manuscripta math. 61, 49 - 62 (1988)

manuscripta
mathematica

Ein semialgebraischer Beweis der topologischen Form des Hauptsatzes von Zariski

Roland Huber

We give a semialgebraic proof of the topological form of Zariski's Main Theorem. As an application we deduce the Riemann Extension Theorem for isoalgebraic functions from Zariski's Main Theorem.

Einleitung

Die topologische Form des Hauptsatzes von Zariski lautet ([11, III.9])

(1) Sei X eine normale Varietät über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen und sei S der singuläre Ort von X. Sei U eine zusammenhängende offene Teilmenge von $X(\mathbf{C})$ (in der starken Topologie von $X(\mathbf{C})$). Dann ist $U \backslash S(\mathbf{C})$ zusammenhängend.

Zum Beweis von (1) betrachtet man den zu X assoziierten komplex analytischen Raum X^{an}. Dieser Raum ist lokal irreduzibel. (1) ergibt sich dann aus der Überlagerungsdarstellung irreduzibler komplex analytischer Mengenkeime und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ([7, Ch. III]).

Das Ziel dieser Note ist es, (1) ohne analytische Hilfsmittel mit rein semialgebraischen Methoden zu beweisen und auf beliebige reell abgeschlossene Körper zu verallgemeinern.

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, den wir für die ganze Arbeit fixieren. Sei $C = R(\sqrt{-1})$ der algebraische Abschluß von R. Für jede Varietät X über C trägt die Menge $X(C)$ der C-rationalen Punkte von X auf kanonische Weise eine R-semialgebraische Struktur. Analog zu (1) gilt

(2) Sei X eine normale Varietät über C und sei S der singuläre Ort von X. Für jede zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge U von $X(C)$ ist $U \backslash S(C)$ zusammenhängend.

Für $R = \mathbb{R}$ sind (1) und (2) äquivalent. Der Beweis von (2) verläuft ähnlich dem Beweis von (1). Jedoch anstelle der Garbe der holomorphen Funktionen auf $X(\mathbf{C})$ arbeiten wir mit der Garbe der isoalgebraischen Funktionen auf $X(C)$.

Die Arbeit ist in drei Abschnitte eingeteilt. Im ersten Abschnitt gehen wir kurz auf die Definition isoalgebraischer Räume und Morphismen ein. Im Abschnitt zwei werden einige Eigenschaften isoalgebraischer Morphismen dargestellt, die zum Beweis des Hauptsatzes von Zariski im Abschnitt drei benötigt werden. Als Anwendung des Hauptsatzes von Zariski beweisen wir im dritten Abschnitt noch den Riemannschen Hebbarkeitssatz für isoalgebraische Funktionen.

1. Isoalgebraische Räume und Morphismen

Im folgenden verstehen wir unter einer Varietät immer ein separiertes Schema von endlichem Typ über C, ein Morphismus zwischen Varietäten ist immer ein Morphismus über C.

Isoalgebraische Räume und Morphismen wurden von M. Knebusch in [10] eingeführt. Ausführlicher sind diese Definitionen in [9] dargestellt. Wir wiederholen hier kurz die wichtigsten Begriffe, die wir benötigen. Die isoalgebraische Geometrie baut auf die semialgebraische Geometrie auf, die in [3], [4], [5] ausführlich dargestellt ist.

Sei X eine Varietät. Die Menge $X(C)$ der C-rationalen Punkte von X trägt auf kanonische Weise die Struktur eines semialgebraischen Raumes über R. Diese Struktur ist durch folgende Eigenschaft festgelegt: Ist U eine Zariski-offene affine Teilmenge von X und betrachtet man U als abgeschlossene Untervarietät eines $\mathbf{A}^n$, $U \hookrightarrow \mathbf{A}^n$, so ist $U(C)$ eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und die Einschränkung der semialgebraischen Struktur von $X(C)$ auf $U(C)$ ist die Teilraumstruktur der semialgebraischen Teilmenge $U(C)$ von $R^{2n}, U(C) \hookrightarrow \mathbf{A}^n(C) = C^n = R^{2n}$.

Satz 1.1 ([10]). Ist X n-dimensional und irreduzibel, so ist der semialgebraische Raum $X(C)$ rein von der Dimension $2n$, d.h. jede nichtleere offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ hat die semialgebraische Dimension $2n$.

Satz 1.1 ist die fundamentale Eigenschaft, in der sich die semialgebraische Geometrie der Varietäten über C von der semialgebraischen Geometrie der Varietäten über R unterscheidet.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein etaler Morphismus zwischen Varietäten. Dann ist $f_C : X(C) \longrightarrow Y(C)$ ein lokaler semialgebraischer Isomorphismus, d.h. zu jedem $x \in X(C)$ gibt es eine offene semialgebraische Umgebung U von x in $X(C)$, so daß $f_C(U)$ eine offene semialgebraische Umgebung von $f(x)$ in $Y(C)$ ist und $f_C|U : U \longrightarrow f_C(U)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Nach [4, II.13.8] gibt es dann eine zulässige offene Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von $X(C)$, so daß $f_C|U_i : U_i \longrightarrow f_C(U_i)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist für jedes $i \in I$. Wir wollen $X(C)$ und $Y(C)$ mit den „kleinst möglichen algebraischen" Garben $\mathcal{A}_X$ und $\mathcal{A}_Y$ versehen und f_C so zu einem Morphismus geringter Räume $g = (f_C, \vartheta) : (X(C), \mathcal{A}_X) \longrightarrow (Y(C), \mathcal{A}_Y)$ fortsetzen, daß $g|U_i : (U_i, \mathcal{A}_X|U_i) \longrightarrow (f_C(U_i), \mathcal{A}_Y|f_C(U_i))$ ein Isomorphismus wird für jedes $i \in I$. Dies geschieht folgendermaßen.

Zu jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von $X(C)$ hat man eine Kategorie $I(U)$. Die Objekte von $I(U)$ sind die Tripel (Y, V, f), wobei $f : Y \longrightarrow X$ ein etaler Morphismus von Varietäten und V eine offene semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$ ist, so daß $f|V : V \longrightarrow U$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Die Morphismen von (Y, V, f) nach (Y', V', f') in der Kategorie $I(U)$ sind die Morphismen von Varietäten $g : Y' \longrightarrow Y$, so daß $f \circ g = f'$ und $g(V') \subseteq V$. Die Kategorie $I(U)$ ist filtrierend. Jedem Objekt (Y, V, f) von $I(U)$ ordnen wir die C-Algebra $\mathcal{O}_Y(Y)$ zu. Durch $U \longmapsto P_X(U) := \varinjlim_{I(U)} \mathcal{O}_Y(Y)$ erhält man eine Prägarbe P_X auf $X(C)$.

P_X ist separiert. Die zu P_X assoziierte Garbe heißt die Garbe der isoalgebraischen Funktionen auf X und wird mit $\mathcal{A}_X$ bezeichnet. Der C-geringte Raum $(X(C), \mathcal{A}_X)$ wird mit X^h bezeichnet. (C-geringte Räume und Morphismen C-geringter Räume werden hier immer im Sinne von Definition 2 aus [4, I.1] benutzt.) Die C-geringten Räume $(U, \mathcal{A}_X|U)$, wobei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ ist, heißen die offenen isoalgebraischen Teilräume von X.

