

Werk

Titel: Classes caracteristiques de ... (G, H)-Structures et Finitude de leur evaluation....

Autor: Hantout, Youssef

Jahr: 1988

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0062|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

CLASSES CARACTERISTIQUES DE $\Gamma(G, H)$ -STRUCTURES ET FINITUDE DE LEUR EVALUATION

YOUSSEF HANTOUT

Let G be a Lie group and H a closed subgroup of G . We denote by $\Gamma(G, H)$ the groupoid of germs of left translations of G over the homogeneous space G/H .

Let V be a compact manifold and x the universal characteristic class of dimension k which belongs to the vector space $H_{cont}^k(\Gamma(G, H))$.

The evaluation of x over all the $\Gamma(G, H)$ -structures over V determines a subset $A_{\Gamma(G, H)}(x, V)$ of the vector space $H^k(V; \mathbb{R})$.

We show that in some cases this set is finite.

Introduction

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et H un sous-groupe fermé de codimension q dans G . On désigne par $\Gamma(G, H)$ le groupoïde des germes de translations à gauche de G sur G/H , et Γ_q le groupoïde des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^q$.

Si Γ est un groupoïde topologique, $B\Gamma$ désignera son espace classifiant (cf. Haefliger [10]). On rappelle que l'ensemble des classes de concordance de Γ -structures (V, γ) est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes d'homotopie f_γ de V dans $B\Gamma$.

La cohomologie du groupoïde Γ est calculée par la cohomologie du complexe d'Eilenberg-MacLane dont les k -co-chaînes sont données par

$$C^k(\Gamma) = \{f : \Gamma^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}\},$$

où $\Gamma^{(k)}$ est le sous-ensemble des éléments $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ de Γ^k qui sont composables. L'opérateur cobord $\delta : C^k(\Gamma) \rightarrow C^{k+1}(\Gamma)$ est donné par

$$\begin{aligned} \delta f(\gamma_0, \dots, \gamma_k) &= f(\gamma_1, \dots, \gamma_k) + \sum_i (-1)^i f(\gamma_0, \dots, \gamma_i \gamma_{i-1}, \dots, \gamma_k) + \\ &+ (-1)^{k+1} f(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}). \end{aligned}$$

On note $H^*(\Gamma, \mathbb{R})$ la cohomologie de ce complexe. C'est aussi la cohomologie de l'espace classifiant $B\Gamma$ (Haefliger [10]).

Dans la pratique il est sans espoir de travailler avec $H^*(\Gamma, \mathbb{R})$ car cet espace est énorme et beaucoup trop compliqué. On substitue à ce complexe le sous-complexe des cochaînes continues

$$C_{\text{cont}}^k(\Gamma) = \{f : \Gamma^{(k)} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f \text{ soit continue}\}.$$

Ce sous-complexe est clairement préservé par le cobord δ . On désigne par $H_{\text{cont}}^*(\Gamma)$ la cohomologie de ce sous-complexe.

L'inclusion du sous-complexe $C_{\text{cont}}^*(\Gamma)$ dans $C^*(\Gamma)$ induit, par passage à la cohomologie, le morphisme universel:

$$\chi_\Gamma : H_{\text{cont}}^*(\Gamma) \rightarrow H^*(B\Gamma).$$

Si (V, γ) est une Γ -structure d'application classifiante f_γ , le morphisme qui fournit les classes caractéristiques de cette Γ -structure est par définition la composée

$$\alpha_\gamma^* = f_\gamma^* \circ \chi_\Gamma.$$

A chaque élément x de $H_{\text{cont}}^k(\Gamma)$, on associe l'ensemble non vide suivant:

$$A_\Gamma(x, V) = \{(f_\gamma^* \circ \chi_\Gamma)(x) \in H^k(V; \mathbb{R}) : f_\gamma \in [V, B\Gamma]\}.$$

On désignera par $\mathcal{N}_\Gamma(x, V)$ le cardinal de cet ensemble. Puisque $\dim G/H = q$, la $\Gamma(G, H)$ -structure universelle sur $B\Gamma(G, H)$ définit une Γ_q -structure. On en déduit une application classifiante (bien définie à homotopie près)

$$B\Gamma(G, H) \xrightarrow{\delta_{(G, H)}} B\Gamma_q.$$

Par naturalité, on a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{cont}}^*(\Gamma_q) & \xrightarrow{\lambda_{(G, H)}^*} & H_{\text{cont}}^*(\Gamma(G, H)) \\ \downarrow \chi_{\Gamma_q} & & \downarrow \chi_{\Gamma(G, H)} \\ H^*(B\Gamma_q) & \xrightarrow{\delta_{(G, H)}^*} & H^*(B\Gamma(G, H)) \end{array}$$

A chaque élément x dans $H_{\text{cont}}^k(\Gamma_q)$, on associe l'ensemble non vide

$$B_{(G, G/H)}(x, V) = A_{\Gamma(G, H)}(\lambda_{(G, H)}^*(x), V).$$

Dans ([4]), Brooks et Goldman ont montré que si V est une variété compacte, l'ensemble $B_{(PSL(2, \mathbb{R}), S^1)}(h_1 c_1^2, V)$ est fini.

Ce résultat a été généralisé par Heitsch ([13]) à l'ensemble $B_{(SL(q+1, \mathbb{R}), S^*)}(x, V)$.

Dans ([1]), Benson et Ellis ont montré que si G est semi-simple et si $\mathcal{F}_t$ est une famille à un paramètre de $\Gamma(G, H)$ -feuilletages de codimension q sur une variété V , les classes caractéristiques de $\mathcal{F}_t$ ne dépendent pas du paramètre t . Si H est un sous-groupe parabolique non maximal pour l'inclusion dans G , $\lambda_{(G, H)}^*(x) = 0$.

