manuscripta math. 60, 71 - 88 (1988)

manuscripta
mathematica

FIBRES VECTORIELS HOMOGENES SUR LES VARIETES ABELIENNES QUI SONT DES TORES ANALYTIQUES (RIGIDES).

Marius van der Put - Marc Reversat

We give a caracterization of homogeneous vector bundles on an abelian variety (over a complete non archimedean valued field) which is an analytic torus, as the jacobians of the Mumford-curves for instance. Homogeneous vector bundles are stable under the action induced by the low on A. We prove that they are coming from the representations of the fundamental group of A, more precisely, that they are exactly those vector bundles which are constructed with the ϕ-bounded representations.

La description des fibrés vectoriels sur un espace analytique (qui est souvent l'analytifié d'une variété algébrique) par les représentations du groupe fondamental a été largement étudiée en dimension 1, sur les surfaces de Riemann ([W1],[A2],[N-S], puis sur les courbes de Mumford ([F],[P-R]). En dimension supérieure à 1, le fait que les fibrés vectoriels homogènes de rang 1 sur une variété abélienne complexe A (i.e. : à isomorphisme près les éléments de $Pic^0(A)$) soient associés à des représentations du groupe fondamental de A est un résultat ancien (dû aux efforts de Riemann, Weierstass, Picard, Appel et Poincaré, cf. [W2]) ; ce furent MATSUSHIMA Y. ([Ma], th. 1) et MORIMOTO A.([Mo], th. 2), grâce à un résultat de ATIYAH M.F. ([A2], prop. 14) qui l'étendirent aux fibrés de rang supérieur à 1 en prouvant que sur un tore analytique complexe $\mathbb{C}^n/\Lambda$ tout fibré vectoriel homogène est de la forme $E(\rho)$ (définitions (0,2) et (0.3)), où ρ est une représentation de Λ. Depuis, l'étude des fibrés vectoriels homogènes a été largement développée ; en particulier par MIYANISHI M. ([Mi]) et MUKAI S. ([Mu]) sur une variété abelienne, par MIYANISHI M. ([Mi]) sur un espace homogène.

C'est la nature particulière du corps de base, en l'occurence $\mathbb{C}$, et la structure différentielle qu'il en résulte pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$, qui ont permis la mise en évidence du lien entre les fibrés vectoriels homogènes et les représentations du groupe fondamental ([Ma], [Mo]). Dans notre article, le corps de base k est complet pour une valeur absolue non archimédienne et nous considérons les variétés abéliennes A qui sont des tores analytiques sur k. Toutes les variétés abéliennes sur k ne sont pas de cette forme, mais, par exemple, les jacobiennes des courbes de Mumford sont des tores analytiques ([M-D], [My] et [Ge-3], [Ge-P] ch. VI). Cette structure analytique nous permet d'établir que tout fibré vectoriel homogène E sur A est de la forme $E(\rho)$, où ρ est une représentation du groupe fondamental de A (ce résultat est déjà connu pour les fibrés homogènes de rang 1, c'est-à-dire à isomorphisme près les éléments de $\mathrm{Pic}^0(A)$: [Ge2], §2 n°4 et §3).

De plus, si l'on se limite aux représentations Φ-bornées (§(1.3) et (2.3)), nous montrons que cette association est, à isomorphisme et équivalence près, bijective. Notre démonstration est naturellement très différente de celle, différentielle, du cas complexe. Outre un résultat de MIYANISHI M.([Mi], lemme 2.1), elle utilise des méthodes voisines de celles de [P-R] et la notion de représentation Φ-bornée d'abord introduite par FALTINGS G. ([F]). Dans le cas de la dimension 1, lorsque la variété abélienne est une courbe elliptique, nous retrouvons les résultats de [F] et [P-R] puisque les fibrés vectoriels homogènes sont alors les fibrés vectoriels semi-stables de degré 0 (comme le montre la classification de ATIYAH M. ([A1]).

NOTATION ET RAPPELS

Pour les notions fondamentales de géométrie analytique rigide nous renvoyons à [B-G-R-], [Fr-P] et [Ge-P] ; pour les propriétés des tores analytiques et des variétés abéliennes de ce type à [Ge1] et [Ge2] (voir également [M], ch.2).

On désigne par k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne non triviale, par $|.|$ sa valeur absolue, par $T=(\mathrm{Spm}[z_1,z_1^{-1},\dots,z_g,z_g^{-1}])^{an}$ l'analytifié du tore algébrique sur k de dimension $g\geq 1$ et par X le groupe des caractères de T, c'est-à-dire le sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{O}_T(T)^*$ engendré par $z_1,\dots,z_g$. On a

(0.1) $\mathcal{O}_T(T)^*=k^*X$

On note T(k) les points de T rationnels sur k, on a $T(k)=(k^*)^g$. Un réseau Λ de T sur k est un sous-groupe de T formé de points rationnels sur k, tel que, par l'application

$$\ell:T(k)=(k^*)^g \to \mathbf{R}^g$$
$$(u_1,\dots,u_g) \mapsto (-\mathrm{Log}|u_1|,\dots,-\mathrm{Log}|u_g|)$$

Λ et $\ell(\Lambda)$ soient en bijection et que de plus $\ell(\Lambda)$ soit un réseau de $\mathbf{R}^g$.

De manière canonique, l'espace quotient $A=T/\Lambda$ est muni d'une structure de k-espace analytique (rigide) séparé, la surjection canonique $p:T\to A$ est un morphisme analytique et un isomorphisme analytique local.

Si la "relation des périodes de Riemann" est vérifiée, le tore analytique T/Λ est une variété abélienne ([Ge], th. 5 et [Ra], th. 2).

(0.2) DEFINITION. Un fibré vectoriel E sur A est dit homogène si, pour tout $x\in A$, il est $\mathcal{O}_A$-isomorphe à t_x^*E, où t_x désigne la translation par x.

