[[t]] \text{ avec } B^p \subset A .$$

Si $c$ est une série formelle (élément de $A$, de $B$, etc.), on note $\overline{c}$ l'élément $c(0)$ correspondant.

DEFINITION 24 : Les $n$ éléments $b_1,\ldots,b_n$ de $B$ sont dits parfaitement p-indépendants sur $A$, si les $n$ éléments $\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_n$ de $L$ sont p-indépendants sur $K$. On verra que la p-indépendance parfaite implique la p-indépendance ordinaire.

REMARQUE 25 : Appelons $I$ l'ensemble des exposants à utiliser pour décrire $A$ ou $B$

$$i = (i_1,\ldots,i_m) \quad \text{avec } i_k \text{ entier positif ou nul.}$$

Si $c$ est une série formelle, on l'explicitera toujours de la manière suivante

$$c = \sum c_i t^i \text{ avec } t^i = t_1^{i_1}\ldots t_m^{i_m} \text{ pour } i \text{ de } I .$$

On va utiliser l'addition usuelle de $I$ (composante par composante) et en outre l'ordre lexicographique dans le sens suivant : $i < j$ avec $i \neq j$ signifie que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite

a) $i_1 +\ldots+ i_m < j_1 + \ldots + j_m$ ,

b) $i_1 +\ldots+ i_m = j_1 + \ldots + j_m$ et il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant m$ avec $i_k < j_k$ et $i_\ell = j_\ell$ pour $\ell > k$ .

Les ensembles ordonnés $I$ et $\mathbb{N}$ sont isomorphes, par un isomorphisme qui ne respecte pas l'addition, sauf si $m$ vaut 1. Pour $k$ fixé dans $I$, les propriétés $i<j$ et $i+k<j+k$ sont équivalentes. Par conséquent si $j-i$ existe, on a toujours $i \leqslant j$ . Mais en général ($m \neq 1$) la réciproque est fausse. Lorsque $j-i$ existe, on dit que $i$ annonce $j$ .

LEMME 26 : Il n'existe pas de suite infinie $i(n)$ dans $I$ avec $i(k)$ n'annonçant pas $i(\ell)$ pour toutes les paires d'entiers $0<k<\ell$ .

On fait la démonstration par induction sur $m$, en écrivant $i$ sous la forme $(i^*,i_m)$ . Supposons non bornée la suite des entiers $i_m(n)$ . Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer strictement croissante la suite des entiers $i_m(n)$ . Pour cette sous-suite $i^*(k)$ n'annonce pas $i^*(\ell)$ pour $k<\ell$ . Vu l'hypothèse d'induction, cette sous-suite $i^*(n)$ n'existe pas. Par conséquent la suite des entiers $i_m(n)$ est bornée. Plus généralement et pour les même raisons, la sui-

te des entiers $i_h(n)$ est bornée pour $1 \leqslant h \leqslant m$ . Il existe donc une paire d'entiers $k<\ell$ avec $i(k)$ et $i(\ell)$ égaux. Mais alors $i(k)$ annonce $i(\ell)$ , ce qui est une contradiction.

Si $R$ est un anneau de caractéristique $p$ , on dénote par $R\{n\}$ le sous-module du $R$-module $R[x_1, \ldots, x_n]$ constitué des polynômes du type suivant

$$\rho(x) = \sum_{0 \leqslant k_1 \leqslant p-1, \ldots, 0 \leqslant k_n \leqslant p-1} \rho_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} ,$$

autrement dit, des polynômes à utiliser pour exprimer la p-indépendance sur $R$ de $n$ éléments. Dans le cas particulier $R = A$ , chaque coefficient est une série formelle

$$\rho_{k_1 \ldots k_n} = \sum \rho_{k_1 \ldots k_n, i} t^i \quad \text{avec} \quad \rho_{k_1 \ldots k_n, i} \in K .$$

On peut alors considérer l'élément de $K\{n\}$

$$\kappa_i(x) = \sum \rho_{k_1 \ldots k_n, i} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

et présenter $\rho(x)$ sous la forme d'une série formelle à coefficients dans $K\{n\}$ et réciproquement

$$\rho(x) = \sum \kappa_i(x) t^i \quad \text{avec } i \text{ parcourant } I ,$$

puisque le nombre des monômes à utiliser $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ est fini.

LEMME 27 : La p-indépendance parfaite implique la p-indépendance ordinaire.

Soit $\rho(x) \neq 0$ dans $A\{n\}$ . Considérons le plus petit exposant $i$ avec $\kappa_i(x) \neq 0$ dans $K\{n\}$ . Si les $n$ éléments $b_1, \ldots, b_n$ de $B$ annulent $\rho(x)$ , alors les $n$ éléments $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ de $L$ annulent $\kappa_i(x)$ . Par conséquent $n$ éléments parfaitement p-indépendants sont p-indépendants.

THEOREME 28 : Soient $u$ un élément de $B$ et $b_1, \ldots, b_n$ un nombre fini d'éléments de $B$ parfaitement p-indépendants sur $A$ . Alors il existe un nombre fini d'éléments $c_1, \ldots, c_s$ de $B$ tels que les $n+s$ éléments $b_1, \ldots, c_s$ de $B$ soient parfaitement p-indépendants sur $A$ et engendrent une sous-algèbre de la $A$-algèbre $B$ contenant l'elément $u$ .

Avec les éléments $u$ et $b_j$ (l'élément $\bar{b}_j$ sera noté $\beta_j$) il s'agit de trouver des éléments $c_k$ (l'élément $\bar{c}_k$ sera noté $\gamma_k$) et

un élément de $A\{n+s\}$

$$\rho(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s) = \sum \kappa_i(x_1,\ldots,y_s)t^i$$

donnant une égalité dans $B$

$$\rho(b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_s) = u \ .$$

On va procéder à une construction par induction avec l'exposant $i$ croissant dans $I$ .