Für jedes $x \in X(C)$ ist der Halm $\mathcal{A}_{X,x}$ eine lokale C-Algebra mit Residuenkörper C. $\mathcal{A}_{X,x}$ ist die Henselisierung des Halms der algebraischen Strukturgarbe von X in x. Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und sei $f \in \mathcal{A}_X(U)$. Für jedes $x \in U$ bezeichnet $f(x) \in C$ das Bild von f in dem Residuenkörper $\mathcal{A}_{X,x}/m_x \cong C$. Ist X reduziert, so ist f eindeutig bestimmt durch die Funktion $\bar{f} : U \longrightarrow C, x \longmapsto f(x)$. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.1.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Varietäten. f induziert auf kanonische Weise einen Morphismus C-geringter Räume $f^h = (g, \vartheta) : X^h \longrightarrow Y^h$. Hierbei ist f^h folgendermaßen definiert. Wir setzen $g = f_C$. Wir definieren einen Prägarbenmorphismus $\eta : P_Y \longrightarrow g_* P_X$, dessen assoziierter Garbenmorphismus ϑ ist. Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$ und sei s ein Element aus $P_Y(U)$ repräsentiert durch ein Objekt (Y', U', p) aus $I(U)$ und ein Element t aus $\mathcal{O}_{Y'}(Y')$. Sei X' das Faserprodukt $X \times_Y Y'$ und seien $p' : X' \longrightarrow X$ und $f' : X' \longrightarrow Y'$ die Projektionen. $(X', (f'_C)^{-1}(U'), p')$ ist ein Objekt aus $I(g^{-1}(U))$. $\eta(s)$ ist definiert als das Element aus $P_X(g^{-1}(U))$ repräsentiert durch $(X', (f'_C)^{-1}(U'), p')$ und $(f')^*(t) \in \mathcal{O}_{X'}(X')$.
Die Zuordnung $X \longmapsto X^h, f \longmapsto f^h$ ist ein Funktor von der Kategorie der Varietäten in die Kategorie der C-geringten Räume. (In [8, 12.11] ist gezeigt, daß dieser Funktor volltreu ist.) Sei nun $f : X \longrightarrow Y$ ein etaler Morphismus und sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$, so daß $f_C|U : U \longrightarrow f_C(U)$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Unmittelbar aus der Definition der Garben $\mathcal{A}_X$ und $\mathcal{A}_Y$ folgt, daß $f^h|U : (U, \mathcal{A}_X|U) \longrightarrow (f_C(U), \mathcal{A}_Y|f_C(U))$ ein Isomorphismus C-geringter Räume ist.

Seien X eine Varietät, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $f \in \mathcal{A}_X(U)$ eine isoalgebraische Funktion auf U. Unter einer etalen Faktorisierung von f versteht man ein Tupel (s, f'), wobei $s = (Y, V, g)$ ein Objekt aus $I(U)$ und f' ein Element aus $\mathcal{O}_Y(Y)$ ist, so daß $(g^h|V)^*(f) = f'|V$. Hierbei ist $g^h|V : (V, \mathcal{A}_Y|V) \longrightarrow (U, \mathcal{A}_X|U)$ der eben beschriebene Isomorphismus C-geringter Räume. Entsprechend der Definition der Garbe $\mathcal{A}_X$ gibt es eine endliche Überdeckung von U durch offene semialgebraische Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ von $X(C)$, so daß jede Einschränkung $f|U_i$ eine etale Faktorisierung besitzt. Es gilt

Satz 1.2 ([10]). Seien X eine normale Varietät, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $f \in \mathcal{A}_X(U)$. Dann besitzt f eine etale Faktorisierung.

Satz 1.2 läßt sich einfach beweisen, indem man den Graph von f betrachtet (vgl. [1]).

Bemerkung: In den Beweisen des 3. Abschnittes spielt Satz 1.2 eine wichtige Rolle. Deshalb wollen wir hier die Konstruktion der etalen Faktorisierung entsprechend [1] erläutern. (Die hierbei verwendeten Begriffe werden später noch definiert.) Dabei wird deutlich, warum gerade auf normalen Varietäten etale Faktorisierungen von isoalgebraischen Funktionen so leicht zu konstruieren sind. Wir gehen also aus von der Situation des Satzes 1.2. OE ist U zusammenhängend. Der Graph $G = \{(x, f(x)) \in U \times C \mid x \in U\}$ von f ist eine isoalgebraische Teilmenge des isoalgebraischen Raumes $U \times (\mathbf{A}^1)^h$. Sei $p : X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow X$ die Projektion. Versieht man G mit der reduzierten Teilraumstruktur $\mathcal{O}_G$, so ist $p^h|G : (G, \mathcal{O}_G) \longrightarrow (U, \mathcal{A}_X|U)$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Deshalb ist $(G, \mathcal{O}_G)$ ein normaler und irreduzibler isoalgebraischer Raum ([8, §7]). Sei Z der Zariski-Abschluß von G in $X \times \mathbf{A}^1$. Es ist Z irreduzibel und $\dim Z = \dim G$. Wir versehen Z mit der reduzierten Teilraumstruktur. Sei W der offene isoalgebraische Teilraum $(p^{-1}(U) \cap Z(C), \mathcal{A}_Z \mid p^{-1}(U) \cap Z(C))$ von Z. Es ist G eine irreduzible Komponente von W ([8, §7]). Sei $q : S \longrightarrow Z$ die Normalisierung von Z. Es ist dann $q^h|q^{-1}(W) : q^{-1}(W) \longrightarrow W$ die Normalisierung des isoalgebraischen Raumes W. Sei V die Zusammenhangskomponente von $q^{-1}(W)$ mit $q(V) = G$. Es ist dann $q^h|V : V \longrightarrow G$ die Normalisierung von G und somit ein isoalgebraischer Isomorhismus. Also ist $g^h|V : V \longrightarrow U$ ein isoalgbraischer Isomorphismus, wobei $g = (p|Z) \circ q : S \longrightarrow X$. Deshalb liegt V im etalen Ort Y des Morphismus g. Sei $u : X \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow A^1$ die Projektion und sei $t = ((u|Z) \circ q)^*(z) \in \mathcal{O}_S(S)$, wobei $z \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}(\mathbf{A}^1)$ die Koordinatenfunktion auf $\mathbf{A}^1$ ist. Es ist $s = (Y, V, g|Y)$ ein Objekt aus $I(U)$ und $(s, t|Y)$ eine etale Faktorisierung von f.

Korollar 1.3. Seien X eine normale Varietät, U eine offene semialgebraische Teilmenge von $X(C)$ und $f \in \mathcal{A}_X(U)$. Dann gibt es eine normale Varietät Y, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $Y(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge W von Y mit $V \subseteq W$, ein $f' \in \mathcal{O}_Y(W)$ und einen endlichen Morphismus $p : Y \longrightarrow X$, so daß $p^h|V : (V, \mathcal{A}_Y|V) \longrightarrow (U, \mathcal{A}_X|U)$ ein Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f'|V$.