Par contre, dans le cas où G admet un sous-groupe cocompact Γ (par exemple, si G est semi-simple) il existe alors une variété compacte $\Gamma \backslash G/(K \cap H)$ (où K est un sous-groupe compact maximal de G) telle que, pour tout élément x dans $H_{cont}^k(\Gamma(G, H))$,

$$\mathcal{N}_{\Gamma(G, H)}(x, \Gamma \backslash G/(K \cap H)) \geq 2.$$

Ceci motive donc l'étude des ensembles $A_{\Gamma(G, H)}(x, V)$.

En remarquant que

$$H_{cont}^*(\Gamma(G, H)) = H_{cont}^*(\Gamma(G, K \cap H))$$

on en déduit un morphisme universel,

$$\mu : H_{cont}^*(\Gamma(G, K)) \rightarrow H_{cont}^*(\Gamma(G, H)).$$

Soit maintenant V une variété compacte, et notons $\{a_1, \dots, a_\ell\}$ un système générateur de $\pi_1(V)$.

L'ensemble $\text{Hom}(\pi_1(V), G)$ des homomorphismes du groupe $\pi_1(V)$ dans G s'identifie alors à une sous-variété (éventuellement non lisse) de G^ℓ .

Désignons par $c_{(\pi_1(V), G)}$ le nombre de composantes connexes de celle-ci. Dans ce travail nous allons montrer:

THEOREME.

Si $\pi_1(V)$ est de type fini et $H^*(\mathcal{G}, K \cap H; \mathcal{G}^*)$ trivial, alors pour tout $x \in \text{Im } \mu$,

$$\mathcal{N}_{\Gamma(G, H)}(x, V) \leq c_{(\pi_1(V), G)}.$$

COROLLAIRE 1.

Si $\pi_1(V)$ est de type fini, G algébrique et $H^*(\mathcal{G}, K \cap H; \mathcal{G}^*)$ trivial, alors pour tout $x \in \text{Im } \mu$,

$$\mathcal{N}_{\Gamma(G, H)}(x, V) < +\infty.$$

COROLLAIRE 2.

Si $\pi_1(V)$ est de type fini et G semi-simple, alors pour tout $x \in \text{Im } \mu \cap \text{Im } \lambda_{(G, H)}^*$,

$$\mathcal{N}_{\Gamma(G, H)}(x, V) < +\infty.$$

Remarquons que le corollaire 2, entraîne le résultat de Heitsch ([13]). Plus précisément, on a

COROLLAIRE 3.

Si $\pi_1(V)$ est de type fini, l'ensemble $B_{(SL(q+1, \mathbb{R}), S^)}(x, V)$ est fini.*

Les résultats de ce travail ont déjà fait l'objet d'une publication interne de l'IRMA de Lille (cf. Hantout [11]).

Je remercie Etienne Ghys et Daniel Lehmann pour les nombreuses suggestions et remarques qu'ils m'ont prodiguées au cours de ce travail.

Ce travail est organisé comme suit:

§0 Plan de la démonstration du théorème:

§1: Soit (V, γ) une $\Gamma(G, H)$ -structure. Nous commençons d'abord par rappeler la définition de la représentation d'holonomie η_γ de γ . Ce morphisme η_γ est un élément de l'espace $\text{Hom}(\pi_1(V), G)$ des homomorphismes du groupe $\pi_1(V)$ dans G . Nous rappelons aussi comment on en déduit une réalisation explicite de l'espace classifiant $B\Gamma(G, H)$ de la catégorie topologique $\Gamma(G, H)$ et aussi une réalisation de la $\Gamma(G, H)$ -structure universelle sur $B\Gamma(G, H)$.

§2: Nous montrons ensuite que la restriction à l'image de μ du morphisme qui donne les classes caractéristiques de la $\Gamma(G, H)$ -structure (V, γ) ne dépend en fait que de la représentation d'holonomie η_γ de γ .

§3: Désignons par C_{η_γ} la composante connexe de l'élément η_γ dans $\text{Hom}(\pi_1(V), G)$. A chaque élément x de $\text{Im } \mu$ nous associons la fonction ψ_x suivante:

$$\begin{aligned}\psi_x : C_{\eta_\gamma} &\rightarrow H_{DR}^k(V) \\ \psi_x(\eta_{\gamma'}) &= \alpha_{\gamma'}^*(x) - \alpha_\gamma^*(x).\end{aligned}$$

Du paragraphe 2 on déduit que ψ_x est définie. Nous montrons d'abord que la fonction ψ_x est une application continue et qu'elle est dérivable sur un ouvert partout dense de C_{η_γ} .

En se servant du fait que $H^*(\mathcal{G}, K \cap H; \mathcal{G}^*)$ est trivial, nous montrons que cette dérivée est en fait nulle. On en déduit que l'application ψ_x est nécessairement constante et égale à zéro.

§4: Dans ce paragraphe, nous en déduisons les corollaires.

§1 $\Gamma(G, H)$ -structures et classifiants $B\Gamma(G, H)$.

Soit $G \xrightarrow{\rho} \text{Diff}(G/H)$ l'action par translation à gauche de G sur G/H . L'ensemble des restrictions des éléments de $\rho(G)$ aux ouverts de G/H détermine un pseudogroupe noté $I(G, H)$. On notera $\Gamma(G, H)$ le groupoïde topologique des germes associé à $I(G, H)$. Cette catégorie topologique $\Gamma(G, H)$ possède un espace classifiant qu'on notera $B\Gamma(G, H)$.