Soit $\mu$ dans $I$ et appelons $\nu$ son successeur. Supposons avoir l'égalité dans $B$ concernant $u$ jusqu'à l'ordre $\mu$ inclus. On veut modifier $\rho$ et modifier $c_1,\ldots,c_s$ et éventuellement introduire un nouvel élément $d$ de $B$ (l'élément $\overline{d}$ sera noté $\delta$ ) et introduire une nouvelle variable $z$ , de manière à avoir l'égalité dans $B$ concernant $u$ jusqu'à l'ordre $\nu$ inclus. En fait pour ne pas avoir à faire, lorsque $\mu$ grandit, une infinité de fois l'introduction d'un nouvel élément $d$ et d'une nouvelle variable $z$ , on est plus précis pour passer de $\mu$ à $\nu$ et dans l'hypothèse et dans la conclusion, dans le sens de la remarque suivante.

REMARQUE 29 : On va utiliser la situation intermédiaire $S_\mu$ décrite comme suit. Le théorème est démontré partiellement dans le sens suivant :

a) les éléments $\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ de $L$ sont p-indépendants sur $K$ ,

b) l'égalité $\rho(b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_s) = u$ a lieu jusqu'à l'ordre $\mu$ inclus,

c) on dispose en outre de $s$ éléments $i_1 < \ldots < i_s$ de $I$ , majorés par $\mu$ , ne s'annonçant pas les uns les autres et précisant que la différence

$$\rho(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s) - t^{i_\ell} y_\ell$$

ne concerne que les variables $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{\ell-1}$ jusqu'à l'ordre $i_\ell$ inclus, pour $1 \leqslant \ell \leqslant s$ .

Il s'agit d'obtenir la situation $S_\nu$ à partir de la situation $S_\mu$ . Selon celle-ci, il existe un élément $\eta$ de $L$ donnant une égalité jusqu'à l'ordre $\nu$ inclus

$$u = \rho(b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_s) + \eta t^\nu \ .$$

Il faut distinguer trois cas en fonction de $\eta$ .

Premier cas : L'élément $\eta$ appartient au sous-corps $K(\beta_1,\ldots,\gamma_s)$ de $L$ . Il existe donc $\kappa(x_1,\ldots,y_s)$ dans $K\{n+s\}$ avec une égalité

$$\eta = \kappa(\beta_1,\ldots,\gamma_s) .$$

On considère alors les éléments modifiés suivants, sans introduire un nouvel élément $d$ et une nouvelle variable $z$ :

$$\rho^*(x_1,\ldots,y_s) = \rho(x_1,\ldots,y_s) + t^\nu\kappa(x_1,\ldots,y_s)$$

$$c_1^* = c_1,\ldots,c_s^* = c_s\ ,\ i_1^* = i_1,\ldots,i_s^* = i_s\ .$$

On a alors les trois propriétés nécessaires pour avoir une situation nouvelle $S_\nu$ .

Deuxième cas : L'élément $\eta$ n'appartient pas au sous-corps $K(\beta_1,\ldots,\gamma_s)$ de $L$ et au moins un des éléments $i_\ell$ annonce $\nu$ . Choisissons le premier d'entre eux $i_\lambda$ et souvenons-nous que $\nu-i_\lambda$ existe dans $I$ . On considère alors les éléments modifiés suivants, sans introduire un nouvel élément $d$ et une nouvelle variable $z$ :

$$\rho^*(x_1,\ldots,y_s) = \rho(x_1,\ldots,y_s), i_1^* = i_1,\ldots,i_s^* = i_s\ ,$$

$$c_1^* = c_1,\ldots,c_\lambda^* = c_\lambda + \eta t^{\nu-i_\lambda},\ldots,c_s^* = c_s\ .$$

On vérifie alors les trois propriétés nécessaires pour avoir une situation $S_\nu$ . Pour vérifier la première propriété, on remarque l'égalité

$$\gamma_\lambda^* = \gamma_\lambda \quad \text{grâce à} \quad \nu-i_\lambda > 0\ ,$$

l'égalité $\nu = i_\lambda$ est exclue, car $\mu$ majore $i_\lambda$ . Pour vérifier la deuxième propriété de $S_\nu$ , grâce à la troisième propriété de $S_\mu$ pour $\ell = \lambda$ , on démontre qu'il existe une égalité

$$\rho(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_\lambda+\Delta,\ldots,y_s)-\rho(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)$$
$$= \Delta[t^{i_\lambda} + \textstyle\sum_{i>i_\lambda}\omega_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s,\Delta)t^i]\ ,$$

avec $\omega_i$ bien choisi dans $K\{n+s+1\}$ . Mais alors on a l'égalité

$$\rho^*(b_1,\ldots,c_s^*) = \rho(b_1,\ldots,c_s) + \eta t^\nu = u$$

jusqu'à l'ordre $\mu$ inclus.

Troisième cas : L'élément $\eta$ n'appartient pas au sous-corps $K(\beta_1,\ldots,\gamma_s)$ de $L$ et aucun des éléments $i_\ell$ n'annonce $\nu$ . On introduit alors un nouvel élément $d$ avec $\overline{d} = \delta$ égal à $\eta$ (par

exemple $d = \eta$ ) et une nouvelle variable $z$ . On considère ensuite les éléments modifiés ou nouveaux suivants

$$\rho^*(x_1,\ldots,y_s,z) = \rho(x_1,\ldots,y_s) + t^\nu z$$

$$c_1^* = c_1,\ldots,c_s^* = c_s \text{ et en outre } c_{s+1}^* = d$$

$$i_1^* = i_1,\ldots,i_s^* = i_s \text{ et en outre } i_{s+1}^* = \nu .$$

On vérifie alors les trois propriétés nécessaires pour avoir une situation $S_\nu$ . Les $n+s+1$ éléments $\beta_1,\ldots,\gamma_s,\delta$ sont bien p-indépendants sur $K$ , ce qui constitue la nouvelle première propriété. On a l'égalité

$$\rho^*(b_1,\ldots,c_s^*,d) = \rho(b_1,\ldots,c_s)+ \eta t^\nu = u$$

jusqu'à l'ordre $\nu$ inclus, ce qui constitue la nouvelle deuxième propriété. Enfin non seulement l'égalité jusqu'à l'ordre $\mu$ inclus

$$\rho^*(x_1,\ldots,y_s,z)-t^{i_\ell}y_\ell = \rho(x_1,\ldots,y_s)-t^{i_\ell}y_\ell$$

démontre que seules les variables $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots y_{\ell-1}$ interviennent dans la première différence jusqu'à l'ordre $i_\ell$ inclus, mais encore la différence

$$\rho^*(x_1,\ldots,y_s,z)-t^\nu z = \rho(x_1,\ldots,y_s)$$

ne fait pas intervenir $z$ , donc à plus forte raison jusqu'à l'ordre $\nu$ inclus, ce qui constitue la nouvelle troisième propriété.