Beweis. Sei $((W, V, g), f')$ eine etale Faktorisierung von f. Nach [6, 8.12.11] hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i} & Y \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & X & \end{array},$$

wobei Y eine normale Varietät, i eine offene Immersion und p endlich ist.

Definition 1.4. Ein lokal isoalgebraischer Raum über (C, R) ist ein C-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine zulässige offene Überdeckung $(U_i | i \in I)$ besitzt, so daß jeder offene Teilraum $(U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ als C-geringter Raum isomorph ist zu einem offenen isoalgebraischen Teilraum einer Varietät. Kann man I endlich wählen, so heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ isoalgebraisch. Ein isoalgebraischer Morphismus zwischen lokal isoalgebraischen Räumen ist ein Morphismus in der Kategorie der C-geringten Räume.

Wir setzen hier voraus, daß alle lokal isoalgebraischen Räume X separiert sind, d.h. zu beliebigen $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es zulässige offene Mengen U und V von X mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal isoalgebraischer Raum über (C, R). Es gibt eine kanonische Garbe $\mathcal{C}_X$ von R-wertigen Funktionen auf dem verallgemeinerten topologischen Raum X, so daß $(X, \mathcal{C}_X)$ ein lokal semialgebraischer Raum über R ist. Deshalb kann man auch von lokal semialgebraischen Teilmengen bzw. lokal semialgebraischen Funktionen auf lokal isoalgebraischen Räumen sprechen. $(X, \mathcal{C}_X)$ heißt der zu $(X, \mathcal{O}_X)$ assoziierte lokal semialgebraische Raum und wird mit $|X|$ bezeichnet.$\mathcal{C}_X$ ist durch folgende Eigenschaft bestimmt: Ist U eine zulässige offene Teilmenge von X und $(g, \vartheta) : (U, \mathcal{O}_X|U) \longrightarrow (V, \mathcal{A}_Y|V)$ ein isoalgebraischer Isomorphismus von $(U, \mathcal{O}_X|U)$ auf einen offenen isoalgebraischen Teilraum einer Varietät Y, so ist $g : (U, \mathcal{C}_X|U) \longrightarrow (V, \mathcal{C}_Y|V)$ ein Isomorphismus R-geringter Räume, wobei $\mathcal{C}_Y$ die Garbe der semialgebraischen Funktionen auf $Y(C)$ ist.
Ein lokal isoalgebraischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt reduziert (bzw. normal, bzw. regulär), wenn für jedes $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ reduziert (bzw. normal, bzw. regulär) ist. Seien U eine zulässige offene Teilmenge von X und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Die Funktion $\bar{f} : U \longrightarrow C, x \longmapsto f(x) \in \mathcal{O}_{X,x}/m_x \cong C$ ist lokal semialgebraisch. Ist X reduziert, so ist f eindeutig durch $\bar{f}$ bestimmt.

Die zugrundeliegende Menge eines lokal isoalgebraischen Raumes trägt die Struktur eines verallgemeinerten topologischen Raumes. Deshalb kann man auf lokal isoalgebraischen Räumen im allgemeinen nicht so vom lokalen auf globale schließen, wie man es von topologischen Räumen gewohnt ist. Der nachfolgende Satz gibt zwei wichtige Beispiele an, in denen diese Schlußweise doch erlaubt ist.

Satz 1.5.

i) Sei $f = (g, \vartheta) : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus zwischen isoalgebraischen Räumen. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X und eine offene semialgebraische Umgebung V von $f(x)$ in Y, so daß $f|U : (U, \mathcal{O}_X|U) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_Y|V)$ ein Isomorphismus ist (oder äquivalent dazu: Für jedes $x \in X$ ist $\vartheta_x : \mathcal{O}_{Y,g(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ein Isomorphismus). Weiterhin sei g bijektiv. Dann ist f ein Isomorphismus.

ii) Sei X ein normaler lokal isoalgebraischer Raum und sei $f : X \longrightarrow C$ eine lokal semialgebraische Funktion. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X, so daß $f|U$ isoalgebraisch ist. Dann ist f isoalgebraisch.

i) ist in [8, 1.3.11] gezeigt. Der Beweis von ii) verläuft analog dem Beweis von Satz 1.2.

Bemerkung: 1.5.i gilt im allgemeinen nicht, wenn X lokal isoalgebraisch ist. 1.5.ii bleibt richtig, wenn anstelle von X normal nur X reduziert vorausgesetzt wird ([8, 10.6]).

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem lokal isoalgebraischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. $\mathcal{F}$ heißt von endlichem Typ auf X, wenn es eine zulässige offene Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X gibt, so daß man für jedes $i \in I$ einen surjektiven $\mathcal{O}_X|U_i$-Modulgarbenmorphismus $(\mathcal{O}_X|U_i)^{n_i} \longrightarrow \mathcal{F}|U_i$ hat. $\mathcal{F}$ heißt kohärent, wenn $\mathcal{F}$ von endlichem Typ auf X ist und wenn für jede zulässige offene Teilmenge U von X und jeden $\mathcal{O}_X|U$-Modulgarbenmorphismus $(\mathcal{O}_X|U)^n \longrightarrow \mathcal{F}|U$ der Kern von endlichem Typ auf U ist.

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ eines lokal isoalgebraischen Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ ist kohärent ([8, 1.2.5]). Mit Hilfe kohärenter Idealgarben von X lassen sich entsprechend wie in der komplex analytischen Geometrie lokal isoalgebraische Teilräume von X definieren ([9]). Wir wollen hier nur die reduzierte Teilraumstruktur einer lokal isoalgebraischen Teilmenge von X beschreiben. Eine Teilmenge A von X heißt lokal isoalgebraisch, wenn es eine zulässige offene Überdeckung $(U_i | i \in I)$ von X gibt, so daß $A \cap U_i$ die Nullstellenmenge endlich vieler isoalgebraischer Funktionen auf U_i ist für jedes $i \in I$. Zu einer lokal isoalgebraischen Teilmenge A von X definiert man wie üblich eine Idealgarbe J_A durch $J_A(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) = 0$ für jedes $x \in A \cap U\}$. J_A ist kohärent ([8, 1.5.6]). Sei $j : A \longrightarrow X$ die Inklusion. Man versieht A mit der gröbsten Struktur eines verallgemeinerten topologischen Raumes, so daß j stetig wird. Man hat dann die Garbe $j^{-1}(\mathcal{O}_X / J_A)$ auf A. Der C-geringte Raum $\left(A, j^{-1}(\mathcal{O}_X / J_A)\right)$ ist lokal isoalgebraisch ([8, 1.3.4.]). Die assoziierte lokal semialgebraische Struktur von $\left(A, j^{-1}(\mathcal{O}_X / J_A)\right)$ ist die Teilraumstruktur von $|X|$ auf der lokal semialgebraischen Teilmenge A.