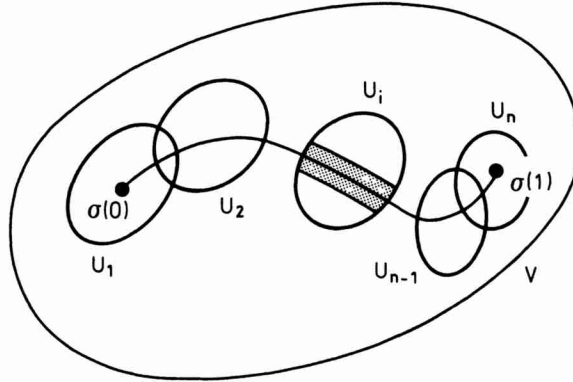
1.1 Application développante et holonomie d'une $\Gamma(G, H)$ -structure.

Ces notions sont dues à Ehresmann ([5], [6]). Soit (V, γ) une $\Gamma(G, H)$ -structure, et soit $(f_i : U_i \rightarrow G/H, \gamma_{ij})_{i,j}$ un $\Gamma(G, H)$ -cocycle qui la représente. On a

$$\begin{aligned} f_i|_{U_i \cap U_j} &= \gamma_{ij} \circ f_j|_{U_i \cap U_j} \\ \gamma_{ij} &= \rho(g_{ij})|_{f_i(U_i \cap U_j)}, \quad g_{ij} \in G. \end{aligned}$$

Soit σ un chemin dans V , tel que $\sigma(0)$ soit dans U_1 . Puisque G opère analytiquement sur G/H , on peut prolonger f_1 à un voisinage tubulaire T_σ de σ de telle manière que ce prolongement soit indépendant du choix du voisinage tubulaire T_σ de σ .

En effet, on a la figure suivante:



Puisque σ est compact, on a

$$\sigma = \bigcup_{i=1}^n (\sigma \cap U_i) \quad \text{avec} \quad U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset.$$

Désignons par σ_i la partie de σ incluse dans U_i . On choisit un voisinage tubulaire T_{σ_i} de σ_i inclus dans U_i . On définit la fonction

$$\begin{aligned} T_{\sigma_i} &\xrightarrow{f_{\sigma_i}} G/H \\ f_{\sigma_i}(x) &= \rho(g_{12} \circ g_{23} \circ \dots \circ g_{i-1,i}) f_i(x). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre pour T_σ la réunion $\bigcup_{i=1}^n T_{\sigma_i}$ et pour f_σ la fonction suivante:

$$\begin{aligned} T_\sigma &\xrightarrow{f_\sigma} G/H \\ f_\sigma(x) &= f_{\sigma_i}(x) \quad \text{si} \quad x \in T_{\sigma_i}. \end{aligned}$$

La condition de cocycle nous dit que la fonction f_σ est bien définie. En particulier, on a:

$$f_\sigma(\sigma(1)) = \rho(g_{12} \circ \dots \circ g_{n-1,n}) f_n(\sigma(1)).$$

Dans la construction de f_σ , on a uniquement besoin du germe de f_1 au voisinage de $\sigma(0)$ et des *difféomorphismes globaux* $\rho(g_{i-1,i})$ de G/H . En particulier, si σ et σ' sont homotopes, il est clair que f_σ est égale à $f_{\sigma'}$.

Soit v_0 un point fixe de U_1 . On fixe le germe de f_1 en v_0 . Si $\tilde{V}$ désigne le revêtement universel de V , on déduit une application:

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\xrightarrow{D_\gamma} G/H \\ D_\gamma([\sigma]) &= f_\sigma(\sigma(1)). \end{aligned}$$

Cette application s'appelle l'application développante. On a aussi

$$f_\sigma(\sigma(1)) = \eta_\gamma([\sigma]) f_n(\sigma(1)).$$

Si $A_{[\tau]}$ est un automorphisme du revêtement universel $\tilde{V}$ de V , on a

$$D_\gamma \circ A_{[\tau]} = \eta_\gamma([\tau]) \circ D_\gamma.$$

On en déduit que

$$D_\gamma \circ A_{[\tau_1]} \circ A_{[\tau_2]} = \eta_\gamma([\tau_1]) \circ \eta_\gamma([\tau_2]) \circ D_\gamma.$$

Mais, on a aussi

$$D_\gamma \circ A_{[\tau_1]} \circ A_{[\tau_2]} = \eta_\gamma([\tau_1] \cdot [\tau_2]) \circ D_\gamma$$

d'où

$$\eta_\gamma([\tau_1] \cdot [\tau_2]) = \eta_\gamma([\tau_1]) \circ \eta_\gamma([\tau_2]).$$

Par conséquent le morphisme η_γ est un homomorphisme du groupe $\pi_1(V, v_0)$ dans G . Ce morphisme est appelé "*représentation d'holonomie*" de la $\Gamma(G, H)$ -structure (V, γ) et sera noté η_γ .

Remarquons que ce morphisme n'est défini que modulo le choix d'un germe d'application admissible f_1 en v_0 .

1.2 L'espace classifiant $B\Gamma(G, H)$.

Soit G^δ le groupe G muni de la topologie discrète, et BG^δ l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$.

Le groupe G opère sur $EG^\delta \times G/H$ diagonalement, sur EG^δ par automorphismes du revêtement universel et sur G/H par l'action ρ .