REMARQUE 30 : Pour exprimer les trois propriétés de la situation $S_\mu$ , il suffit de connaître

$$\rho(x_1,\ldots,y_s) = \sum \kappa_i(x_1,\ldots y_s)t^i$$

pour les exposants $i$ avec $i\leqslant\mu$ et de connaître

$$c_\ell = \sum c_{\ell,i}\, t^i \quad \text{avec} \quad c_{\ell,i} \in L$$

pour les exposants $i$ avec $i+i_\ell \leqslant \mu$ . Le passage de $\mu$ a $\nu$ modifie éventuellement $\rho$ pour le seul exposant $\nu$ et $c_\ell$ pour le seul exposant $\nu-i_\ell$ s'il existe. Par ailleurs, le troisième cas (le seul où le nombre $s$ est modifié) ne se présente qu'un nombre fini de fois lorsque $\mu$ varie. Sinon on obtiendrait une suite infinie $i_1,i_2,\ldots$ d'éléments de $I$ ne s'annonçant pas les uns les autres, ce que le lemme 26 interdit.

Démontrons le théorème 28 de manière inductive.

DEMONSTRATION 31 : La démonstration commence avec la situation

$$s = 0 \ , \ \rho = 0 \ , \ \eta = \overline{u} \ .$$

Si $\eta$ appartient à $K(\beta_1,\ldots,\beta_s)$ , le premier cas s'applique pour obtenir la situation $S_0$ et si $\eta$ n'y appartient pas, le troisième cas s'applique. Puis on fait le passage de $S_\mu$ à $S_\nu$ avec $\mu$ croissant et enfin on passe à la limite. Après un nombre fini de pas, le nombre $s$ est fixé définitivement, sans qu'on le sache en général, et les éléments $i_1<\ldots<i_s$ de $I$ aussi. Une fois la situation $S_j$ atteinte, l'élément $\rho$ est fixé définitivement jusqu'à l'ordre $j$ inclus et l'élément $c_\ell$ aussi (et même un peu plus en fonction de $i_\ell$ ). Mais alors l'élément

$$\rho(b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_s) \in B$$

est lui aussi fixé définitivement jusqu'à l'ordre $j$ inclus et redonne $u$ jusqu'à l'ordre $j$ inclus. Le théorème est démontré.

REMARQUE 32 : Dans le cas d'une seule variable ($m=1$) , si on a $s$ éléments $i_1<\ldots<i_s$ ne s'annonçant pas les uns les autres, c'est que $s$ vaut 0 ou 1 . Par conséquent le troisième cas du passage de $S_\mu$ à $S_\nu$ se présente en tout au plus une fois. On peut donc ajouter la remarque suivante dans l'énoncé du théorème : $s\leqslant 1$ si $n=1$ .

On sait que le cas particulier suivant du théorème 23 démontre le théorème 23.

PROPOSITION 33 : L'anneau $L[[t]]$ est basique.

On applique le théorème 28 avec $K = L^p$ dans diverses circonstances. On a trois anneaux emboîtés :

$$B^p = L^p[[t^p]] \subset A = L^p[[t]] \subset B = L[[t]] \ .$$

On va appliquer la définition 19 avec l'ensemble $F$ suivant : une sous-algèbre $R$ de la $A$-algèbre $B$ appartient à $F$ si elle est engendrée par un nombre fini d'éléments $b_1,\ldots,b_n$ de $B$ parfaitement $p$-indépendants sur $A$ . Il est clair que $R$ est aussi une $B^p$-algèbre $B$ de type fini. Il suffit de contrôler la propriété de la définition 19 dans le cas particulier où $Q$ est une $A$-algèbre monogène (de générateur $u$ ). On applique alors le théorème 28 et la sous-algèbre $S$ de la $A$-algèbre $B$ engendrée par $b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_s$ permet ce contrôle.

REMARQUE 34 : L'élément général R de l'ensemble F utilisé dans la démonstration précédente a en outre la propriété suivante. La $B^p$-algèbre R possède une p-base, à savoir

$$t_1,\ldots, t_m, b_1,\ldots,b_n .$$

L'anneau L[[t]] est bien connu maintenant. En particulier le $L^p[[t^p]]$-module L[[t]] est fort.

## III. Modules des différentielles

On va s'intéresser au module des différentielles absolues d'un anneau noethérien A de caractéristique p

$$\Omega_A \overset{\sim}{=} H_0(A^p,A,A) \overset{\sim}{=} H_0(K,A,A)$$

avec K désignant le corps à p éléments. On a un premier résultat qui complète la remarque 20.

PROPOSITION 35 : Pour un anneau basique A , le A-module $\Omega_A$ est fort.

Considérons la situation $A^p \subset R \subset S \subset A$ de la définition 19. On a alors une suite exacte de A-modules de type fini, avec un module libre à droite,

$$0 \longrightarrow H_0(A^p,R,A) \longrightarrow H_0(A^p,S,A) \longrightarrow H_0(R,S,A) \longrightarrow 0 .$$

Avec R fixé, si on laisse S varier, à la limite on a une suite exacte avec un module plat à droite

$$0 \longrightarrow H_0(A^p,R,A) \longrightarrow H_0(A^p,A,A) \longrightarrow H_0(R,A,A) \longrightarrow 0 .$$

Mais alors si R varie dans F , les images de ces monomorphismes forment un ensemble E de sous-modules du A-module $H_0(A^p,A,A)$ permettant de conclure.