Im folgenden bezeichnet dim immer die semialgebraische Dimension.

2. Einige Eigenschaften isoalgebraischer Morphismen

Als erstes formulieren wir den Identitätssatz für isoalgebraische Funktionen, der unmittelbar aus Satz 1.1 folgt.

Satz 2.1. Sei X ein zusammenhängender normaler lokal isoalgebraischer Raum. Dann ist der lokal semialgebraische Raum $|X|$ reindimensional. Sei f eine isoalgebraische Funktion auf X. Ist $\dim\{x \in X | f(x) = 0\} \geq \dim |X| - 1$, so ist $f = 0$.

Satz 2.2 ([10]). Sei X ein zusammenhängender regulärer lokal isoalgebraischer Raum und sei $f : X \longrightarrow C$ eine isoalgebraische Funktion auf X. Dann ist f konstant oder eine offene Abbildung.

Beweis. Es sei f nicht konstant. Es ist zu zeigen, daß f offen in jedem Punkt von X ist. Sei $a \in X$ gegeben. OE ist $f(a) = 0$. Der Keim $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}$ ist ungleich Null. OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum eines $\mathbf{A}^n$. Wir können dann auch OE annehmen, daß $n = 1$. Dann ist $\mathcal{O}_{X,a}$ ein diskreter Bewertungsring. Sei $s \in \mathcal{O}_{X,a}$ ein erzeugendes Element des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{X,a}$. Wir schreiben $f_a = t \cdot s^m$, wobei t eine Einheit in $\mathcal{O}_{X,a}$ und m eine natürliche Zahl ist. Da $\mathcal{O}_{X,a}$ henselsch mit algebraisch abgeschlossenem Residuenkörper der Charakteristik Null ist, gibt es eine Einheit r in $\mathcal{O}_{X,a}$ mit $t = r^m$. Indem wir s durch $r \cdot s$ ersetzen, erhalten wir $f_a = s^m$, wobei s ein erzeugendes Element des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{X,a}$ ist. OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum einer Varietät Y, so daß $s = d_a$ für ein $d \in \mathcal{O}_Y(Y)$. Sei $g : Y \longrightarrow \mathbf{A}^1$ der durch d induzierte Morphismus. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ {\scriptstyle g|X} & \downarrow & \searrow^{f} \\ & \mathbf{A}^1(C) & \longrightarrow C \\ & & z \longmapsto z^m. \end{array}$$

g ist unverzweigt in a. Nach [12, I.9.5] ist dann g sogar etal in a. Also ist f offen in a.

Satz 2.3 ([10]). Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von C^n und $f : U \longrightarrow C$ eine isoalgebraische Funktion. Für jedes $x \in U$ und jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_j}(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$. Die Funktion $\frac{\partial f}{\partial z_j} : U \longrightarrow C$ ist isoalgebraisch.

Beweis: Sei $((Y, V, g), f')$ eine etale Faktorisierung von f. OE ist der etale Morphismus $g : Y \longrightarrow \mathbf{A}^n$ standard, d.h. es gibt ein normiertes Polynom $P(T) \in C[X_1, \dots, X_n][T]$ mit: Y ist eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} C[X_1, \dots, X_n][T]/(P)$, so daß $\frac{\partial P}{\partial T}|Y$ eine Einheit in $\mathcal{O}_Y(Y)$ ist, und g ist die Einschränkung der Projektion $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1 \longrightarrow \mathbf{A}^n$ auf Y. Sei $h : U \longrightarrow C$ die isoalgebraische Funktion, so daß $U \longrightarrow V$, $x \longmapsto (x, h(x))$ die Umkehrabbildung von $g|V : V \longrightarrow U$ ist. Es genügt zu zeigen, daß h partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial z_j}$ isoalgebraisch sind. Angenommen, es sei h partiell differenzierbar. Wir wollen dann zeigen, daß $\frac{\partial h}{\partial z_j}$ isoalgebraisch ist. Für jedes $x \in U$ gilt $0 = P(x, h(x))$. Somit $0 = \frac{\partial P}{\partial X_j}(x, h(x)) + \frac{\partial P}{\partial T}(x, h(x)) \cdot \frac{\partial h}{\partial z_j}(x)$, wobei $\frac{\partial P}{\partial T}(x, h(x)) \neq 0$. Also

$$\frac{\partial h}{\partial z_j}(x) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial X_j}(x, h(x))}{\frac{\partial P}{\partial T}(x, h(x))}$$

und somit ist $\frac{\partial h}{\partial z_j}$ isoalgebraisch. Es bleibt noch zu zeigen, daß h partiell differenzierbar it. OE ist $n = 1$. Sei $x_0 \in U$ gegeben. Wir entwickeln das Polynom $P(X, T)$ um die Nullstelle $(x_0, h(x_0))$ und erhalten für jedes $x \in U$

$$0 = P(x, h(x)) = \sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ (p,q) \neq (0,0)}} a_{pq}(x - x_0)^p (h(x) - h(x_0))^q, \tag{$\star$}$$

mit $a_{pq} \in C$ und $a_{01} = \frac{\partial P}{\partial T}(x_0, h(x_0)) \neq 0$. Wir setzen

$$d(x) = \sum_{\substack{p \geq 0 \\ q \geq 1}} a_{pq}(x - x_0)^p (h(x) - h(x_0))^{q-1}$$

$$e(x) = \sum_{p \geq 1} a_{p0}(x - x_0)^{p-1}.$$

Es sind d und e stetige Funktionen auf U mit $d(x_0) = a_{01}$ und $e(x_0) = a_{10}$. Für jedes $x \in U$ mit $x \neq x_0$ und $d(x) \neq 0$ folgt aus ($\star$)

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = -\frac{e(x)}{d(x)}.$$

Also existiert der Limes $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ und es ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = -\frac{a_{10}}{a_{01}}$.

Die folgenden beiden Sätze betreffen endliche isoalgebraische Morphismen. Beweise hierzu findet man in [8, §3 und §4]. Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ zwischen lokal isoalgebraischen Räumen heißt quasiendlich in $x \in X$, wenn x isoliert in $f^{-1}(f(x))$ ist.

Satz 2.4. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus lokal isoalgebraischer Räume und sei $x \in X$. Dann sind äquivalent

i) $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ist endlich.

ii) $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ist quasiendlich.

iii) Es existieren eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X und eine offene semialgebraische Umgebung V von $f(x)$ in Y, so daß $f(U) \subseteq V$ und $f|U : U \longrightarrow V$ endlich ist.

iv) f ist quasiendlich in x.

Satz 2.5. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein endlicher Morphismus lokal isoalgebraischer Räume und sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Dann ist $f_*(\mathcal{F})$ eine kohärente Garbe auf Y.

Korollar 2.6. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus lokal isoalgebraischer Räume und sei $x \in X$, so daß $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv und endlich ist. Dann ist $f(X)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y.