(0.3) DEFINITION Soit $\rho:\Lambda\to GL(V)$ une représentation du réseau Λ, où V est un k-espace vectoriel de dimension n ; $M=V\otimes_k \mathcal{O}_T(T)$ est muni de l'action de Λ définie par :
$\lambda(v\otimes f) = (\rho(\lambda)v)\otimes(f\circ\lambda^{-1})$ pour tous $\lambda\in\Lambda$, $v\in V$ et $f\in\mathcal{O}_T(T)$.

Pour tout admissible affinoïde U de T on pose

$$F(U)=M \otimes_{\mathcal{O}_T(T)} \mathcal{O}_T(U)$$

Pour tout $\lambda\in\Lambda$, on a l'isomorphisme

$$\begin{aligned} F(U) &\to F(\lambda U) \\ m\otimes f &\mapsto \lambda(m)\otimes(f\circ\lambda^{-1}) \end{aligned}$$

(où $m\in M$ et $f\in\mathcal{O}_T(U)$). Soit U un admissible affinoïde de A, on désigne par $E(\rho)(U)$ l'ensemble des éléments de $F(p^{-1}(U))$ invariants sous l'action de Λ. Pour les restrictions issues de celle de $\mathcal{O}_T$:

(0.4) $E(\rho)$ est un fibré vectoriel de rang n sur A.
On retrouvera plus loin, car c'est un résultat connu, que $E(\rho)$ est homogène.

1. CLASSIFICATION DES FIBRES VECTORIELS HOMOGENES, LORSQUE LE GROUPE DES VALEURS DU CORPS DE BASE N'EST PAS TROP GROS.

Dans ce paragraphe on suppose que T et Λ satisfont à l'hypothèse (H) suivante :

(H) il existe une base $\{x_1,\ldots,x_g\}$ du groupe X des caractères de T et une base $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_g\}$ de réseau Λ telles que

$$|x_i(\lambda_j)|=1 \text{ pour tous } i,j=1,\ldots,g \text{ avec } i\neq j,$$

$$|x_i(\lambda_i)|<1 \text{ pour tout } i=1,\ldots,g.$$

REMARQUE. L'hypothèse (H) est vérifiée si $v(k^*)\subset\mathbb{Q}$ donc en particulier si k est inclus dans le complété d'une clôture algébrique d'un corps local. En effet, on peut alors supposer que la forme bilinéaire $\Lambda\times X \to \mathbb{Q}$, donnée par $(\lambda,x) \mapsto v(x(\lambda))$, est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Il existe donc une base $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_g\}$ de Λ, une base $\{x_1,\ldots,x_g\}$ de X et des entiers $n_i>0$ $(1\leq i\leq g)$ tels que, si τ désigne l'inclusion $\tau:\Lambda \to \mathrm{Hom}(X,\mathbb{Z})$, on ait $\tau(\lambda_i)=n_i x_i^*$ $(1\leq i\leq g)$, où $\{x_1^*,\ldots,x_g^*\}$ désigne la base de Hom $(X,\mathbb{Z})$ duale de $\{x_1,\ldots,x_g\}$.

(1.1) Φ-cohomologie.

Pour $1\leq i\leq g$, on pose $\pi_i=x_i(\lambda_i)$ et pour tout $z\in T$ on écrit $z_i=x_i(z)$. Pour $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_g)\in\mathbb{Z}^g$ soit

(1.1.1) $U_{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{g} \{|\pi_i|^{n_i+1} \leqslant |z_i| \leqslant |\pi_i|^{n_i}\}$

(1.1.2) Le recouvrement $(U_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^g}$ de T est pur et est stable par l'action de Λ. On pose

(1.1.3) $U_* = \{U_{\underline{n}^0} \cap \dots \cap U_{\underline{n}^s} \mid s\in\mathbb{N}, \underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s \in \mathbb{Z}^g\}$

(1.1.4) DEFINITION. Soit F un faisceau de k-espaces vectoriels sur T. On dira que F est un faisceau de k-espaces vectoriels normés, si, pour tout admissible affinoïde U de T, $U\in U_*$, F(U) est un k-espace vectoriel normé (on notera souvent $\| \ \|_U^F$ cette norme) et si, pour tous admissibles affinoïdes U,V avec $U\supset V$ et U,V appartenant à U_*, la restriction $F(U) \to F(V)$ est de norme au plus 1.

Soit F un faisceau de k-espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{C}_\Phi(F)$ le complexe suivant

(1.1.5) $\prod_\Phi F(U_{\underline{n}^0}) \xrightarrow{d^0} \prod_\Phi F(U_{n^0,n^1}) \xrightarrow{d^1} \prod_\Phi F(U_{n^0,n^1,n^2}) \xrightarrow{d^2} \dots$

(on a posé $U_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s} = U_{\underline{n}^0} \cap \dots \cap U_{\underline{n}^s}$) où $\prod_\Phi F(U_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s})$ est l'ensemble des $\xi = (\xi_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s}) \in \prod F(U_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s})$ (ce dernier produit étant étendu à tous les (s+1)-uplets d'éléments de $\mathbb{Z}^g$ deux à deux distincts), qui vérifient les deux assertions suivantes

(1.1.6) $\sup_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s} \|\xi_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s}\|_{U_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s}}^F < \infty$

(1.1.7) pour tout $\varepsilon>0$ il existe un entier N tel que

$\left\{(\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s) \mid \|\xi_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s}\|_{U_{\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s}}^F \geqslant \varepsilon\right\}$ soit inclus dans

$\left\{(\underline{n}^0,\dots,\underline{n}^s) \mid N \leqslant n_j^i,\ i=0,\dots,s, j=1,\dots,g\right\}$

(où l'on a posé $\underline{n}^i = (n_1^i,\dots,n_g^i)$).

Les applications d^i de (1.1.4) sont les mêmes que celles du complexe de Čech, on note $H_\Phi^i(F)$ les groupes de cohomologie de $\mathcal{C}_\Phi(F)$.