Sur $EG^\delta \times G/H$ le "*feuilletage*" dont les feuilles sont les sous-espaces $EG^\delta \times \{w\}$ de $EG^\delta \times G/H$ quand w parcourt G/H est invariant par cette action. On en déduit un "*feuilletage*" $\mathcal{F}_\mu$ sur la variété quotient $EG^\delta \times_\rho G/H$. Puisque G opère transitivement sur G/H le "*feuilletage*" $\mathcal{F}_\mu$ ne possède qu'une seule feuille.

La variété $EG^\delta \times_\rho G/H$ est fibrée au dessus de BG^δ avec une fibre difféomorphe à G/H . La "*monodromie*" de ce fibré n'est rien d'autre que l'action par translation à gauche de G sur G/H . Comme conséquence de (1.1) on en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 1. (cf. [5], [8], [9])

L'espace $EG_{\rho}^{\delta} \times G/H$ est une réalisation de $B\Gamma(G/H)$ et une réalisation de la $\Gamma(G, H)$ -structure universelle est donnée par $\mathcal{F}_{\mu}$.

Démonstration. Soit (V, γ) une $\Gamma(G, H)$ -structure. Désignons par η_{γ} la représentation d'holonomie de cette $\Gamma(G, H)$ -structure. Le groupe fondamental $\pi_1(V, v_0)$ opère diagonalement sur le produit $\tilde{V} \times G$, sur $\tilde{V}$ par automorphismes de revêtement et sur G par la représentation d'holonomie η_{γ} . Désignons par $E(V, G; \eta_{\gamma})$ la variété quotient. De façon analogue, $\pi_1(V, v_0)$ opère diagonalement sur $\tilde{V} \times G/H$, et on désignera par $E(V, G/H; \eta_{\gamma})$ la variété quotient.

On en déduit le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{V} \times G & \longrightarrow & E(V, G; \eta_{\gamma}) & \xrightarrow{E_{\eta_{\gamma}}} & EG_{\rho}^{\delta} \times G \\
 \downarrow & & \downarrow q_{\eta_{\gamma}} & & \downarrow q_{\mu} \\
 \tilde{V} \times G/H & \longrightarrow & E(V, G/H; \eta_{\gamma}) & \xrightarrow{A_{\eta_{\gamma}}} & EG_{\rho}^{\delta} \times G/H \\
 \downarrow & & \downarrow p_{\eta_{\gamma}} & & \downarrow p_{\mu} \\
 \tilde{V} & \longrightarrow & V & \xrightarrow{B_{\eta_{\gamma}}} & BG
 \end{array}$$

Considérons une trivialisaton de $E(V, G/H; \eta_{\gamma}) \xrightarrow{p_{\eta_{\gamma}}} V$. Définissons

$$\begin{aligned}
 s_i : U_i &\longrightarrow U_i \times G/H \\
 s_i(v) &= (v, f_i(v)).
 \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned}
 s_{\gamma} : V &\longrightarrow E(V, G/H; \eta_{\gamma}) \\
 s_{\gamma}(v) &= \phi_i(v, f_i(v))
 \end{aligned}$$

où ϕ_i est telle que

$$\begin{array}{ccc}
 p_{\eta_{\gamma}}^{-1}(U_i) & \xleftarrow{\phi_i} & U_i \times G/H \\
 p_{\eta_{\gamma}}|_{p_{\eta_{\gamma}}^{-1}(U_i)} \searrow & & \swarrow p_1 \\
 & U_i &
 \end{array}$$

est bien définie. En effet si $v \in U_i \cap U_j$, on a

$$\phi_j(v, f_j(v)) = \phi_i(v, (\gamma_{ij} \circ f_j)(v)) = \phi_i(v, f_i(v)).$$

D'autre part

$$s_\gamma^*(A_{\eta_\gamma}^*(\mathcal{F}_\mu)) = \gamma.$$

Par conséquent, $A_{\eta_\gamma} \circ s_\gamma$ est une application classifiante f_γ de la $\Gamma(G, H)$ -structure (V, γ) . Si γ et γ' sont concordantes les applications f_γ et $f_{\gamma'}$ sont homotopes. $\square$

§2 Classes caractéristiques d'une $\Gamma(G, H)$ -structure.

Pour la construction de classes caractéristiques de feuilletages nous adoptons le point de vue dû à A. Haefliger (cf. [9]).

On désigne par o la classe de H dans G/H . L'action de G sur un voisinage de o dans G/H définit un pseudogroupe de Lie sur $\mathbb{R}^q$ dont le groupoïde des germes est la restriction de $\Gamma(G, H)$ à ce voisinage de o . Le type d'homotopie de $B\Gamma(G, H)$ ne change pas si on remplace $\Gamma(G, H)$ par ce sous-groupoïde. Soit G_o^k le groupe de Lie des jets d'ordre k en o d'éléments de G . Posons

$$G_o^\infty = \varinjlim_k G_o^k.$$

Ce groupe est H . Si $J^\infty\Gamma(G, H)$ est le groupoïde des jets d'ordre ∞ , $BJ^\infty\Gamma(G, H)$ a le même type d'homotopie que $B(K \cap H)$ où K est un sous-groupe compact maximal de G . L'application naturelle $\Gamma(G, H) \rightarrow J^\infty\Gamma(G, H)$ induit une application $\lambda : B\Gamma(G, H) \rightarrow B(K \cap H)$, définie à homotopie près.

Notons $\ell : B\Gamma(G, H) \rightarrow BH$, l'application classifiante de la fibration universelle

$$B\Gamma(G, e) \xrightarrow{q_\mu} B\Gamma(G, H).$$

La fibration $B(K \cap H) \rightarrow BH$ induite par l'inclusion $K \cap H \rightarrow H$ a pour fibre $H/K \cap H$ qui est contractile. On en déduit une section $s_H : BH \rightarrow B(K \cap H)$. L'application λ n'est autre que la composée $s_H \circ \ell$, à homotopie près.