Beweis: Nach Satz 2.4 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß f endlich ist. Sei J der Kern des Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$. Es ist $f(X) = \{y \in Y |\, J_y \neq \mathcal{O}_{Y,y}\}$. Nach Satz 2.5 ist $f_*\mathcal{O}_X$ und somit auch J kohärent. Da $J_{f(x)} = 0$, gibt es also eine offene semialgebraische Umgebung U von $f(x)$ in Y mit $J|U = 0$. Es ist dann $U \subseteq f(X)$.

Ebenso wie in der komplex analytischen Geometrie hat man auch in der isoalgebraischen Geometrie eine Überlagerungsdarstellung irreduzibler isoalgebraischer Keime.

Satz 2.7. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus lokal isoalgebraischer Räume. Sei x ein Punkt von X, so daß $\mathcal{O}_{X,x}$ integer, $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ normal und $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv und endlich ist. Dann gibt es eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X, eine offene semialgebraische Umgebung V von $f(x)$ in Y, ein Polynom $F \in \mathcal{O}_Y(V)[T]$ und einen isoalgebraischen Morphismus $s : U \longrightarrow Z$, wobei Z der durch F induzierte isoalgebraische Teilraum von $V \times (\mathbf{A}^1)^h$ ist, so daß gilt

i) F ist normiert und hat den Grad $[\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) : \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Y,f(x)})]$ und das Polynom $F_{f(x)} \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}[T]$ ist irreduzibel in $\mathcal{O}_{Y,f(x)}[T]$.

ii) Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f|U"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & V & \end{tikzcd},$$

wobei g die Einschränkung der Projektion $V \times (\mathbf{A}^1)^h \longrightarrow V$ auf Z ist. Es sind $f|U, g, s$ endlich und surjektiv. Ist $D \subseteq V$ die Nullstellenmenge der Diskriminante $d \in \mathcal{O}_Y(V)$ von F, so ist die Einschränkung $U \backslash f^{-1}(D) \longrightarrow Z \backslash g^{-1}(D)$ von s ein Isomorphismus.

Satz 2.7 ist in [8, 5.4] bewiesen. Der wesentliche Punkt zum Beweis von Satz 2.7 ist Korollar 2.6.

Satz 2.8. Sei $f = (h, \vartheta) : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus isoalgebraischer Räume, so daß $h : |X| \longrightarrow |Y|$ ein semialgebraischer Isomorphismus ist. Weiterhin sei X reduziert und Y normal. Dann ist f ein isoalgebraischer Isomorphismus.

Beweis: Gegeben sei ein $x \in X$. Sei g der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Da f eine offene Abbildung und Y reduziert ist, ist g injektiv. Nach Satz 2.4 ist g endlich. Sei y ein Primideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $g^{-1}(y) = (0)$. Sei $(T, \mathcal{O}_T)$ ein lokal abgeschlossener isoalgebraischer Teilraum von X mit $x \in T$ und $\mathcal{O}_{T,x} = \mathcal{O}_{X,x}/y$. Nach Korollar 2.6 ist $f(T)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y. Da f ein semialgebraischer Isomorphismus ist, ist T eine Umgebung von x in X. Da X reduziert ist, folgt hieraus $y = (0)$. Also ist $\mathcal{O}_{X,x}$ integer. Da f injektiv ist, folgt aus Satz 2.7, daß g einen Isomorphismus $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{Y,f(x)}) \longrightarrow \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$ induziert. Da $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ normal ist, ist g ein Isomorphismus. Nach Satz 1.5 ist f ein Isomorphismus.

Ist X eine Varietät über R, so hat man auf dem semialgebraischen Raum $X(R)$ eine Garbe $\mathcal{N}_X$, die analog zu der Garbe der isoalgebraischen Funktionen definiert ist ([2]). $\mathcal{N}_X$ heißt die Garbe der Nashfunktionen auf X. Ist X regulär, so ist $\mathcal{N}_X$ eine Garbe von R-wertigen Funktionen auf $X(R)$.

Satz 2.9 ([10]). Sei G eine offene semialgebraische Teilmenge von C^n und sei $i \in C$ eine Wurzel von -1. Es seien $u, v : G \longrightarrow R$ Nashfunktionen (hierbei betrachtet man G als offene semialgebraische Teilmenge von $R^{2n} = \mathbf{A}_R^{2n}(R)$), so daß $f = u + iv : G \longrightarrow C$ partiell differenzierbar ist, d.h. für jedes $x \in G$ und jedes $j \in \{1, ..., n\}$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z_j}(x)$. Dann ist f eine isoalgebraische Funktion.

Zum Beweis von Satz 2.9 benötigen wir das folgende Lemma

Lemma. Sei V eine zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge von C^n mit $V \cap R^n \neq \emptyset$. Sei f eine isoalgebraische Funktion auf V, so daß $f(x) = 0$ für jedes $x \in V \cap R^n$. Dann ist $f = 0$.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n, mit Induktionsanfang $n = 0$. Sei P ein offener Polyzylinder des C^n, der in V liegt und dessen Mittelpunkt ein Element von R^n ist. Sei $s : P \longrightarrow C$ die Projektion auf die letzte Koordinate. Nach Induktionsvoraussetzuung ist $f|s^{-1}(s(x)) = 0$ für jedes $x \in P \cap R^n$. Deshalb ist $\dim\{x \in V | f(x) = 0\} \geq 2n - 1$. Nach dem Identitätssatz 2.1 ist $f = 0$.

Nun zum Beweis von Satz 2.9. Sei r die lineare Abbildung $C^{2n} \longrightarrow C^n, (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \longmapsto (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$. Sei s die Einschränkung von r auf $r^{-1}(G), s : r^{-1}(G) \longrightarrow G$. Nach Voraussetzung sind $u' = (u \circ s)|r^{-1}(G) \cap R^{2n}$ und $v' = (v \circ s)|r^{-1}(G) \cap R^{2n}$ Nashfunktionen auf der offenen semialgebraischen Teilmenge $r^{-1}(G) \cap R^{2n}$ des R^{2n}. Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung P von $r^{-1}(G) \cap R^{2n}$ in $r^{-1}(G)$ und eine isoalgebraische Funktion $h : P \longrightarrow C$, so daß $h|r^{-1}(G) \cap R^{2n} = u' + iv'$. Sei Q eine offene semialgebraische

Umgebung von $r^{-1}(G) \cap R^{2n}$ in P, so daß $Z \cap R^{2n} \neq \emptyset$ für jede Zusammenhangskomponente Z von Q und $t := r|Q : Q \longrightarrow G$ zusammenhängende Fasern hat. Wir setzen $g := h|Q$. Die Vektoren $e_1 = (-i, 1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 0, -i, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, -i, 1)$ sind eine Basis des Kerns von r. Man ergänze $e_1, \ldots, e_n$ zu einer Basis $e_1, \ldots, e_{2n}$ von C^{2n}. Seien $z_1, \ldots, z_{2n}$ die zugehörigen Koordinatenfunktionen. Es sind $\frac{\partial g}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial z_n}$ isoalgebraische Funktionen auf Q nach Satz 2.3. Da f partiell differenzierbar ist, hat man $\frac{\partial g}{\partial z_j}|Q \cap R^{2n} = 0$ für $j = 1, \ldots, n$. Nach dem obigen Lemma ist dann $\frac{\partial g}{\partial z_j} = 0$ auf Q für $j = 1, \ldots, n$, d.h. g ist konstant auf den Fasern von t. Deshalb gibt es zu jedem $x \in G$ eine offene semialgebraische Umgebung W von x in G, so daß $f|W$ isoalgebraisch ist. Nach Satz 1.5 ist f isoalgebraisch.