(1.1.8) Une suite exacte de faisceaux de k-espaces vectoriels normés $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ est dite stricte si, désignant par $\|.\|'$ et $\|.\|''$ les normes induites sur F' et F" par $\|.\|^F$, il existe deux constantes $c_1>0$ et c_2 telles que, pour tout $U\in\mathcal{U}_*$ (cf (1.1.3)).

$$c_1\|.\|'_U\leqslant\|.\|^{F'}_U\leqslant c_2\|.\|'_U \quad\text{et}\quad c_1\|.\|''_U\leqslant\|.\|^{F''}_U\leqslant c_2\|.\|''_U.$$

A toute suite exacte stricte on peut associer une longue suite exacte de Φ-cohomologie.

(1.2) Un calcul de Φ-cohomologie.

Soient $r_1,\ldots,r_g$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par $\mathcal{O}^+$ le faisceau $\mathcal{O}_T$ muni des normes $\|.\|^+$ suivantes :

(1.2.1) pour tout $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_g)\in\mathbb{Z}^g$

$$\|.\|^+_{U_{\underline{n}}}=\|.\|^{sp}_{U_{\underline{n}}}\, r_1^{n_1}\ldots r_g^{n_g}\prod_{i=1}^{g}\min\{1,|\pi_i|^{n_i}\}$$

et pour tout admissible affinoïde U de T tel que $U\in\mathcal{U}_*$, si $\underline{n}$ est minimal pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{Z}^g$ tel que $U_{\underline{n}}\supset U$, on pose

$$\|.\|^+_U=\|.\|^{sp}_U\, r_1^{n_1}\ldots r_g^{n_g}\prod_{i=1}^{g}\min\{1,|\pi_i|^{n_i}\}.$$

(1.2.2) Proposition

$H^0_\Phi(\mathcal{O}^+)\simeq k$ et $H^i_\Phi(\mathcal{O}^+)=(0)$ pour tout $i\geqslant 1$.

La démonstration se déroule en plusieurs étapes. Nous commençons par le cas g=1.

(1.2.3) Démonstration de (1.2.2.) lorsque g=1. il faut calculer la cohomologie du complexe

$$0\to\prod_\Phi\mathcal{O}^+(U_n)\xrightarrow{d}\prod_\Phi\mathcal{O}^+(U_{n,m})\to 0$$
$$(\xi_n)\mapsto(\xi_{n+1}-\xi_n)$$

qui montre déjà que $H^i_\Phi(\mathcal{O}^+)=0$ pour $i\geqslant 2$.

Calcul de $H^0_\Phi(\mathcal{O}^+)$. Soit $f\in\ker d$, $f=\sum_{\beta\in\mathbb{Z}}c_\beta z^\beta$ avec $c_\beta\in k$.

D'après (1.1.6) on a pour tout $\beta\in\mathbb{Z}$

$$|c_\beta|(|\pi|^\beta r)^n\min\{1,|\pi|^n\}\leqslant\operatorname{Sup}_m\|f\|^+_{U_m}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{Z}$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, puis vers $-\infty$, on a avec

(1.1.7) si $c_\beta \neq 0$

$$|\pi| < |\pi|^{\beta+1} r \leqslant 1$$

Donc il existe un seul β au plus, noté β_o, tel que $c_\beta \neq 0$.
On a $H^o_\Phi(\mathcal{O}^+) = k\mathbb{Z}^{\beta_o} \simeq k$

<u>Calcul</u> de $H^1_\Phi(\mathcal{O}^+)$. Soit $\beta_o \in \mathbb{Z}$ défini par

(1.2.4) $\quad |\pi| < r|\pi|^{\beta_o+1} \leqslant 1$

Soit $(\xi_{n,n+1}) \in \prod_\Phi \mathcal{O}^+(U_{n,n+1})$. Si $\xi_{n,n+1} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} c_\beta z^\beta$, où $c_\beta \in k$, on pose

(1.2.5) $\lambda_{n,n+1} = \sum_{\beta > \beta_o} c_\beta z^\beta$, $\mu_{n,n+1} = \sum_{\beta < \beta_o} c_\beta z^\beta$, $\nu_{n,n+1} = c_{\beta_o} z^{\beta_o}$.

La démonstration consiste à prouver que $(\lambda_{n,n+1})_n$, $(\mu_{n,n+1})_n$ et $(\nu_{n,n+1})_n$ sont des éléments de Imd.

Montrons que $(\lambda_{n,n+1})_n \in$ Imd. Pour tout $i \leqslant n-1$, $\lambda_{i,i+1}$ converge sur $U_n = \{|\pi|^{n+1} \leqslant |z| \leqslant |\pi|^n\}$ et un calcul facile montre que,

$$\|\lambda_{i,i+1}\|^+_{U_n} \leqslant ar\|\lambda_{i,i+1}\|^+_{U_{i,i+1}} \max_{\beta > \beta_o} (r|\pi|^\beta)^{n-i-1} \frac{\min\{1,|\pi|^n\}}{\min\{1,|\pi|^i\}}$$

avec $a=1$ si $\beta_o \geqslant 0$ et $a = |\pi|^{\beta_o+1}$ si $\beta_o < 0$; il en résulte avec (1.2.4)

$$\|\lambda_{i,i+1}\|^+_{U_n} \leqslant a\|\lambda_{i,i+1}\|^+_{U_{i,i+1}} \quad \text{pour } i \leqslant n-1$$

Alors, si $\Lambda_n = \sum_{i \leqslant n-1} \lambda_{i,1+1}$, $(\Lambda_n)_n$ est un élément de

$\prod_\Phi \mathcal{O}^+(U_n)$ et $d((\Lambda_n)_n) = (\lambda_{n,n+1})_n$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ soient (cf. (1.2.5)) : $M_n = -\sum_{i \geqslant n} \mu_{n,n+1}$,
$N_n = \sum_{i=o}^{n-1} \nu_{n,n+1}$ si $n > 0$, $N_n = -\sum_{i=n}^{-1} \nu_{n,n+1}$ si $n < 0$ et $N_o = 0$;
des calculs analogues aux précédents montrent que $(M_n)_n$ et $(N_n)_n$ sont des éléments de $\prod_\Phi \mathcal{O}^+(U_n)$ et l'on a $d((M_n)_n) = (\mu_{n,n+1})_n$, $d((N_n)_n) = (\nu_{n,n+1})_n$.