Dans ce cas, l'algèbre de Lie du pseudogroupe $I(G, H)$ n'est autre que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G .

Par conséquent $H^*(\mathcal{G}, K \cap H)$ s'interprète comme la cohomologie continue du groupoïde $\Gamma(G, H)$ et l'homomorphisme universel $\chi_{\Gamma(G, H)} : H^*(\mathcal{G}, K \cap H) \rightarrow H^*(B\Gamma(G, H))$ qui donne les classes caractéristiques des microfibrés G -feuillets, correspond à l'homomorphisme caractéristique des G^δ -fibrés avec H -réduction.

2.1 Construction du morphisme α_γ .

D'après la proposition 1 du §1, la donnée d'une $\Gamma(G, H)$ -structure (V, γ) est équivalente à la donnée du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 E(V, G; \eta_\gamma) & \xrightarrow{E_{\eta_\gamma}} & B\Gamma(G, e) \\
 \downarrow q_{\eta_\gamma} & & \downarrow q_\mu \\
 E(V, G/H; \eta_\gamma) & \xrightarrow{A_{\eta_\gamma}} & B\Gamma(G, H) \\
 \uparrow s_\gamma & \nearrow f_\gamma & \downarrow p_\mu \\
 (V, \gamma) & \xrightarrow{B_{\eta_\gamma}} & BG^\delta
 \end{array} \quad (1)$$

L'application classifiante f_γ est la composée $A_{\eta_\gamma} \circ s_\gamma$.

Dans la suite, on va supposer que V est une variété pour pouvoir utiliser l'algèbre de de Rham $\Omega_{DR}(V)$.

La structure de G^δ -fibré sur le G -fibré $E(V, G; \eta_\gamma) \xrightarrow{E_{\eta_\gamma}} V$ d'application classifiante B_{η_γ} est parfaitement caractérisée par la donnée d'une connexion θ_{η_γ} , unique, sur ce G -fibré.

En effet θ_{η_γ} est parfaitement caractérisée par $\text{Ker } \theta_{\eta_\gamma}$ qui est le fibré des vecteurs tangents aux feuilles du feuilletage et qui est défini par la suspension de la représentation d'holonomie η_γ .

Le fait que $\text{Ker } \theta_{\eta_\gamma}$ soit involutif est équivalent à ce que la connexion θ_{η_γ} soit sans courbure.

Si on identifie $\Lambda \mathcal{G}^*$ à la sous-algèbre différentielle graduée des formes différentielles sur G invariantes à gauche, on a alors une structure de G -algèbre différentielle graduée commutative naturelle sur $\Lambda \mathcal{G}^*$.

De façon analogue, l'algèbre $\Omega_{DR}(E(V, G; \eta_\gamma))$ est canoniquement munie d'une structure de G -algèbre différentielle graduée commutative. L'action de G sur $\Omega_{DR}(E(V, G; \eta_\gamma))$ est définie à partir de la structure de G -fibré sur $E(V, G; \eta_\gamma)$.

La connexion θ_{η_γ} définit un morphisme de G -algèbres graduées commutatives

$$\Lambda \mathcal{G}^* \xrightarrow{\zeta_{\eta_\gamma}} \Omega_{DR}(E(V, G; \eta_\gamma)) ;$$

si α est un élément de $\Lambda^n \mathcal{G}^*$ alors $\zeta_{\eta_\gamma} \alpha$ est définie par

$$(\zeta_{\eta_\gamma} \alpha)(X_1, \dots, X_n) = \alpha(\theta_{\eta_\gamma}(X_1), \dots, \theta_{\eta_\gamma}(X_n)),$$

pour tout n -uple $(X_1, \dots, X_n)$ de champs de vecteurs sur $E(V, G; \eta_\gamma)$ (le morphisme ζ_{η_γ} commute aux différentielles car θ_{η_γ} est sans courbure).

Ces notions étant bien connues, pour plus de détails cf. [15]. Désignons par $(\Lambda \mathcal{G}^*)_H$ la sous-algèbre différentielle graduée commutative de $\Lambda \mathcal{G}^*$ des éléments

H -basiques. Cette sous-algèbre s'identifie canoniquement au sous-complexe des formes G -invariantes sur l'espace homogène G/H .

Nous en déduisons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda \mathcal{G}^* & \xrightarrow{\zeta_{\eta_\gamma}} & \Omega_{DR}(E(V, G; \eta_\gamma)) \\
 \uparrow & & \downarrow (q_{\eta_\gamma})^* \\
 (\Lambda \mathcal{G}^*)_H & \xrightarrow{(\zeta_{\eta_\gamma})_H} & \Omega_{DR}(E(V, G/H; \eta_\gamma)) \\
 & \searrow \alpha_\gamma & \downarrow (s_\gamma)^* \\
 & & \Omega_{DR}(V)
 \end{array} \quad (2)$$

Le diagramme (2) est donc induit par le diagramme topologique (1).

2.2 Les classes caractéristiques ne dépendent que de l'holonomie.

PROPOSITION 2.

Si (V, γ) et (V, γ') sont deux $\Gamma(G, H)$ -structures qui ont la même représentation d'holonomie, alors, pour tout $x \in \text{Im } \mu$, on a

$$\alpha_\gamma^*(x) = \alpha_{\gamma'}^*(x).$$

Démonstration. Considérons le carré cartésien suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 p_\mu^* B\Gamma(G, H) & \xrightarrow{p_2} & B\Gamma(G, H) \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_\mu \\
 B\Gamma(G, H) & \xrightarrow{\quad} & BG^\delta
 \end{array}$$

avec $p_\mu^* B\Gamma(G, H) = \{(v_1, v_2) \in B\Gamma(G, H) \times B\Gamma(G, H) : p_\mu(v_1) = p_\mu(v_2)\}$.