Bemerkung: Satz 2.9 läßt sich verschärfen. Es gilt nämlich, daß jede partiell differenzierbare semialgebraische Funktion $f : G \longrightarrow C$ isoalgebraisch ist ([8, 10.4]).

3. Beweis des Hauptsatzes von Zariski und des Riemannschen Hebbarkeitssatzes für isoalgebraische Funktionen

Seien X ein lokal isoalgebraischer Raum, A eine abgeschlossene lokal semialgebraische Teilmenge von X und $f \in \mathcal{O}_X(X \backslash A)$ eine isoalgebraische Funktion auf $X \backslash A$. f heißt lokal beschränkt längs A, wenn es zu jedem $a \in A$ eine offene semialgebraische Umgebung U von a in X und ein $s \in R$ gibt, so daß $|f(x)| < s$ für jedes $x \in U \backslash A$.

Lemma 3.1. Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von C, u ein Punkt von U und $f : U \backslash \{u\} \longrightarrow C$ eine isoalgebraische Funktion, die lokal beschränkt längs $\{u\}$ ist. Dann läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

Beweis: *OE* ist U zusammenhängend. Nach Korollar 1.3 gibt es eine reguläre zusammenhängende eindimensionale Varietät X, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $X(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge L von X mit $V \subseteq L$, ein $f' \in \mathcal{O}_X(L)$ und einen endlichen Morphismus $p : X \longrightarrow \mathbf{A}^1$, so daß $p^h|V : V \longrightarrow U \backslash \{u\}$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f'|V$. Sei $p^{-1}(u) = \{v_1, \ldots, v_r\}$ und sei V_i eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung von v_i in $p^{-1}(U)$ mit $p^{-1}(u) \cap V_i = \{v_i\} (i = 1, \ldots, r)$. Da es eine offene semialgebraische Umgebung T von u in U mit $p^{-1}(T) \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_r$ gibt, existiert ein $s \in \{1, \ldots, r\}$ mit $(V_s \backslash \{v_s\}) \cap V \neq \emptyset$. Da $V_s \backslash \{v_s\}$ zusammenhängend ist und V offen und abgeschlossen in $p^{-1}(U \backslash \{u\})$ ist, ist $V_s \backslash \{v_s\} \subseteq V$. Man setze $W = V \cup V_s$. Nach Satz 2.2 ist $p_C : X(C) \longrightarrow \mathbf{A}^1(C)$ eine offene Abbildung. Da $p_C|W : W \longrightarrow U$ bijektiv ist, ist $p_C|W$ ein semialgebraischer Isomorphismus. Nach Satz 2.8 ist $p^h|W : W \longrightarrow U$ ein isoalgebraischer Isomorphismus. Da f lokal beschränkt längs $\{u\}$ ist, ist v_s keine Polstelle der durch f' gegebenen rationalen Funktion $\tilde{f}$ auf X. Also liegt W im maximalen Definitionsbereich von $\tilde{f}$ und f läßt sich zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

Lemma 3.2. Seien U eine offene semialgebraische Teilmenge von C^n und A eine isoalgebraische Teilmenge von U. Für jedes $x \in C^{n-1}$ sei $r^{-1}(x) \cap A$ endlich, wobei $r : U \longrightarrow C^{n-1}$ die Projektion auf die ersten $n-1$ Koordinaten ist. Sei $f : U \backslash A \longrightarrow C$ eine semialgebraische Funktion, so daß sich $f|r^{-1}(x)\backslash A$ zu einer isoalgebraischen Funktion auf $r^{-1}(x)$ fortsetzen läßt für jedes $x \in C^{n-1}$. Dann läßt sich f zu einer semialgebraischen Funktion $g : U \longrightarrow C$ fortsetzen.

Beweis: Sei $g : U \longrightarrow C$ die Fortsetzung von f, so daß $g|r^{-1}(x)$ isoalgebraisch ist für jedes $x \in C^{n-1}$. Es ist zu zeigen, daß g stetig ist in jedem Punkt von A. Gegeben sei ein $a \in A$. OE ist $a = 0$. Sei ein $\epsilon \in R, \epsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 2.4 gibt es offene Polyzylinder P und Q in C^{n-1} und C mit jeweils Mittelpunkt 0, so daß $P \times \bar{Q} \subseteq U$ und $(P \times \partial Q) \cap A = \emptyset$, wobei $\partial Q = \bar{Q} \backslash Q$ der Rand von Q ist. Es gibt eine offene semialgebraische Umgebung P' von 0 in P, so daß $|g(p,q) - g(0,q)| < \frac{\epsilon}{2}$ für jedes $p \in P'$ und jedes $q \in \partial Q$. Nach dem Maximumprinzip (Satz 2.2) ist dann $|g(p,q) - g(0,q)| < \frac{\epsilon}{2}$ für jedes $p \in P'$ und jedes $q \in Q$. Sei Q' eine offene semialgebraische Umgebung von 0 in Q, so daß $|g(0,q) - g(0,0)| < \frac{\epsilon}{2}$ für jedes $q \in Q'$. Es ist dann $|g(y) - g(a)| < \epsilon$ für jedes $y \in P' \times Q'$.

Lemma 3.3. Seien U eine zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge von C^n und d eine isoalgebraische Funktion auf U, die nicht identisch Null ist. Seien $A = \{x \in U | d(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von d und $f : U \backslash A \longrightarrow C$ eine isoalgebraische Funktion, die lokal beschränkt längs A ist. Dann läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf U fortsetzen.