(1.2.6) *Démonstration de la proposition (1.2.2) lorsque $g \geq 1$.*

Pour tout $i=1,\ldots,g$ on désigne par $\mathcal{O}_i^+$ le faisceau sur $T_i=(\mathrm{Spm}\, k[z_i,z_i^{-1}])^{an}$ égal au faisceau $\mathcal{O}_{T_i}$ et muni des normes (1.2.1) construites avec r_i et π_i. On a $\mathcal{O}^+ \simeq \mathcal{O}_1^+ \hat{\otimes}_k \ldots \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_g^+$ et cet isomorphisme est isométrique. On en déduit l'isomorphisme isométrique des complexes

(1.2.7) $\quad \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{O}^+) \simeq \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{O}_1^+) \hat{\otimes}_k \ldots \hat{\otimes}_k \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{O}_g^+)$.

(1.2.8) *Lemme : Soient deux complexes d'espaces de Banach sur k.*

$$A: 0 \to A^0 \xrightarrow{d_1^0} A^1 \xrightarrow{d_1^1} A^2 \xrightarrow{d_1^2} \ldots \qquad \text{et}$$

$$B: 0 \to B^0 \xrightarrow{d_2^0} B' \xrightarrow{d_2^1} B^2 \xrightarrow{d_2^2} \ldots$$

tels que $\mathrm{Im}\, d_i^j$ *soit fermé pour tout* $j \geq 0$ *et* $i=1,2$. *Soit* C *le complexe défini par : pour tout* $n \geq 0$

$$C^n = \bigoplus_{i=0}^{n} A^i \hat{\otimes}_k B^{n-i} \quad \text{et} \quad d^n : C^n \to C^{n+1} \quad \text{vérifie}$$

$$d^n|_{A^i \hat{\otimes}_k B^{n-i}} = (d_1^i \hat{\otimes}_k \mathrm{id}_{B^{n-i}},\ (-1)^i\, \mathrm{id}_{A^i} \hat{\otimes}\, d_2^{n-i}) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

Alors les groupes de cohomologie des complexes A, B *et* C *vérifient les isomorphismes d'espaces de Banach : pour tout* $n \geq 0$

$$H^n(C) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} (H^i(A) \hat{\otimes}_k H^{n-i}(B))$$

Démonstration. Elle résulte du fait que $\hat{\otimes}_k$ est un foncteur exact sur la catégorie des espaces de Banach sur k. Considérons la suite exacte de complexes $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ où A' est le complexe $0 \to A^0 \xrightarrow{d_1^0} d_1^0(A^0) \to 0 \to 0 \to \ldots$ et A'' le complexe $0 \to 0 \to A^1/d_1^0(A^0) \to A^2 \to \ldots$ et notons $A \hat{\otimes} B$ le complexe C de l'énoncé du lemme. Alors $0 \to A' \hat{\otimes} B \to A \hat{\otimes} B \to A'' \hat{\otimes} B \to 0$ est une suite exacte de complexes. On montre, par un calcul direct, que pour tout $m \geq 0$, $H^m(A' \hat{\otimes} B) \simeq (\ker d_1^0) \hat{\otimes} H^m(B)$ et que $H^m(A'' \hat{\otimes} B) \to H^{m+1}(A' \hat{\otimes} B)$ est l'application nulle. On en déduit les suites exactes, pour $n \geq 0$,

$0 \to H^n(A'\hat{\otimes}B) \to H^n(A\hat{\otimes}B) \to H^n(A''\hat{\otimes}B) \to 0$, il vient la formule cherchée pour $n=0$ et la démonstration se termine par récurrence sur n.

On déduit facilement de (1.2.7) et du lemme (1.2.8) que pour $i \geq 0$

$$H^i_\Phi(\mathcal{O}^+) \simeq \bigoplus_{j_1+\ldots+j_g=i} (H_\Phi^{j_1}(\mathcal{O}_1^+)\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}\, H_\Phi^{j_g}(\mathcal{O}_g^+))$$

qui avec (1.2.3) donne la proposition (1.2.2).

(1.3) <u>Description des fibrés vectoriels homogènes sur</u> A.

<u>Définition</u>. Soient V un k-espace vectoriel de dimension n, $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de V. Soit $\rho:\Lambda\to GL(V)$ une représentation du réseau $\Lambda=\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_g\rangle$. Pour tout $\lambda\in\Lambda$ on désigne par $\|\rho(\lambda)\|$ le maximum des valeurs absolues des coefficients de la matrice de $\rho(\lambda)$ écrite dans la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$.

Pour tout $\lambda=\lambda_1^{n_1}\ldots\lambda_g^{n_g}\in\Lambda$, posons

(1.3.1) $\quad d(\lambda) = \prod_{i=1}^{g} \min\{1,|\pi_i|^{n_i}\}$

On dit que la <u>représentation</u> ρ <u>est</u> Φ-<u>bornée</u> si

(1.3.2) $\quad \sup_{\lambda\in\Lambda} (\|\rho(\lambda)^{-1}\|\, d(\lambda))<\infty$

(1.3.3) pour tout $\varepsilon>0$ il existe un entier N tel que

$$\left\{\lambda\in\Lambda/\|\rho(\lambda)^{-1}\|d(\lambda)\geq\varepsilon\right\} \subset \left\{\lambda_1^{n_1}\ldots\lambda_g^{n_g}/n_i\geq N\ \forall i=1,\ldots,g\right\}$$

<u>Remarque</u>. Cette notion ne dépend pas du choix de la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de V. Dans la suite de ce paragraphe, $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_g\}$ est la base de Λ intervenant dans l'hypothèse (H).