Les applications p_1 respectivement p_2 sont les restrictions au sous-espace $p_\mu^* B\Gamma(G, H)$ de la première et deuxième projection de $B\Gamma(G, H) \times B\Gamma(G, H)$ sur $B\Gamma(G, H)$.

Maintenant, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\mathcal{G}, K \cap H) & \xrightarrow{\chi_{\Gamma(G,H)}} & H^*(B\Gamma(G, H)) \\
 \uparrow \mu & & \uparrow p_\mu^* \\
 H^*(\mathcal{G}, K) & \xrightarrow{\chi_{\Gamma(G,K)}} & H^*(BG^\delta)
 \end{array}$$

On en déduit que si $x \in \text{Im } \mu$, alors

$$\chi_{\Gamma(G,H)}(x) \in \text{Im } p_\mu^*.$$

Par conséquent, on a

$$p_2^*(\chi_{\Gamma(G,H)}(x)) = p_1^*(\chi_{\Gamma(G,H)}(x)).$$

Soient maintenant (V, γ) et (V, γ') deux $\Gamma(G, H)$ -structures qui ont la même représentation d'holonomie. Désignons par f_γ (respectivement $f_{\gamma'}$) l'application classifiante de (V, γ) (respectivement (V, γ')). Les applications $p_\mu \circ f_\gamma$ et $p_\mu \circ f_{\gamma'}$ sont homotopes. On en déduit l'existence d'un morphisme $\mathcal{G}_{\gamma, \gamma'}$ tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc}
 V & & & & \\
 \searrow \mathcal{G}_{\gamma, \gamma'} & & \searrow f_\gamma & & \\
 & p_\mu^* B\Gamma(G, H) & \xrightarrow{p_2} & B\Gamma(G, H) & \\
 \searrow f_{\gamma'} & \downarrow p_1 & & \downarrow p_\mu & \\
 & B\Gamma(G, H) & \xrightarrow{p_\mu} & BG^\delta &
 \end{array}$$

Par conséquent

$$\alpha_\gamma^*(x) = f_\gamma^*(\chi_{\Gamma(G,H)}(x)) = \mathcal{G}_{\gamma, \gamma'}^*(p_2^*\chi_{\Gamma(G,H)}(x))$$

et

$$\alpha_{\gamma'}^*(x) = \mathcal{G}_{\gamma, \gamma'}^*(p_1^*\chi_{\Gamma(G,H)}(x))$$

d'où la conclusion. □

§3 Démonstration du théorème.

Désignons par C_{η_γ} la composante connexe de l'élément η_γ dans $\text{Hom}(\pi_1(V), G)$. Soit x un élément de $\text{Im } \mu$ de degré k . On définit la fonction suivante:

$$\begin{aligned} C_{\eta_\gamma} &\xrightarrow{\psi_x} H_{DR}^k(V) \\ \psi_x(\eta_{\gamma'}) &= s_\gamma^*((\zeta_{\eta_{\gamma'}})_H)^*(x) - \alpha_\gamma^*(x). \end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que ψ_x est une fonction constante égale à zéro. On notera

$$\alpha_{\gamma'}^*(x) = s_\gamma^*((\zeta_{\eta_{\gamma'}})_H)^*(x).$$

Les paragraphes 1 et 2 nous ont permis de montrer que ψ_x était bien définie.

La fonction ψ_x est continue. En effet, puisque $\alpha_{\gamma'}^*$ est indépendante du choix de la section s_γ , il suffit de montrer que $\zeta_{\eta_{\gamma'}}$ est continue.

Mais, par définition même de la topologie de $\text{Hom}(\pi_1(V), G)$, deux points η_γ et $\eta_{\gamma'}$ sont proches si et seulement si les applications classifiantes B_{η_γ} et $B_{\eta_{\gamma'}}$ sont proches. Ce qui veut dire que les structures plates $\theta_{\eta_{\gamma'}}$ et θ_{η_γ} sont proches. L'application $\zeta_{\eta_{\gamma'}}$ est donc continue.

L'application ψ_x est constante sur la partie lisse de C_{η_γ} . En effet, si $\eta_{\gamma'}$ est dans la composante connexe par arcs du point η_γ , il existe alors un chemin différentiable η_t qui joint η_γ et $\eta_{\gamma'}$. On en déduit des isomorphismes (de G/H -fibrés seulement)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_{\eta_t} \times G/H & \xleftarrow{\delta_t} & \tilde{V}_{\eta_\gamma} \times G/H \\ & \searrow & \swarrow \\ & V & \end{array}$$

Désignons par $\mathcal{F}_t$ le feuilletage qui est défini par la suspension de la représentation η_t , et par γ_t la $\Gamma(G, H)$ -structure $s_{\gamma_t}^*(\delta_t^* \mathcal{F}_t)$. On en déduit une famille à un paramètre

$$H^*(\mathcal{G}, K \cap H) \xrightarrow{\alpha_{\gamma_t}^*} H_{DR}^*(V)$$

telle que

$$\alpha_{\gamma_1}^* = \alpha_{\gamma'}^*$$

et

$$\alpha_{\gamma_0}^* = \alpha_\gamma^*.$$

On considère le morphisme Var introduit par Fuks ([7])

$$\text{Var}_{(k-1)} : \Lambda^k \mathcal{G}^* \rightarrow \Lambda^{k-1}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) \simeq \Lambda^{k-1} \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*.$$