Beweis: Zunächst wollen wir zeigen, daß sich f zu einer semialgebraischen Funktion $g : U \longrightarrow C$ fortsetzen läßt, die unendlich oft partiell differenzierbar ist. Gegeben sei ein $u \in U$. OE ist $u = 0$. Sei V eine offene semialgebraische Umgebung von 0 in U, so daß $L \cap V$ zusammenhängend ist für jeden 1-dimensionalen Untervektorraum von C^n. Man wähle eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von C^n mit $e_1, \ldots, e_n \in V \backslash A$. Im folgenden sei C^n mit dem durch $e_1, \ldots, e_n$ gegebenen Koordinatensystem versehen. Sei $r_i : V \longrightarrow C^{n-1}$ die Projektion, die die i-te Koordinate wegläßt (im neuen Koordinatensystem), $i = 1, \ldots, n$. Nach dem Identitätssatz ist $r_i^{-1}(0) \cap A$ endlich für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Satz 2.4 gibt es eine offene semialgebraische Umgebung Q von 0 in V, so daß $s_i^{-1}(x) \cap A$ endlich ist für jedes $x \in C^{n-1}$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, wobei $s_i : Q \longrightarrow C^{n-1}$ die Einschränkung von r_i auf Q ist.
Nach 3.1 und 3.2 läßt sich $f|Q \backslash A$ zu einer semialgebraischen Funktion $h : Q \longrightarrow C$ fortsetzen. h ist unendlich oft partiell differenzierbar, denn: Sei D ein Differentialoperator der Form $\frac{\partial}{\partial z_{i_1}} \circ \ldots \circ \frac{\partial}{\partial z_{i_k}} (i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\})$ und sei j ein Element von $\{1, \ldots, n\}$. Wir nehmen an, daß Dh existiert und semialgebraisch ist, und wollen zeigen, daß $\frac{\partial(Dh)}{\partial z_j}$ existiert und semialgebraisch ist. Nach Satz 2.3 ist $Dh|Q \backslash A$ isoalgebraisch. Somit ist nach 3.1 auch $Dh|s_j^{-1}(x)$ isoalgebraisch für jedes $x \in C^{n-1}$. Deshalb existiert für jedes $u \in Q$ die partielle Ableitung $\frac{\partial(Dh)}{\partial z_j}(u)$. Sei t die Funktion $Q \longrightarrow C, u \longmapsto \frac{\partial(Dh)}{\partial z_j}(u)$. Nach Satz 2.3 ist $t|Q \backslash A$ isoalgebraisch und $t|s_j^{-1}(x)$ isoalgebraisch für jedes $x \in C^{n-1}$. Also sind die Voraussetzungen von 3.2 erfüllt und wir erhalten, daß t semialgebraisch ist.
Damit ist gezeigt, daß sich f zu einer semialgebraischen Funktion $g : U \longrightarrow C$ fortsetzt, die unendlich oft partiell differenzierbar ist. Wir schreiben $g = a + ib$, wobei a und b R-wertige Funktionen sind. a und b sind semialgebraisch und unendlich oft

partiell differenzierbar (nach den reellen Koordinaten des R^{2n}). Nach [3, Ch. 8] sind dann a und b Nashfunktionen. Folglich ist g isoalgebraisch nach Satz 2.9.

Lemma 3.4. Seien U eine zusammenhängende offene semialgebraische Teilmenge von C^n und F ein Polynom aus $\mathcal{A}_{\mathbf{A}^n}(U)[T]$. F sei normiert und irreduzibel in $\mathcal{A}_{\mathbf{A}^n}(U)[T]$ und die Diskriminante $d \in \mathcal{A}_{\mathbf{A}^n}(U)$ von F sei ungleich Null. Sei $A = \{x \in U | d(x) = 0\}$. Dann ist der durch $F|U\backslash A$ definierte isoalgebraische Teilraum X von $(U\backslash A) \times (\mathbf{A}^1)^h$ zusammenhängend und regulär.

Beweis: Sei $s : X \longrightarrow U\backslash A$ die Einschränkung der Projektion $(U\backslash A) \times (\mathbf{A}^1)^h \longrightarrow U\backslash A$ auf X. s ist eine Überlagerung. Angenommen, es sei X die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener semialgebraischer Teilmengen Z_1 und Z_2. Für jedes $u \in U\backslash A$ bilde man die Polynome in $C[T]$

$$G_1(u,T) = \prod_{k=1}^{i(u)} (T - a_k)$$

$$G_2(u,T) = \prod_{k=1}^{j(u)} (T - b_k)$$

wobei $a_1, \dots, a_{i(u)}, b_1, \dots, b_{j(u)} \in C$ dadurch bestimmt sind, daß $s^{-1}(u) \cap Z_1 = \{(u, a_1), \dots, (u, a_{i(u)})\}$ und $s^{-1}(u) \cap Z_2 = \{(u, b_1), \dots, (u, b_{j(u)})\}$. Es sind G_1 und G_2 Polynome aus $\mathcal{A}_{\mathbf{A}^n}(U\backslash A)[T]$. Nach Lemma 3.3 lassen sich G_1, G_2 zu Polynomen $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_{\mathbf{A}^n}(U)[T]$ fortsetzen. Es ist $\deg F_1 > 0, \deg F_2 > 0$ und $F = F_1 \cdot F_2$. Widerspruch zur Irreduzibilität von F.

Satz 3.5. Sei X ein zusammenhängender normaler lokal isoalgbraischer Raum und sei A eine lokal semialgebraische Teilmenge von X mit $\dim A \leq \dim |X| - 2$. Dann ist $X\backslash A$ zusammenhängend.

Beweis: Zunächst beweisen wir, daß es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene semialgebraische Umgebung U von x in X gibt, so daß $U\backslash A$ zusammenhängend ist. Sei $x \in X$ gegeben. Sei V eine offene semialgebraische Umgebung von x in X, so daß $(V, \mathcal{O}_X|V)$ isomorph ist zu einem offenen isoalgebraischen Teilraum einer irreduziblen normalen Varietät Y. Sei $f : Y \longrightarrow \mathbf{A}^n$ ein endlicher surjektiver Morphismus von Varietäten. Nach Satz 2.4 ist $\mathcal{A}_{\mathbf{A}^n, f(y)} \longrightarrow \mathcal{A}_{Y,y}$ endlich für jedes $y \in Y(C)$. Da $\dim \mathcal{A}_{\mathbf{A}^n, f(y)} = \dim \mathcal{A}_{Y,y}$, ist $\mathcal{A}_{\mathbf{A}^n, f(y)} \longrightarrow \mathcal{A}_{Y,y}$ dann auch injektiv. Somit gibt es nach Satz 2.7 und Lemma 3.4 eine offene semialgebraische Umgebung U von x in V und eine semialgebraische Teilmenge S von U, so daß $\dim S < \dim |X|$ und $U\backslash S$ eine zusammenhängende semialgebraische Mannigfaltigkeit ist. Da $\dim A \leq \dim |X| - 2$, ist dann $(U\backslash S)\backslash A$ zusammenhängend ([5, §13]). Es ist $(U\backslash S)\backslash A$ dicht in $U\backslash A$ und somit ist $U\backslash A$ zusammenhängend.
Angenommen, es sei $X\backslash A$ die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener lokal semialgebraischer Teilmengen Z_1 und Z_2. Es ist $X = \overline{X\backslash A} = \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$. Da X zusammenhängend ist, gibt es ein $x \in \bar{Z}_1 \cap \bar{Z}_2$. Sei U eine offene semialgebraische Umgebung von x in X, so daß $U\backslash A$ zusammenhängend ist. Es ist $U\backslash A$ die disjunkte Vereinigung von $U \cap Z_1$ und $U \cap Z_2$. Es ist $U \cap Z_1 \neq \emptyset$ und $U \cap Z_2 \neq \emptyset$. Widerspruch.

Damit ist der Hauptsatz von Zariski bewiesen. Denn in der Situation von (2) aus der Einleitung ist $\dim(U \cap S(C)) \leq \dim U - 4$.