<u>Remarque</u>. Cette définition s'inspire directement de celle de FALTINGS ([F], §4).

Si E est un fibré vectoriel sur A, on munit p^*E des normes suivantes : soit $\|.\|_{\underline{U_0}}$ une norme de $\mathcal{O}_T(\underline{U_0})$-module de Banach sur $p^*E(\underline{U_0})$ (où $\underline{U_0}=\prod_{1\leq i\leq g}\{|\pi|\leq|z_i|\leq 1\}$). Si $V\subset\underline{U_0}$ est un admissible affinoïde, $|.|_V$ désigne la norme tensorielle de $p^*E(U_{\underline{o}}) \underset{O_T(U_{\underline{o}})}{\otimes} O_T(V) \simeq p^*E(V)$. Si V est un admissible affinoïde de T on pose pour tout $e \in p^*E(V)$

$$|e|_V^+ = \max_{\lambda \in \Lambda}(d(\lambda^{-1})|\lambda(e)|_{\lambda V \cap U_{\underline{o}}})$$

(1.3.4) On désigne par E^+ le faisceau p^*E muni des normes $\|.\|^+$.

(1.3.5) Théorème. On suppose que le tore analytique $\underline{A}$ est une variété abélienne et vérifie l'hypothèse (H).

(1) Soit E un fibré vectoriel homogène de rang n sur la variété abélienne $\underline{A}$. Alors le k-espace vectoriel $V_E = H^o_\Phi(E^+)$ est de dimension n, la représentation ρ donnée par l'action de Λ sur V_E est Φ-bornée, l'homomorphisme naturel $V_E \otimes_k O_T(T) \to p^*E(T)$ est un isomorphisme et induit l'isomorphisme $E \simeq E(\rho)$.

(2) Si E_1 et E_2 sont deux fibrés vectoriels homogènes sur A, alors l'homomorphisme naturel $\mathcal{H}om_{O_X}(E_1,E_2) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda,k}(V_{E_1},V_{E_2})$ est un isomorphisme.

(3) Pour toute représentation ρ Φ-bornée du réseau Λ, le fibré vectoriel $E(\rho)$ est homogène et l'espace V_ρ de la représentation est canoniquement isomorphe à $H^o_\Phi(E(\rho)^+)$.

Démonstration de (1). Nous étudions d'abord le cas n=1. Une représentation $\rho:\Lambda \to k^*$ de rang 1 est Φ-bornée si et seulement si $|\pi_i| \leq |\rho(\lambda_i)| < 1$ pour tout $i=1,\dots,g$. On sait que $E \simeq E(\rho')$ ([Ge 2] §2 n°4 et §3) où $\rho':\Lambda \to k^*$ est une représentation. Il existe un caractère χ de T tel que $\rho = \rho'\chi$ soit une représentation Φ-bornée et l'on a $E \simeq E(\rho') \simeq E(\rho)$ ([Ge2], ibid.)

Soit donc $E \simeq E(\rho)$ où $\rho:\Lambda \to k^*$ est Φ-bornée. Le faisceau p^*E est globalement libre ([Ge2], th. 1), on a donc $p^*E = O_T h$, où $h \in p^*E(T)$, avec l'action suivante de Λ: pour tous $\lambda \in \Lambda$, V admissible affinoïde de T et $f \in O_T(V)$ on a

$$\gamma(fh) = f\circ\gamma^{-1}.\rho(\gamma)h \in O_T(\gamma V)h = p^*E(\gamma V).$$

Ainsi le faisceau E^+ est, en tant que faisceau de k-espaces vectoriels normés, isomorphes à $\mathcal{O}^+$ pour $r_i = |\rho(\lambda_i)|$, $1 \le i \le g$ (cf. 1.2.1) et (1.3.4)). Par conséquent

$$(1.3.6)\quad H^i_\Phi(E^+) = \begin{cases} k \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } i > 0 \end{cases}$$

Il est clair que $H^o_\Phi(E^+)$ engendre $p^*E(T)$. Montrons que $H^o_\Phi(E)$ est stable sous l'action de Λ. Soit $\lambda \in \Lambda$, les normes $\|\cdot\|^{\lambda(E^+)}$ induites par celles de E^+ satisfont pour tout admissible affinoïde V de T

$$\|\cdot\|_V^{\lambda^*(E^+)} = \|\cdot\|^+_{\lambda V}$$

D'autre part, on a pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$d(\lambda^{-1})d(\gamma) \le d(\gamma\lambda^{-1}) \le d(\lambda)^{-1}d(\gamma)$$

(on a en fait : $d(\gamma\gamma') \ge d(\gamma)d(\gamma')$ pour tous γ, $\gamma' \in \Lambda$), on a donc $d(\lambda^{-1})\ \|\cdot\|^+_\cdot \le \|\cdot\|^{\lambda^*(E^+)}_\cdot \le d(\lambda)^{-1}\ \|\cdot\|^+$ qui prouve que $H^o_\Phi(\lambda^*E^+) = H^o_\Phi(E^+)$ (ce sont deux parties de $p^*E(T)$).