REMARQUE 36 : Pour $k \neq 0$ , l'anneau basique A donne des A-modules de type fini $H_k(K,A,A)$ . Cela n'est pas démontré ici, puisque cela se voit directement dans le cas qui nous intéresse : l'anneau est basique, parce que local et complet (voir [1] proposition 12 du supplément).

Dorénavant tous les anneaux sont locaux. Pour un anneau A , on note M ou $M_A$ l'idéal maximal et L ou $L_A$ le corps résiduel. On s'intéresse aux anneaux X compris entre $A^p$ et A . Les anneaux X et A ont le même spectre. Une injection de X dans Y est tou-

jours un homomorphisme local, donc un homomorphisme fidèlement plat s'il est plat. Prenons note d'une situation simple importante pour la suite.

DEFINITION 37 : Il existe un corps C compris entre $A^p$ et A faisant de A une C-algèbre de type fini si et seulement si $M_{Ap} = M_A^{[p]}$ est nul. Dans ce cas, le corps C est contenu dans un relèvement du corps résiduel de A . En outre il existe une p-base de A sur C si et seulement si on a l'égalité $h = p^e$ pour la longueur h de A et pour la dimension de plongement e de A . Dans ce cas, l'anneau A est une intersection complète. Un anneau artinien avec les égalités suivantes est dit élémentaire

$$M^{[p]} = 0 \quad \text{et} \quad h = p^e .$$

Si on a un homomorphisme plat entre anneaux artiniens

$$A \longrightarrow B \quad \text{avec} \quad M_B = BM_A ,$$

alors A est élémentaire si et seulement si B l'est.

Plus généralement on a le résultat suivant (voir [8] théorème 15.8).

LEMME 38 : Soit une triple inclusion d'anneaux $A^p \subset X \subset Y \subset A$ avec X et Y de type fini sur $A^p$ . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) l'anneau Y possède une p-base sur l'anneau X ,

b) le Y-module $H_0(X,Y,Y)$ est libre,

c) le X-module Y est libre et l'anneau artinien $Y/YM_X$ est élémentaire.

Si le Y-module A est plat, on peut présenter la deuxième condition comme suit :

d) le A-module $H_0(X,Y,A)$ est libre,

et si en outre $M_A$ est égal à $AM_Y$ , on peut présenter la troisième condition comme suit :

e) le X-module Y est libre et l'anneau artinien $A/AM_X$ est élémentaire.

L'équivalence éventuelle des conditions b et d est due à un argument de fidèle platitude et celle des conditions c et e découle de la fin de la définition 37. L'équivalence des conditions a et b est bien connue (voir [8] proposition 6.18). Enfin la condi-

tion a est équivalente à la suivante : le $X$-module $Y$ est libre et l'anneau $Y/YM_X$ a une p-base sur l'anneau $X/M_X$ . Il reste donc à obtenir l'équivalence des conditions a et c dans le cas où $X$ est un corps, équivalence établie précédemment (voir la définition 37).

Le lemme précédent permet de compléter la définition d'un anneau basique (local) dans le sens suivant : parmi tous les ensembles $F$ possibles pour la définition 19, il en existe un maximal.

DEFINITION 39 : Un sous-anneau $X$ de l'anneau basique $A$ est dit spécial s'il s'agit d'une $A^p$-algèbre de type fini donnant une suite exacte avec un $A$-module plat à droite

$$0 \longrightarrow H_0(A^p,X,A) \longrightarrow H_0(A^p,A,A) \longrightarrow H_0(X,A,A) \longrightarrow 0 .$$

Compte tenu de la seconde suite exacte de la démonstration de la proposition 35 et du résultat suivant, il est clair que les sous-anneaux spéciaux de l'anneau basique $A$ forment le plus grand ensemble $F$ possible pour la définition 19.

LEMME 40 : Un anneau basique est plat sur tous ses sous-anneaux spéciaux et toute inclusion de sous-anneaux spéciaux possède une p-base.

Une inclusion $X \subset Y$ de sous-anneaux spéciaux donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_0(A^p,X,A) \longrightarrow H_0(A^p,Y,A) \longrightarrow H_0(X,Y,A) \longrightarrow 0 ,$$

où le $A$-module de droite est plat puisqu'il s'agit aussi du noyau de l'homomorphisme de $H_0(X,A,A)$ sur $H_0(Y,A,A)$ . Si $Y$ est un élément de l'ensemble $F$ de la définition 19, le $Y$-module $A$ est plat d'après la remarque 20 et donc $Y$ a une p-base sur $X$ d'après le lemme 38. Mais alors le $X$-module $A$ est plat, ce qui démontre la première partie du lemme. On sait maintenant que le $Y$-module $A$ est toujours plat et par conséquent $Y$ a toujours une p-base sur $X$ , pour toute inclusion de sous-anneaux spéciaux.

Le résultat suivant concerne en particulier les anneaux complets et sera généralisé plus loin. Dorénavant on utilisera la notation suivante

$$F(A) = A/AM_A^p = A/(m_1^p,\ldots,m_e^p)$$

si les éléments $m_i$ engendrent $M_A$ .

PROPOSITION 41 : Pour un anneau basique $A$ , le $A$-module $\Omega_A$ est

plat si et seulement si d'une part, le $A^p$-module A est plat et d'autre part, l'anneau artinien F(A) est élémentaire.

On sait que le A-module $H_0(A^p,A,A)$ est fort, grâce aux sous-modules $H_0(A^p,Y,A)$ et que le $A^p$-module A est quasi-fort, grâce aux sous-modules Y , en utilisant tous les sous-anneaux spéciaux Y de A . On fixe Y assez grand pour avoir $M_A$ égal à $AM_Y$ et on applique les remarques 8 et 20 : le A-module $H_0(A^p,A,A)$ est plat si et seulement si le A-module $H_0(A^p,Y,A)$ est plat et le $A^p$-module A est plat si et seulement si le $A^p$-module Y est plat. On applique le lemme 38 avec X égal à $A^p$ ; l'équivalence des conditions d et e démontre la proposition.