Seien X ein lokal isoalgebraischer Raum, A eine nirgends dichte abgeschlossene lokal semialgebraische Teilmenge von X und $f \in \mathcal{O}_X(X \backslash A)$ eine isoalgebraische Funktion auf $X \backslash A$. f heißt schwach lokal beschränkt längs A, wenn es zu jedem $a \in A$ ein $t \in R$ gibt, so daß es in jeder Umgebung U von a in X ein $y \in U \backslash A$ gibt mit $|f(y)| < t$. Natürlich, wenn f lokal beschränkt längs A ist, so ist f schwach lokal beschränkt längs A. Nun können wir den Riemannschen Hebbarkeitssatz für isoalgebraische Funktionen formulieren.

Satz 3.6. Seien X ein zusammenhängender normaler lokal isoalgebraischer Raum, A eine abgeschlossene lokal semialgebraische Teilmenge von X und $f \in \mathcal{O}_X(X \backslash A)$ eine isoalgebraische Funktion auf $X \backslash A$. Dann gelten

i) Ist $\dim A \leq \dim |X| - 2$ und ist f schwach lokal beschränkt längs A, so läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf X fortsetzen.
ii) Ist $\dim A \leq \dim |X| - 3$, so läßt sich f zu einer isoalgebraischen Funktion auf X fortsetzen.

Beweis: Es sei $\dim A \leq \dim |X| - 2$. Nach Satz 3.5 ist $X \backslash A$ zusammenhängend. OE ist X ein offener isoalgebraischer Teilraum einer normalen Varietät Z. Nach Korollar 1.3 gibt es eine zusammenhängende normale Varietät Y, eine offene semialgebraische Teilmenge V von $Y(C)$, eine Zariski-offene Teilmenge W von Y mit $V \subseteq W$, ein
$f' \in \mathcal{O}_Y(W)$ und einen endlichen Morphismus $p : Y \longrightarrow Z$, so daß
$p^h|V : V \longrightarrow X \backslash A$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist und $(p^h|V)^*(f) = f'|V$.
Sei U der Abschluß von V in $p^{-1}(X)$. Es gilt
(1) Es ist $p|U : U \longrightarrow X$ ein semialgebraischer Isomorphismus.
Denn: Wir setzen $g := p|U : U \longrightarrow X$. Es ist g eine endliche Abbildung. Da $X \backslash A$ dicht in X ist, ist g surjektiv. Es bleibt noch zu zeigen, daß g injektiv ist. Gegeben sei ein $x \in X$. Es sei $g^{-1}(x) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Seien $U_1, \ldots, U_r$ paarweise disjunkte offene semialgebraische Umgebungen von $u_1, \ldots, u_r$ in U und sei T eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung von x in X mit $g^{-1}(T) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_r$. Nach Satz 3.5 ist $T \backslash A$ zusammenhängend und somit ist auch $g^{-1}(T \backslash A)$ zusammenhängend. Deshalb ist $g^{-1}(T \backslash A) \subseteq U_s$ für ein $s \in \{1, \ldots, r\}$. Da $g^{-1}(X \backslash A)$ dicht in U ist, ist $\emptyset \neq g^{-1}(X \backslash A) \cap g^{-1}(T) \cap U_i = g^{-1}(T \backslash A) \cap U_i$ für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$. Also ist $r = 1$.
Weiterhin gilt
(2) Es ist U eine offene semialgebraische Teilmenge von $Y(C)$.
Denn: Gegeben sei ein $u \in U$. Sei S eine zusammenhängende offene semialgebraische Umgebung von u in $p^{-1}(X)$. Es ist $S \cap V$ offen und abgeschlossen in $S \backslash p^{-1}(A)$, da V offen und abgeschlossen in $p^{-1}(X \backslash A)$ ist. Nach Satz 3.5 ist $S \backslash p^{-1}(A)$ zusammenhängend. Da $S \cap V \neq \emptyset$, ist also $S \backslash p^{-1}(A) = S \cap V \subseteq V$. Da $S \backslash p^{-1}(A)$ dicht in S ist, ist $S \subseteq U$.
Aus (1), (2) und Satz 2.8 folgt, daß $p^h|U : U \longrightarrow X$ ein isoalgebraischer Isomorphismus ist. Sei P der Polstellendivisor der durch f' gegebenen rationalen Funktion $\tilde{f}$ auf Y. Zum Beweis von Satz 3.6 ist noch zu zeigen, daß $U \cap P = \emptyset$. Sei zunächst f schwach lokal beschränkt längs A. Angenommen, es sei $U \cap P \neq \emptyset$. Es gibt dann einen Punkt $u \in U \cap P$, der nicht auf dem Nullstellendivisor von $\tilde{f}$ liegt. Für jedes

$t \in R$ gibt es dann eine offene semialgebraische Umgebung T von $p(u)$ in X, so daß $|f(x)| > t$ für jedes $x \in T \backslash A$. Widerspruch dazu, daß f schwach lokal beschränkt längs A ist. Sei nun $\dim A \leq \dim |X| - 3$. Es ist $U \cap P \subseteq p^{-1}(A)$. Deshalb ist $\dim U \cap P \leq \dim |X| - 3$. Der semialgebraische Raum $P(C)$ ist leer oder rein von der Dimension $\dim |X| - 2$. Also ist $U \cap P = \emptyset$.

Literatur

[1] *M. Artin, B. Mazur* : On periodic points, Ann. of Math. 81, 82-99 (1965)
[2] *M.F. Coste-Roy* : Faisceau structural sur le spectre réel et fonctions de Nash, Proc. Rennes 1981, Lecture Notes Math. 959, 406-432, Springer Verlag 1982
[3] *J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy* : Géométrie algébrique réelle, Ergebnisse der Math. 3. Folge Bd. 12, Springer Verlag 1987
[4] *H. Delfs, M. Knebusch* : Locally semialgebraic spaces, Lecture Notes Math. 1173, Springer Verlag 1985
[5] *H. Delfs, M. Knebusch* : Semialgebraic topology over a real closed field II, Math. Z. 178, 175-213 (1981)
[6] *A. Grothendieck, J. Dieudonné* : Eléments de Géométrie Algébrique IV, Publ. Math. IHES 28 (1966)
[7] *R.C. Gunning, H. Rossi* : Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall 1965
[8] *R. Huber* : Isoalgebraische Räume, Thesis, Universität Regensburg (1984)
[9] *R. Huber, M. Knebusch* : A glimpse at isoalgebraic spaces, Proc. Joensuu 1987, Lecture Notes Math. Springer Verlag, erscheint demnächst
[10] *M. Knebusch* : Isoalgebraic geometry: First steps, Séminaire de Théorie des Nombres, Delange-Pisot-Poitou, Paris 1980/81, in: Progress in Mathematics 22, 127-140, Birkhäuser 1982
[11] *D. Mumford* : Introduction to algebraic geometry, Harvard University (prepublication)
[12] *A. Grothendieck* : Revêtements Etales et Groupe Fondamental, Lecture Notes Math. 224, Springer Verlag 1971

Roland Huber
Fakultät für Mathematik
der Universität
D - 8400 Regensburg, F.R.G.

(Eingegangen am 2. Dezember 1987)