HANTOUT

Pour $\phi \in \Lambda^k \mathcal{G}^*$, $x \in \Lambda^{k-1}$ et $y \in \mathcal{G}$, on pose

$$\text{Var}_{(k-1)}(\phi)(x \otimes y) = \phi(x \wedge y).$$

Si $\{x_1, \dots, x_m\}$ est une base de $\mathcal{G}$ et $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ la base duale, on a

$$\text{Var}_{(k-1)}(\omega_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\alpha_k}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \omega_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_{\alpha_j} \wedge \dots \wedge \omega_{\alpha_k} \otimes \omega_{\alpha_j}.$$

Par construction même $\text{Var}_{(k-1)}$ est un morphisme de G -modules (on rappelle que l'action de G sur $\Lambda^{k-1} \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ est l'action produit tensoriel). Remarquons que $\text{Var}_{(0)}$ est l'identité.

D'autre part,

$$\begin{aligned} i_x \circ \text{Var}_{(k)}(\phi)(v_2, \dots, v_k)(v) &= \phi(x, v_2, \dots, v_k, v) \\ \text{Var}_{(k-1)}(i_x \phi)(v_2, \dots, v_k)(v) &= \phi(x, v_2, \dots, v_k, v) \end{aligned}$$

d'où

$$i_x \circ \text{Var}_{(k)} = \text{Var}_{(k-1)} \circ i_x.$$

On déduit des formules de Koszul que le morphisme $\text{Var}_{(k)}$ commute aux différentielles. De façon analogue, on a un morphisme

$$H^k(\mathcal{G}, K \cap H) \xrightarrow{\text{Var}_{(k-1)}^*} H^{k-1}(\mathcal{G}, K \cap H; \mathcal{G}^*).$$

Notons par $\bar{\alpha}_{t_0}$ le morphisme

$$\begin{aligned} \Lambda^{k-1}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*) &\xrightarrow{\bar{\alpha}_{t_0}} \Omega_{DR}^k(V) \\ \bar{\alpha}_{t_0}(\phi \otimes \delta) &= \alpha_{\gamma_{t_0}}(\phi) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \alpha_{\gamma_t}(\delta). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \circ \alpha_{\gamma_t} = \bar{\alpha}_{t_0} \circ \text{Var}_{(k-1)}.$$

Mais, puisque

$$d(\phi \otimes \delta) = d\phi \otimes \delta + (-1)^{\deg \phi} \sum_{i,j} d\delta(x_i, x_j)(\phi \wedge \omega_i \otimes \omega_j - \phi \wedge \omega_j \otimes \omega_i)$$

et

$$d\delta = \sum_{i,j} d\delta(x_i, x_j) \omega_i \wedge \omega_j,$$

on a

$$\bar{\alpha}_{t_0}(d(\phi \otimes \delta)) = d(\bar{\alpha}_{t_0}(\phi \otimes \delta)).$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \alpha_{\gamma_t}^*(x) = \bar{\alpha}_{t_0}^* \circ \text{Var}_{(k-1)}^*(x).$$

L'hypothèse du théorème, nous dit que le groupe $H^{k-1}(\mathcal{G}, K \cap H; \mathcal{G}^*)$ est trivial. D'où

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \alpha_{\gamma_t}^*(x) = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi_x(\eta_{\gamma'}) = 0.$$

D'après le lemme de Sard, la partie lisse de $\mathcal{C}_{\eta_\gamma}$ est un ouvert dense de $\mathcal{C}_{\eta_\gamma}$. La fonction ψ_x est donc constante, égale à zéro. $\square$

§4 Démonstration des corollaires.

Démonstration du Corollaire 1.

Si G est un groupe algébrique, $\text{Hom}(\pi_1(V), G)$ est une sous-variété algébrique (éventuellement non lisse) de G^ℓ .

Un théorème classique de Whitney ([16]) affirme que le nombre $c_{(\pi_1(V), G)}$ est fini. $\square$

Démonstration du Corollaire 2.

Désignons par $G \xrightarrow{Ad} Ad(G)$ la représentation adjointe de G et par $Ad(G)$ le groupe adjoint.

On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Ad(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longrightarrow & Ad(G)/Ad(H) \end{array}$$

Par conséquent, on a un morphisme noté encore Ad

$$\Gamma(G, H) \xrightarrow{Ad} \Gamma(Ad(G), Ad(H))$$

avec

$$\lambda_{(G,H)}^*(y) = (BAd)^* \circ \lambda_{(Ad(G), Ad(H))}^*(y)$$

d'où

$$\mathcal{N}_{\Gamma(G,H)}(\lambda_{(G,H)}^*(y), V) \leq \mathcal{N}_{\Gamma(Ad(G), Ad(H))}(\lambda_{(Ad(G), Ad(H))}^*(y), V).$$

HANTOUT

Comme $Ad(G)$ est semi-simple, on en déduit que

$$\mathcal{N}_{\Gamma(G,H)}(\lambda_{(G,H)}^*(y), V) \leq c_{(\pi_1(V), Ad(G))}$$

si

$$\lambda_{(G,H)}^*(y) \in \text{Im } \mu.$$

Puisque $Ad(G)$ est un groupe algébrique, le nombre $c_{(\pi_1(V), Ad(G))}$ est fini, d'où le corollaire.