On a donc prouvé (1), dans ce cas $n = 1$. Lorsque $n > 1$, on utilise un résultat de Miyanishi ([Mi], lemme 2.1), qui nécessite que A soit une variété abelienne, selon lequel, si E est un fibré vectoriel homogène de rang n, il existe une suite exacte non triviale de fibrés vectoriels homogènes sur A

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

On en déduit la suite exacte stricte

(1.3.7) $0 \to (E')^+ \to E^+ \to (E'')^+ \to 0$ qui par récurrence sur n, permet de montrer

$$(1.3.8)\quad \begin{cases} H^i_\Phi(E^+) = \begin{cases} k^n \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } i > 0 \end{cases} \\ H^o_\Phi(E^+) \otimes_k \mathcal{O}_T(T) = p^*E(T) \\ H^o_\Phi(E^+) \text{ est stable par l'action de } \Lambda. \end{cases}$$

En effet, on a prouvé que (1.3.8) est vrai pour $n = 1$ et, si E' et E" vérifient (1.3.8), la suite exacte de Φ-cohomologie déduite de (1.3.7) donne la suite exacte

$0 \to H^o_\Phi((E')^+) \to H^o_\Phi(E^+) \to H^o_\Phi((E'')^+) \to 0$ et les relations $H^i_\Phi(E^+) = 0$ pour tout $i > 0$. On en déduit (1.3.8) pour E.

Ainsi, $E \simeq E(\rho)$ où ρ est la représentation définie par l'action de Λ sur $V_E = H^0_\Phi(E^+)$. montrons que ρ est Φ-bornée. Soit $e \in V_E = H^0_\Phi(E^+)$, on a (cf. (1.1.6) et (1.1.7))

$$(1.3.9) \begin{cases} \sup\limits_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^g} \|e\|^+_{U_{\underline{n}}} < \infty \quad \text{et} \\ \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe un entier N tel que} \\ \left\{\underline{n} \in \mathbb{Z}^g \mid \|e\|^+_{U_{\underline{n}}} \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{\underline{n} = (n_1,\dots,n_g) \in \mathbb{Z}^g \mid n_i \geq N \ \ \forall\, i = 1,\dots,g\right\} \end{cases}$$

Soient U un admissible affinoïde de T et $\lambda \in \Lambda$, on a (cf. (1.3.4))

$$(1.3.10) \quad \|e\|^+_{\lambda U} = \max_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^g} \|e\|^+_{\lambda U \cap U_{\underline{n}}}$$

donc, d'après (1.3.9)

$$(1.3.11) \quad \sup_{\lambda \in \Lambda} \|e\|^+_{\lambda U} < \infty .$$

Ainsi $\|\cdot\| = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \|\cdot\|^+_{\lambda U}$ définit une norme sur V_E. L'espace vectoriel V_E étant de dimension finie, la norme sur V_E $\|\cdot\|' = \|\cdot\|^+_U$ est équivalente à $\|\cdot\|$, donc il existe une constante c telle que

$$(1.3.12) \qquad \|\cdot\|' \leq \|\cdot\| \leq c\|\cdot\|'$$

On a d'autre part, si $U \subset U_{\underline{o}}$

$$(1.3.13) \qquad d(\lambda)\ \|\rho(\lambda^{-1})\, e\|^+_U \leq \|e\|^+_{\lambda U}$$

Donc avec (1.3.12)

$$d(\lambda)\ \|\rho(\lambda^{-1})\, e\|^+_U \leq c\|e\|^+_U$$

pour tous $U \subset U_{\underline{o}}$ admissible affinoïde et $e \in V_E$. Il en résulte

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} d(\lambda)\ \|\rho(\lambda^{-1})\| < \infty$$

Soit $\varepsilon > 0$, il vient avec (1.3.10) et (1.3.13)

$\left\{\lambda \in \Lambda \mid \|\rho(\lambda^{-1})e\|^+ d(\lambda) \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{\lambda \in \Lambda \mid \underline{n} \in \mathbb{Z}^g \text{ avec } U_{\underline{n}} \cap \lambda U \neq \Phi \text{ et } \|e\|^+_{U_{\underline{n}}} \geq \varepsilon\right\}$ d'où, avec la deuxième assertion de (1.3.9), la relation (1.3.3).

Démonstration de (2). Un morphisme $E_1 \xrightarrow{f} E_2$ induit un morphisme strict compatible avec l'action de Λ $E_1^+ \to E_2^+$, par suite une application k-linéaire compatible avec l'action de Λ $V_{E_1} = H^0_\Phi(E_1^+) \xrightarrow{V(f)} V_{E_2} = H^0_\Phi(E_2^+)$. Comme V_{E_1} engendre $p^*E_1(T)$ sur $\mathcal{O}_T(T)$, on voit que $V(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$. La surjectivité de $f \to V(f)$ est évidente.

Démonstration de (3). Soit ρ une représentation de Λ, montrons que $E(\rho)$ est homogène (c'est un résultat connu) : soit $a \in A$, l'action de Λ sur $p^*E(\rho)(T)$ est donnée par des matrices constantes $M(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, donc les mêmes matrices donnent l'action de Λ sur $p^*(t_a^*E(\rho))(T)$ (où t_a désigne la translation par a).

Soit $\rho: \Lambda \to GL(V)$ une représentation Φ-bornée. Montrons qu'il existe un isomorphisme compatible avec l'action de Λ entre V et $H^0_\Phi(E(\rho)^+)$. Le groupe Λ étant commutatif, ρ est équivalente à une représentation triangulaire (quitte à faire une extension finie du corps de base k), donc $\rho = \rho' \oplus \rho''$ où ρ' est une représentation de rang 1 et ρ'' de rang n-1. Désignons par V' l'espace de ρ', par V" celui de ρ''. On a les suites exactes

$$0 \to V'' \to V \to V' \to 0$$

$$0 \to E(\rho'') \to E(\rho) \to E(\rho') \to 0$$

$$0 \to H^0_\Phi(E(\rho'')^+) \to H^0_\Phi(E(\rho)^+) \to H^0_\Phi(E(\rho')^+) \to 0$$

par récurrence, on est donc ramené au cas où $\dim_k V = 1$.