Avant de généraliser rappelons ce qui se passe en caractéristique nulle.

REMARQUE 42 : Si l'anneau A contient le corps Q des rationnels, alors $\Omega_A$ est plat si et seulement si A est régulier. En effet, si l'anneau A est régulier, l'homomorphisme de Q dans A est régulier et donne donc un A-module plat $\Omega_A$ (voir [1] théorème 30 du supplément). La réciproque est due à N. Radu (voir [1] proposition 31 du chapitre 7).

Revenons à la caractéristique p .

DEFINITION 43 : Il existe un homomorphisme surjectif d'anneaux.

$$g(A) : (A^p)\hat{} \longrightarrow (\hat{A})^p$$

défini de la manière suivante. L'homomorphisme de Frobenius de $\hat{A}$ prolonge l'homomorphisme de Frobenius de A . Comme le second passe au travers de $A^p$ , le premier passe au travers de $(A^p)\hat{}$. Puisqu'on a une surjection de $\hat{A}$ sur $(A^p)\hat{}$ , l'image de $(A^p)\hat{}$ dans $\hat{A}$ est exactement $(\hat{A})^p$ . Lorsque g(A) est un isomorphisme, on écrit $\hat{A}^p$ pour noter l'anneau concerné. Si l'homomorphisme de $A^p$ dans A est plat, alors l'homomorphisme de $(A^p)\hat{}$ dans $\hat{A}$ est plat, donc injectif et par conséquent g(A) aussi. Avec un $A^p$-module plat A , on a un isomorphisme g(A) .

On aura besoin de deux résultats concernant les anneaux de Nagata (les fibres formelles sont géométriquement réduites) et les anneaux pseudo-excellents (les fibres formelles sont des intersections complètes géométriquement réduites). Un anneau quasi-excellent est pseudo-

excellent et un anneau de Nagata, quotient d'un anneau régulier, est aussi pseudo-excellent (voir [3] lemme 6).

LEMME 44 : L'homomorphisme $g(A)$ est un isomorphisme si $A$ est un anneau de Nagata.

Voir la démonstration 49.

LEMME 45 : L'anneau $A$ est pseudo-excellent si et seulement si d'une part, le module $H_1(A,\hat{A},\hat{A})$ est nul et d'autre part, le module $H_0(A,\hat{A},\hat{A})$ est plat sur $A$ et presque plat sur $\hat{A}$ .

Un module presque plat est un quotient d'un module plat par un sous-module plat. Le lemme est un cas particulier du théorème 2 de [3].

On a le résultat final suivant (voir la proposition 41 pour le cas complet).

THEOREME 46 : Pour un anneau de Nagata $A$ (local, de caractéristique $p$ ) le $A$-module $\Omega_A$ est plat si et seulement si d'une part, le $A^p$-module $A$ est plat et d'autre part, l'anneau artinien $F(A)$ est élémentaire. Dans ce cas, l'anneau $A$ est pseudo-excellent.

On remarque que les anneaux artiniens $F(A)$ et $F(\hat{A})$ sont isomorphes. Les trois conditions suivantes sont équivalentes d'après le lemme 44, la proposition 41 et le théorème 22.4 de [12] :

a) le $A^p$-module $A$ est plat avec $F(A)$ élémentaire,

b) le $\hat{A}^p$-module $\hat{A}$ est plat avec $F(\hat{A})$ élémentaire,

c) le $\hat{A}$-module $H_0(K,\hat{A},\hat{A})$ est plat.

Si le $A$-module $H_0(K,A,A)$ est plat, le module suivant est toujours plat sur l'anneau suivant

$$H_0(K,A,A/M^k) \cong H_0(K,\hat{A},\hat{A}/\hat{M}^k) \ , \ A/M^k \cong \hat{A}/\hat{M}^k \ .$$

Comme $H_0(K,\hat{A},\hat{A})$ est un $\hat{A}$-module fort, il est idéalement séparé. Par conséquent il s'agit d'un module plat. La condition du théorème est donc nécessaire. Si la condition a est satisfaite, l'anneau $F(A)$ est une intersection complète et on applique la proposition 58 pour savoir $A$ pseudo-excellent. La suite exacte de $\hat{A}$-modules

$$H_1(A,\hat{A},\hat{A}) \longrightarrow H_0(K,A,\hat{A}) \longrightarrow H_0(K,\hat{A},\hat{A}) \longrightarrow H_0(A,\hat{A},\hat{A}) \longrightarrow 0$$

a donc par le lemme 45 un module nul à gauche et un module presque plat à droite. Donc la condition c démontre que le $\hat{A}$-module $H_0(K,A,\hat{A})$ est plat, autrement dit que le $A$-module $H_0(K,A,A)$ est

plat. La condition du théorème est donc suffisante. Remarquons qu'il est possible de simplifier un peu la démonstration de la proposition 58, si on la restreint aux circonstances du théorème.

Il s'agit maintenant de démontrer le lemme 44, en partant de la définition suivante, aussi utilisée par la suite.

DEFINITION 47 : Avec un A-module W on a un A-module $\overline{W}$ défini de la manière suivante : les groupes abéliens W et $\overline{W}$ sont égaux et a opère sur w dans $\overline{W}$, comme $a^p$ opère sur w dans W. Autrement dit, on a un dihomomorphisme

$$(Fr,Id):(A,\overline{W}) \longrightarrow (A,W)$$

pour l'homomorphisme de Frobenius.

Considérons maintenant l'homomorphisme suivant de groupes abéliens

$$\ell(W)=Id \otimes Fr:\overline{W} \otimes_A \hat{A} \longrightarrow W \otimes_A \hat{A}$$

dont le noyau est noté E(W). Il s'agit d'un foncteur covariant E de la catégorie des A-modules dans la catégorie des groupes abéliens.

LEMME 48 : Le foncteur E est nul si et seulement si A est un anneau de Nagata.