Soit $\mathbb{R}[c_1, \dots, c_q]$ l'algèbre graduée des polynômes à coefficients réels sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_q$ du groupe linéaire $GL(q; \mathbb{R})$ qui sont invariants par la représentation adjointe. Les polynômes c_i sont définis par l'égalité suivante:

$$\det(A - \lambda I_q) = (-1)^q \lambda^q + \sum_{i=1}^q (-1)^i c_i(A) \lambda^{q-i}$$

pour toute matrice A dans $\mathcal{G}_q$.

On note par $(> q)$, l'idéal de $\mathbb{R}[c_1, \dots, c_q]$ engendré par les polynômes de degré plus grand que q .

Désignons par WO_q l'algèbre graduée suivante:

$$WO_q = \Lambda(h_1, h_3, \dots, h_{2p+1}) \otimes \mathbb{R}[c_1, \dots, c_q] / (> q),$$

avec la convention que c_i est de degré $2i$, l'élément h_i de degré $2i - 1$ et l'entier $(2p + 1)$ égal soit à $(q - 1)$, soit à q .

On munit WO_q de la différentielle suivante:

$$d(h_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i \quad , \quad d(1 \otimes c_j) = 0.$$

Une base de $H^*(WO_q)$ due à Vey ([15]) est donnée par les classes

$$h_I c_J = h_{i_1} \dots h_{i_k} c_{j_1} \dots c_{j_\ell}$$

où $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$, $(j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_\ell)$ et si i_0 est le plus petit entier de $\{i_1, \dots, i_k\}$ (avec la convention $i_0 = +\infty$ si $I = \emptyset$) et j_0 le plus petit entier impair de l'ensemble $\{j_1, \dots, j_\ell\}$, on a les relations

$$\begin{aligned} i_0 &\leq j_0 \\ i_0 + |J| &= i_0 + (j_1 + \dots + j_\ell) \geq q + 1. \end{aligned}$$

D'après un travail de Bott et Haefliger ([3]), on sait que l'algèbre différentielle graduée WO_q est un modèle au sens de Koszul-Sullivan, non minimal, pour la cohomologie continue de l'espace classifiant de Haefliger $B\Gamma_q$.

Démonstration du Corollaire 3.

On identifie la sphère S^q à l'espace des demi-droites de $\mathbb{R}^{q+1}$. L'action linéaire de $SL(q+1, \mathbb{R})$ sur S^q est transitive. Soit H le sous-groupe de $SL(q+1, \mathbb{R})$ qui fixe de point $(1, 0, \dots, 0)$ de S^q .

Maintenant, on a le résultat suivant:

$$\begin{aligned} \lambda_{(SL(q+1, \mathbb{R}), H)}^*(h_I c_J) &= 0 & \text{si } i_1 + |J| > q + 1 \\ \lambda_{(SL(q+1, \mathbb{R}), H)}^*(h_I c_J) &\in \text{Im } \mu & \text{si } i_1 + |J| = q + 1. \end{aligned}$$

Ce résultat est une conséquence des travaux de Hantout ([12]) et de Heitsch ([14]).

Si on applique le Corollaire 2 à $\lambda_{(SL(q+1, \mathbb{R}), H)}^*(h_I c_J)$, on trouve que l'ensemble $B_{(SL(q+1, \mathbb{R}), S^q)}(h_I c_J)$ est fini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENSON, C., ELLIS, D.: Characteristic classes of transversely homogeneous foliations – Transactions of the A.M.S., 289,2 (1985), 849–859
- [2] BOTT, R.: On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms. L'enseignement mathématique, série II, 23 (1977), 209–220
- [3] BOTT, R., HAEFLIGER, A.: On characteristic classes of Γ -foliations. Bull. A.M.S. 78 (1972) 1038–1044
- [4] BROOKS, R., GOLDMAN, W.: The Godbillon–Vey of a transversely homogeneous foliation – Transactions of the A.M.S., 286,2 (1984), 651–664
- [5] EHRESMANN, C.: Les connexions infinitésimales dans un fibré différentiable. Colloque de Topologie de Bruxelles (1950), 29–55
- [6] EHRESMANN, C.: Sur les espaces localement homogènes. L'enseignement mathématique, série I, 35 (1936), 317–333
- [7] FUKS, D.B.: Cohomology of infinite dimensional Lie algebras and characteristic classes for foliations. J. Soviet. Math. 11 (1979), 922–980
- [8] GOLDMAN, W.: Ph.D. thesis, Princeton, 1982
- [9] HAEFLIGER, A.: Sur les classes caractéristiques des feuilletages. Séminaire Bourbaki, (1971), exp. 412
- [10] HAEFLIGER, A.: Differentiable cohomology, cours donné au C.I.M.E., 1976

HANTOUT

- [11] HANTOUT, Y.: Classes caractéristiques de $\Gamma(G, H)$ -structures et classifiants $B\Gamma(G, H)$. Publ. de l'IRMA de Lille, 1985
- [12] HANTOUT, Y.: Déformations de connexions, résidus et classes caractéristiques des feuilletages. Publ. de l'IRMA de Lille, 1985
- [13] HEITSCH, J.: Secondary invariants of transversely homogeneous foliations. Michigan Math. Journal, 33 (1986), 47–54
- [14] HEITSCH, J.: Flat bundles and residues for foliations. Invent. Math. 73 (1983), 271–285
- [15] KAMBER, F., TONDEUR, P.: Characteristic invariants of foliated bundles. Springer LN 493
- [16] WHITNEY, H.: Elementary structure of real algebraic varieties. Ann. of Math. 66, no. 3 (1957), 545–556

Université de Lille 1
U.F.R. de Mathématiques Pures
et Appliquées – U.A. 751
F-59655 Villeneuve d'Ascq

(Reçu le 10 Juni 1987)