Soit ρ une représentation de Λ Φ-bornée de rang 1 ; alors $E(\rho)$ est homogène de rang 1 ([Ge2], §2 n° 4 et §3) et la représentation ρ' associée à l'action de Λ sur $H^0_\Phi(E(\rho)^+)$ est Φ-bornée et vérifie $E(\rho) \simeq E(\rho')$. Ainsi, il existe un caractère χ de T tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\rho(\lambda) = \rho'(\lambda)\,\chi(\lambda)$ ([Ge2], ibid.) ; mais ρ et ρ' étant Φ-bornées, on a pour tout $i = 1,\dots,g$

$$|\pi_i| \le |\rho'(\lambda_i)| < 1 \text{ et } |\pi_i| \le |\rho(\lambda_i)| < 1$$

par suite $|\pi_i| < |\chi(\lambda_i)| < |\pi_i|^{-1}$, donc $|\chi(\lambda_i)| = 1$.

Il en résulte $\chi = 1$ (cf. (H)).

2. CLASSIFICATION DES FIBRES VECTORIELS HOMOGENES SUR A, CAS GENERAL.

Nous indiquons brièvement comment obtenir les résultats précédents lorsque l'hypothèse (H) n'est plus satisfaite, donc lorsque la valuation de k est quelconque (ultramétrique de rang 1).

(2.0.1) Sur $\{x_1, \dots, x_g\}$ une base du groupe des caractères X de T, fixée pour tout ce paragraphe. Si $u \in T$ on écrira $x_i(u) = u_i$, $1 \le i \le g$.

(2.0.2) Pour tout $u \in T$ on pose

$$d(u) = \prod_{i=1}^{g} \min \{1, |u_i|\}$$

(2.1) Les faisceaux E^+

Soit E un fibré vectoriel sur A de rang n. Définissons le faisceau E^+.

Soient $U^o, \dots, U^s$ des admissibles affinoïdes de T tels que $\{p(U^o), \dots, p(U^s)\}$ est un recouvrement admissible affinoïde de A ; on pose $D = U^o \cup \dots \cup U^s$. Soit $\{b_j^i\}_{1 \le j \le n}$ une base de $p^*E(U^i)$, $0 \le i \le s$.

Soient $u \in D$, e une section de p^*E définie en u, U un admissible affinoïde de T tel que $u \in U \subset D$ et $e \in p^*(U)$; on écrit

$$e\Big|_{U \cap U^i} = \sum_{j=1}^{n} e_i^j \, b_j^i \quad \text{où } e_j^i \in O_T(U \cap U^i)$$

et l'on pose $|e|'(u) = \max \{|e_i^j(u)| \;/\; 0 \le i \le s,\ 1 \le j \le n\}$

Soient $u \in T$ et e une section de p E définie en u, on pose

(2.1.1) $|e|(u) = \max\{|\lambda(e)|'(\lambda(u)) \;/\; \lambda \in \Lambda,\ \lambda u \in D\}$

Remarquons que les normes de p^*E définies par $\|e\|_U = \sup \{|e|(u) \;/\; u \in U \cap T(k)\}$ (où U est un admissible affinoïde de T et $e \in p^*E(U)$) sont invariantes sout l'action de Λ.

Soient U un admissible affinoïde de T et $e \in p^*E(U)$, on pose (cf. (2.0.2))

(2.1.2) $\|e\|_u^+ = \sup \{ \; |e|(u).d(u) \;/\; u \in U \cap T(k)\}$

Le faisceau E^+ est le faisceau p^*E muni des normes $\|\cdot\|_\bullet^+$ précédentes.

Remarquons que les systèmes de normes (2.1.2) et (1.3.4) sont équivalentes lorsque (H) est vérifiée.

(2.2) <u>Φ-cohomologie</u>.

Soit $\pi \in k$ tel que $0 < |\pi| < 1$. On pose pour tout $\underline{n} = (n_i,\dots,n_g) \in \mathbb{Z}^g$ (cf. (2.0.1))

$$U_{\underline{n}} = \{u \in T \,/\, |\pi|^{n_i+1} \leq |u_i| \leq |\pi|^{n_i}\}$$

Le recouvrement $(U_{\underline{n}})_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^g}$ de T est admissible, affinoïde pur. Il dépend du choix fait en (2.0.1). <u>Il n'est pas compatible avec l'action de Λ sur T.</u>

Si E est un fibré vectoriel homogène de rang n sur A on définit sa Φ-cohomologie par le complexe (1.1.5) et les relations (1.1.6), (1.1.7) et on montre, comme au paragraphe 1, que si A est une variété abélienne

(2.2.1) $\quad H^o_\Phi(E^+) \simeq k^n, \ H^i_\Phi(E^+) = (0) \quad \forall\ i \geq 1.$

Le lemme suivant est indispensable pour obtenir l'analogue du théorème (1.3.5) :

(2.2.2) <u>Lemme</u> : <u>Supposons que A soit une variété abelienne, alors, pour tout fibré vectoriel homogène E sur A,</u> $H^o_\Phi(E^+)$ <u>est stable sur l'action de Λ.</u>

Démonstration. $H^o_\Phi(E^+)$ est l'ensemble des $e \in p^*E(T)$ tels que

$$\sup_{\underline{n}} \|e\|^+_{U_{\underline{n}}} < \infty \text{ et pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe un entier } N \text{ tel que :}$$

(2.2.3)

$$\{\underline{n} \in \mathbb{Z}^g \,/\, \|e\|^+_{U_{\underline{n}}} \geq \varepsilon\} \subset \{\underline{n} \in \mathbb{Z}^g \,/\, n_i \geq N \quad \forall\ i = 1,\dots,g\}$$

(on a posé $\underline{n} = (n_1,\dots,n_g)$)

Soit $\lambda \in \Lambda$. Il existe deux constantes c_λ et C_λ telles que pour tout $u \in T$

(2.2.4) $\quad c_\lambda d(u) \leq d(\lambda u) \leq C_\lambda d(u)$

Soit $e \in H^o_\Phi(E^+)$ et soit U un admissible affinoïde de T, on a

$$\|\lambda(e)\|^+_U = \sup \{|\lambda(e)|(u)d(u) \,/\, u \in U \cap T(k)\}$$

$$= \sup \{\max_{\gamma \in \Lambda} \{|\gamma(e)|'(\gamma v)d(\lambda v)\} \,/\, v \in \lambda^{-1} U \cap T(k)\}$$