Le foncteur E est exact à gauche et commute avec les limites directes filtrantes. Il est donc nul si et seulement si on a pour chaque idéal premier P de A la condition

$$E(H)=0 \quad \text{avec} \quad H=A_P/PA_P .$$

Comme E(W) est le même pour un A/P-module W et pour le A-module W qui en découle, on est amené à considérer le cas particulier où A est intègre et où W = H en est le corps des fractions et à démontrer que E(H) est nul si et seulement si l'anneau $H^{1/p} \otimes_A \hat{A}$ est réduit. Utilisons maintenant l'homomorphisme de groupes abéliens

$$h = Fr \otimes Id : H \otimes_A \hat{A} \longrightarrow \overline{H} \otimes_A \hat{A}$$

qui est injectif comme l'homomorphisme de Frobenius du corps H. Mais alors E(H) est le noyau de l'homomorphisme composé $h \circ \ell(H)$ qui est égal à l'homomorphisme de Frobenius de l'anneau $\overline{H} \otimes_A \hat{A}$. Par conséquent l'anneau

$$\overline{H} \otimes_A \hat{A} \cong H^{1/p} \otimes_A \hat{A}$$

est réduit si et seulement si $E(H)$ est nul.

DEMONSTRATION 49 : On dispose du monomorphisme naturel de A-modules $j:A^p \longrightarrow \bar{A}$ . L'homomorphisme composé

$$\ell(A)\circ(j\otimes Id) : A^p \otimes_A \hat{A} \longrightarrow A \otimes_A \hat{A}$$

donne l'homomorphisme naturel du complété de $A^p$ dans le complété de A . Par conséquent $g(A)$ est injectif si $\ell(A)$ est injectif. Par le lemme 48, on a donc bien un isomorphisme $g(A)$ pour un anneau de Nagata A . Le lemme 44 est démontré.

Avant de quitter les modules des différentielles, redémontrons de manière rapide quelques résultats connus (voir [2] et [6]), essentiellement le théorème de localisation de la lissité formelle en caractéristique p .

PROPOSITION 50 : Soient deux homomorphismes locaux $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ avec B complet. Alors $H_1(A,B,W)$ est nul pour tout C-module W si et seulement si d'une part, $H_1(A,B,L)$ est nul pour le corps résiduel L de C et d'autre part, $H_0(K,A,C)$ est un C-module absolument séparé.

Comme le B-module $H_0(K,B,B)$ est fort, le C-module $H_0(K,B,W)$ est séparé pour tout C-module de type fini W , selon les lemmes 13 et 14. On a une suite exacte

$$H_1(A,B,W) \longrightarrow H_0(K,A,W) \longrightarrow H_0(K,B,W) .$$

Par conséquent si $H_1(A,B,W)$ est nul, le C-module $H_0(K,A,W)$ est aussi séparé. Mais alors le C-module $H_0(K,A,C)$ est absolument séparé.

D'autre part, si $H_1(A,B,C/M)$ est nul, sans que $H_1(A,B,C/J)$ soit toujours nul, considérons P un idéal maximal pour cette propriété. On vérifie alors que P est un idéal premier et que le C-module $H_1(A,B,C/P)$ est divisble par tout élément t de M-P . Comme le C-module $H_0(K,A,C/P)$ est supposé séparé, ce qui précède démontre que l'image de $H_1(A,B,C/P)$ dans $H_0(K,A,C/P)$ est nulle. Le C-module $H_1(A,B,C/P)$ est donc de type fini, comme image du C-module $H_1(K,B,C/P)$ , selon la remarque 36. Mais alors par le lemme de Nakayama (un seul élément t suffit) le module $H_1(A,B,C/P)$ est nul. Par conséquent tous les modules $H_1(A,B,C/J)$ sont nuls. Mais alors tous les modules $H_1(A,B,W)$ sont nuls, en premier lieu pour W de

type fini et en second lieu pour $W$ quelconque sur $C$ .

COROLLAIRE 51 : L'anneau $A$ est quasi-excellent si et seulement si le $\hat{A}$-module $H_0(K,A,\hat{A})$ est absolument séparé. Dans ce cas, pour toute $A$-algèbre $X$ , le $X$-module $H_0(K,A,X)$ est absolument séparé.

La première partie de ce corollaire est le cas particulier de la proposition avec $B = \hat{A}$ et $C = \hat{A}$ . Pour démontrer la seconde partie, on peut supposer que l'homomorphisme de $A$ dans $X$ est local, puisque la quasi-excellence de $A$ se préserve par localisation. Soit $W$ un $X$-module de type fini. Vu l'injection naturelle

$$H_0(K,A,W) \subset H_0(K,A,W) \otimes_X \hat{X} \cong H_0(K,A,\hat{W}) ,$$

le $X$-module $H_0(K,A,W)$ est séparé si le $\hat{X}$-module $H_0(K,A,\hat{W})$ est séparé. Il reste alors à démontrer le cas particulier où $X$ est complet. On applique la proposition avec $B = \hat{A}$ et $C = X$ .

COROLLAIRE 52 : L'homomorphisme local $A \longrightarrow B$ est régulier si $A$ est quasi-excellent et si $H_1(A,B,L)$ est nul pour le corps résiduel $L$ de $B$ .

Comme l'homomorphisme $A \longrightarrow B$ est régulier si l'homomorphisme $A \longrightarrow \hat{B}$ est régulier et comme le module $H_1(A,\hat{B},L)$ est nul, car les modules $H_1(A,B,L)$ et $H_1(B,\hat{B},L)$ le sont, ce dernier étant isomorphe à $H_1(L,L,L)$ , on peut supposer $B$ complet. On applique alors la proposition avec $B = C$ pour obtenir un foncteur nul $H_1(A,B,\cdot)$ , en sachant que le $B$-module $H_0(K,A,B)$ est absolument séparé, grâce au corollaire précédent.

## IV. Le $A^p$-module $A$

On aura besoin du résultat suivant concernant l'homomorphisme de la définition 47

$$(Fr,Fr,Id):(A,B,\overline{W}) \longrightarrow (A,B,W) .$$

LEMME 53 : L'homomorphisme de Frobenius donne un homomorphisme nul de $H_n(A,B,\overline{W})$ dans $H_n(A,B,W)$ .

On choisit une résolution simpliciale $B_\star$ de la $A$-algèbre $B$ et on constate que l'homomorphisme de Frobenius donne un homomorphisme nul

$$H_0(A,B_n,\overline{W}) \longrightarrow H_0(A,B_n,W)$$

en chaque degré $n$ , déjà avant de passer à l'homologie.

REMARQUE 54 : Avec les deux modules du lemme, on a un module intermédiaire $X$ qui se présente de deux manières différentes : il s'agit de $H_n(A^p,B^p,\overline{W})$ , si l'on considère $A^p$ et $B^p$ comme des quotients de $A$ et de $B$ et il s'agit de $H_n(A^p,B^p,W)$ , si l'on considère $A^p$ et $B^p$ comme des sous-anneaux de $A$ et de $B$ . On a alors l'homomorphisme $f$ de $H_n(A,B,\overline{W})$ dans $H_n(A^p,B^p,\overline{W})$ et l'homomorphisme $g$ de $H_n(A^p,B^p,W)$ dans $H_n(A,B,W)$ avec l'homomorphisme $g\circ f$ nul. On utilisera ce corollaire du lemme dans deux cas différents en degré 2 : les deux fois, l'homomorphisme $f$ sera nul parce que l'homomorphisme $g$ sera injectif.

Les anneaux sont à nouveau noethériens et locaux. On va utiliser les invariants numériques classiques : la $i$-ème déviation de $A$ (pour $i$ petit seulement)

$$\epsilon_i(A) = \dim_L H_i(A,L,L)$$

et la déficience de $A$ (voir [1] exercice 15)

$$d(A) = \dim A - \epsilon_1(A) + \epsilon_2(A) .$$

Rappelons que la première déviation est la dimension de plongement, que la deuxième déviation mesure la non-régularité de $A$ et que le nombre $d(A)$ , positif ou nul, est nul si et seulement si $A$ est une intersection complète (au sens large). On a le théorème d'addition de L. Avramov.

LEMME 55 : Pour un homomorphisme local et plat $A \longrightarrow B$ de fibre $C$ , la déficience de $B$ est la somme des déficiences de $A$ et de $C$ .

Voir [4] proposition 3.6.

COROLLAIRE 56 : Si un homomorphisme local et plat $g$ est obtenu en composant des homomorphismes locaux et plats $f_i$ , alors la déficience de la fibre de $g$ est la somme des déficiences des fibres des $f_i$ .

Rappelons que si le $A^p$-module $A$ est plat, l'homomorphisme $g(A)$ de la définition 43 est un isomorphisme et que le $\hat{A}^p$-module $\hat{A}$ est plat. L'isomorphisme de $A^p \otimes_A \hat{A}$ sur $\hat{A}^p$ démontre en outre que l'homomorphisme local et plat $A^p \longrightarrow \hat{A}^p$ est un quotient de l'homomorphisme local et plat $A \longrightarrow \hat{A}$ .

Si $Q$ est un idéal premier de $A$ , on peut définir le même an-

neau $A_Q^p$ de deux manières différentes : soit il s'agit du sous-anneau $(A_Q)^p$ de l'anneau $A_Q$ , soit il s'agit de l'anneau $A^p$ localisé en son idéal premier correspondant à $Q$ . Lorsque l'on remplace $A$ par $\hat{A}$ et $Q$ par $R$ (au-dessus de $Q$ par la suite), on obtient l'anneau $\hat{A}_R^p$ . Remarquons pour la suite que le produit tensoriel par le $A_Q$-module $A_Q^p$ transforme le premier homomorphisme local et plat ci-dessous en le second homomorphisme local et plat ci-dessous

$$A_Q \longrightarrow \hat{A}_R \quad \text{et} \quad A_Q^p \longrightarrow \hat{A}_R^p$$

avec deux fois la même fibre, le $A^p$-module $A$ étant supposé plat.

LEMME 57 : Si le $A^p$-module $A$ est plat, les anneaux $F(A_Q)$ et $F(\hat{A}_R)$ ont la même déficience.

On applique le corollaire 56 à l'homomorphisme local et plat de $A_Q^p$ dans $\hat{A}_R$ décomposé de deux manières différentes :

$$d(F(A_Q)) + x = y + d(F(\hat{A}_R))$$

où $x$ est la déficience de la fibre de $A_Q \longrightarrow \hat{A}_R$ et où $y$ est celle de $A_Q^p \longrightarrow \hat{A}_R^p$ et on sait par la remarque précédant le lemme que ces deux nombres sont égaux.

On peut démontrer maintenant la proposition utilisée dans la démonstration du théorème 46. Rappelons qu'un homomorphisme plat $A \longrightarrow B$ a comme fibres des intersections complètes, si on a la condition

$$H_2(A,B,\Omega) \overset{\sim}{=} 0 \quad , \quad \Omega \text{ corps quelconque.}$$

Mais alors tous les foncteurs suivants sont nuls

$$H_k(A,B,\cdot) \overset{\sim}{=} 0 \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2 \ .$$

PROPOSITION 58 : Si l'homomorphisme $A^p \longrightarrow A$ est plat avec une intersection complète comme fibre, alors toutes les fibres formelles de $A$ sont des intersections complètes.