(cf. (2.1.1)), donc, avec (2.2.4)

$$(2.2.5) \qquad c_\lambda \|e\|^+_{\lambda^{-1}U} \leq \|\lambda e\|^+_U \leq C_\lambda \|e\|^+_{\lambda^{-1}U}$$

Soient s_0 et s_1 deux entiers tels que

$$|\pi|^{s_0} \leq \min_{1\leq i\leq g} |x_i(\lambda^{-1})| \leq \max_{1\leq i\leq g} |x_i(\lambda^{-1})| \leq |\pi|^{s_1}$$

Il résulte de (2.2.5) que pour tout $\underline{n} = (n_1,\dots,n_g) \in \mathbb{Z}^g$

$$\|\lambda e\|^+_{U_{\underline{n}}} \leq C_\lambda \max\{\|e\|^+_{U_{\underline{m}}} \,/\, \underline{m} = (m_1,\dots,m_g) \in \mathbb{Z}^g,\ s_1 \leq n_i - m_i \leq s_0 \quad \forall\, i = 1,\dots,g\}$$

qui, avec (2.2.3) montre que $\lambda e \in H^0_\Phi(E^+)$.

(2.3). Classification des fibrés vectoriels sur A

La définition des représentations Φ-bornées que nous donnons maintenant est en fait équivalente à celle donnée en (1.3) (qui n'est valable que sous l'hypothèse (H)).

Définition : Soit $\rho \to GL(V)$ une représentation de Λ, où V est un k-espace vectoriel de dimension n. On fixe une base de V et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on note $\|\rho(\lambda)\|$ le maximum des valeurs absolues des coefficients de la matrice de $\rho(\lambda)$ écrite dans cette base. On dira que la représentation ρ est Φ-bornée si elle vérifie

$$(2.3.1) \qquad \sup_{\lambda\in\Lambda} \{\|\rho(\lambda)^{-1} d(\lambda)\} < \infty$$

(2.3.2) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que

$$\{\lambda \in \Lambda/ \sup_{\lambda\in\Lambda} (\|\rho(\lambda)^{-1}\| d(\lambda)) \geq \varepsilon\} \subset \{\lambda \in \Lambda/ |x_i(\lambda)| \leq c \quad \forall\, i = 1,\dots,g\}$$

Grâce au lemme (2.2.2), des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 1 permettent alors de montrer l'ensemble des assertions du théorème (1.3.5), sans que l'hypothèse (H) soit satisfaite.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] ATIYAH M.F. : Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. 7, 414-452 (1957)

[A2] ATIYAH M.F. : Complex analytic connexions in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc. 84, 181-207 (1957)

[B-G-R] BOSCH S., GÜNTZER U., REMMERT R. : Non archimedean analysis. Springer Verlag, 1984

[F] FALTINGS G. : Semi-stable vector bundles on Mumford curves. Invent. Math. 73, 199-212 (1983)

[Fr-P] FRESNEL J., VAN DER PUT M. : Géométrie analytique rigide et applications. P.M. 18, Birdhaüser, 1981

[Ge1] GERRITZEN L. : Über Endomorphismen michtarchimedischer holomorpher Tori. Invent. Math. 11, 27-36 (1970)

[Ge2] GERRITZEN L. : On non archimedean representations of abelian varieties. Math. Ann. 196, 323-346 (1972)

[Ge3] GERRITZEN L. : On the Jacobian variety of a p-adic Schottky curve. Proceedings on the Conference on p-adic Analysis, Univ. Nijmegen (1978)

[Ge-P] GERRITZEN L., VAN DER PUT M. : Schottky groups and Mumford curves. Lect. Notes Math. 817, Springer Verlag, 1980

[M] MANIN Yu : p-adic automorphic functions. Itogi Nauki i Tekhniki, Sovremennye Problemy Mathematiki 3, 5-92 (1974)

[M-D] MANIN Yu - DRINFELD V.G. : Periods of p-adic Schottky groups. J. reine angew. Math. 262/263, 239-247 (1973)

[Ma] MATSUSHIMA Y. : Fibrés holomorphes sur un tore complexe. Magoya Math. Journal 14, 1-24 (1959)

[Mi] MIYANISHI M. : Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles. Number Theory, Algebraic geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, 71-93 (1983)

[Mo] MORIMOTO A. : Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connexions holomorphes. Nagoya Math. Journal 15, 83-154 (1959)

[Mu] MUKAI S. : Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety. J. Math Kyoto Univ. 18, 239-272 (1978)

[My] MYERS J.F. : p-adic Schottky groups, Thesis, Harvard Univ. (1973)

[N-S] NARASIMHAN M.S., SESHADRI C.S. : Stable and unitary of vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. Math. 82, 540-567 (1965)

[P-R] VAN DER PUT M., REVERSAT M. : Fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe de Mumford. Math. Ann. 273, 573-600 (1986)

[Ra] RAYNAUD M. : Variétés abeliennes et géométrie rigide. Actes du Congrès intern. Math. 1970, t. 1, 473-477

[W1] WEIL A. : Généralisation des fonctions abeliennes. J. Math. Pures et Appl. 17, 47-87 (1938)

[W2] WEIL A. : Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta. Sem. Bourbaki, exp. 16 (1949)

Marius VAN DER PUT
Mathematick Instituut
Rijksuniversiteit
Postbus 800
NL-9700 AV groningen
The Netherlands

Marc REVERSAT
Laboratoire d'Analyse sur les Variétés
Université Paul Sabatier bât. 1R2
118, route de Narbonne
F.31062 Toulouse Cedex France
(et laboratoire associé au CNRS n° 226, Université de Bordeaux I)

(Reçu le 1 juin 1987)