L'anneau $F(A)$ est une intersection complète, donc $F(\hat{A})$ aussi. On peut localiser cette propriété (voir [13]) : toutes les fibres $F(\hat{A}_R)$ de l'homomorphisme plat $\hat{A}^p \longrightarrow \hat{A}$ sont des intersections complètes. Par le lemme 57, non seulement $F(\hat{A}_R)$ mais encore $F(A_Q)$ ont une déficience nulle : toutes les fibres $F(A_Q)$ de l'homomorphisme plat $A^p \longrightarrow A$ sont des intersections complètes. Ces fibres intersections complètes donnent des foncteurs nuls

$$H_3(\hat{A}^p,\hat{A},\cdot) \overset{\sim}{=} 0 \overset{\sim}{=} H_2(A^p,A,\cdot) .$$

Comme on a des suites exactes de Jacobi-Zariski

$$H_2(A^p,A,W) \longrightarrow H_2(A^p,\hat{A},W) \longrightarrow H_2(A,\hat{A},W)$$
$$H_3(\hat{A}^p,\hat{A},W) \longrightarrow H_2(A^p,\hat{A}^p,W) \longrightarrow H_2(A^p,\hat{A},W)$$

on a un monomorphisme naturel

$$g:H_2(A^p,\hat{A}^p,W) \longrightarrow H_2(A,\hat{A},W)$$

donc on a un isomorphisme (voir [1] proposition 54 du chapitre 4)

$$f:H_2(A,\hat{A},\overline{W}) \longrightarrow H_2(A^p,\hat{A}^p,\overline{W})$$

qui est nul (remarque 54) en particulier lorsque $W$ est un corps $\Omega$

$$H_2(A,\hat{A},\Omega)\underset{\Omega}{\otimes}\overline{\Omega} \overset{\sim}{=} H_2(A,\hat{A},\overline{\Omega}) \overset{\sim}{=} 0$$

Comme le $\Omega$-module $\overline{\Omega}$ est libre, on a finalement

$$H_2(A,\hat{A},\Omega) \overset{\sim}{=} 0 \text{ , } \Omega \text{ corps quelconque}$$

et les fibres formelles de $A$ sont toutes des intersections complètes.

REMARQUE 59 : Le théorème d'addition de L. Avramov est plus précis dans le sens suivant : l'homomorphisme naturel

$$H_2(A,L_A,L_B) \overset{\sim}{=} H_2(A,L_B,L_B) \longrightarrow H_2(B,L_B,L_B)$$

est un monomorphisme pour tout homomorphisme local et plat $A \longrightarrow B$ .

PROPOSITION 60 : Si le $A^p$-module $A$ est plat, on a les relations suivantes

$$\epsilon_2(A^p) \leqslant \nu(N) = \epsilon_2(A)-d(F)$$

entre les deuxièmes déviations des anneaux $A^p$ et $A$ , le nombre minimal de générateurs du noyau $N$ de l'homomorphisme de Frobenius de $A$ et la déficience de la fibre $F$ de l'homomorphisme plat de $A^p$ dans $A$ .

On applique la remarque 59 à l'homomorphisme plat $A^p \longrightarrow A$ pour obtenir un monomorphisme

$$g:H_2(A^p,L^p,L) \longrightarrow H_2(A,L,L)$$

donc on a un homomorphisme nul (remarque 54)

$$f:H_2(A,L,\overline{L}) \longrightarrow H_2(A^p,L,\overline{L})$$

autrement dit un homomorphisme nul

$$H_2(A,L,L) \longrightarrow H_2(A^p,L,L) \ .$$

On a donc une suite de Jacobi-Zariski

$$0 \longrightarrow H_2(A^p,L,L) \longrightarrow H_1(A,A^p,L) \longrightarrow H_1(A,L,L) \longrightarrow H_1(A^p,L,L) \longrightarrow 0$$

puisque $H_0(A,A^p,L)$ est nul. Comme on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$H_1(A,A^p,L) \overset{\sim}{=} (N/N^2) \otimes_{A^p} L \overset{\sim}{=} (N/LN)$$

on a les relations suivantes

$$\epsilon_2(A^p) \leqslant \nu(N) = \epsilon_2(A^p) - \epsilon_1(A^p) + \epsilon_1(A) \ .$$

Comme $A$ et $A^p$ ont la même dimension, cette somme alternée est égale au nombre suivant

$$d(A^p) - d(A) + \epsilon_2(A) = \epsilon_2(A) - d(F) \ ,$$

en utilisant à nouveau la platitude du $A^p$-module $A$ .

On retrouve le théorème de E. Kunz (voir [9] corollaire 2.7).

COROLLAIRE 61 : Si le $A^p$-module $A$ est plat et si l'anneau $A$ est réduit, alors l'anneau $A$ est régulier.

C'est le cas $0 = \nu(N) \geqslant \epsilon_2(A^p) = \epsilon_2(A)$ de la proposition.

COROLLAIRE 62 : Si l'homomorphisme $A^p \longrightarrow A$ est plat avec une intersection complète comme fibre, on a les relations suivantes

$$\epsilon_2(A^p) \leqslant \nu(N) = \epsilon_2(A)$$

pour le noyau $N$ de l'homomorphisme de Frobenius.

C'est le cas $0 = d(F)$ de la proposition.

[1] ANDRÉ, M. : Homologie des algèbres commutatives. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1974

[2] ANDRÉ, M. : Localisation de la lissité formelle. Manuscripta Math. 13, 297-307 (1974)

[3] ANDRÉ, M. : Morphismes pseudo-réguliers. Comm. Algebra 15, 2129-2142 (1987)

[4] AVRAMOV, L. : Homology of local flat extensions and complete intersection defects. Math.Ann. 228, 27-38 (1977)

[5] BOURBAKI, N. : Algèbre commutative, chapitre 3. Paris : Hermann 1967

[6] BREZULEANU, A., RADU, N.: Excellent rings and good separation of the module of differentials. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 23, 1455-1471 (1978)

[7] JENSEN, C. : Les foncteurs dérivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1972

[8] KUNZ, E. : Kähler differentials. Braunschweig-Wiesbaden : Vieweg und Sohn 1986

[9] KUNZ, E. : Characterizations of regular local rings of characteristic p . Amer. J. Math. 91, 772-784 (1969)

[10] KUNZ, E. : On noetherian rings of characteristic p . Amer. J. Math. 98, 999-1013 (1976)

[11] MATSUMURA, H. : Commutative algebra. New York : Benjamin 1970

[12] MATSUMURA, H. : Commutative ring theory. Cambridge : Cambridge University Press 1986

[13] TABAA, M. : Sur les homomorphismes d'intersection complète. C.R. Acad. Sci. Paris 298, 437-439 (1984)

Michel ANDRÉ
Ecole Polytechnique Fédérale
Département de mathématiques
CH-1015 Ecublens-Lausanne
Suisse

(Reçu le 26 Août 1988)