manuscripta math. 59, 175 - 185 (1987)

manuscripta
mathematica

ÜBER DIE MITTLERE OSZILLATION DER LOGARITHMISCHEN FUNKTION

Nikolaos Danikas

It is well known, that the logarithm is, in some way, the extremal example of a BMO function; so an exact description of the mean oscillation of this function is important for the study of extremal problems in the BMO theory. In a previous note we examined the analytic logarithm in the unit disc (see [2]).

We study in this paper the mean oscillation of the real logarithm, as well as of the complex logarithm on the unit circle, and calculate the usual BMO norms for both functions. It is remarkable that the symmetry property that holds in the complex case fails in the real case.

1. Der Fall des reellen Logarithmus

Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$,

$$I = [\alpha,\beta], \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,, \ \beta > \alpha, \quad \text{und}$$

$$I(f) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

Den Ausdruck

$$I(|f-I(f)|) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)-I(f)|dt$$

nennt man die <u>mittlere Oszillation von f auf I</u>. Falls $I(|f-I(f)|)$ für alle $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt bleibt, heisst f von beschränkter mittlerer Oszillation, $f \in BMO(\mathbb{R})$. Identifiziert man die konstanten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Null-Funktion, so bilden die BMO - Funktionen einen Banach-Raum mit der Norm

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} I(|f-I(f)|) < +\infty \;.$$

Ausser allen beschränkten Funktionen enthält der Raum BMO($\mathbb{R}$) auch langsam wachsende unbeschränkte Funktionen. Das typische Beispiel dabei ist der reelle Logarithmus

$$h(t) = \log|t|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man hat mit verschiedenen Methoden ([4], [5]) bewiesen, dass $h \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$. Diese Beweise liefern zwar leicht eine obere Schranke für $I(|h-I(h)|)$, vermitteln jedoch keine weitere Informationen über diesen Ausdruck, und deshalb erlauben sie auch keine exakte Ausrechnung von $\|h\|_{BMO}$.

Wir beginnen mit einer <u>Homogenitätseigenschaft</u> der mittleren Oszillation von h:

Für ein $\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sei I_ξ das Intervall mit Endpunkten in $\xi\alpha$ und $\xi\beta$. Dann gilt

$$I(|h-I(h)|) = I_\xi(|h-I_\xi(h)|).$$

Wegen der Symmetrie von h bzgl. $x = 0$ braucht man zum Beweis nur positive ξ zu betrachten. Dann führt man einfach die entsprechende Variablentransformation bei den Integralen durch.

Die Homogenität erlaubt uns nun, das Verhalten von $I(|h-I(h)|)$ lediglich auf Intervallen der Form $I = [\alpha,1]$, $\alpha < 1$, zu untersuchen.

Bei solchen Intervallen setzen wir

$$I(|h-I(h)|) = M(\alpha),$$

und betrachten zunächst den Fall $0 \leq \alpha < 1$.

<u>LEMMA 1</u>. <u>Die Funktion</u> $M(\alpha)$ <u>ist in</u> $[0,1)$ <u>streng monoton fallend und beschränkt durch</u> $\frac{2}{e}$.

<u>Beweis</u>. Mit $0 < \alpha < 1$ errechnen wir

$$I(h) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \log t\,dt = \log\mu, \text{ wobei } \mu = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

und weiter

$$M(\alpha) = I(|h-I(h)|) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 |\log t - \log\mu|\,dt =$$

$$= \frac{2}{1-\alpha}\int_\mu^1 (\log\frac{\mu}{t})dt = \frac{2}{1-\alpha}(\alpha\log\frac{\alpha}{\mu e} + \mu).$$

Nun setzen wir $\frac{\alpha}{1-\alpha} = x > 0$, und bekommen

$$\frac{1}{\alpha}M(\alpha) = x \log\{\frac{x}{(1+\frac{1}{x})^x (x+1)}\} + \frac{(1+\frac{1}{x})^x(x+1)}{e} =$$

$$= (x+1)(e^{\lambda(x)-1}-\lambda(x)),$$

wobei

$$\lambda(x) = x \log \frac{x+1}{x} > 0.$$

Als erstes bemerken wir, dass $\lambda(0) = \lim_{x \to 0} \lambda(x) = 0$, also dass $M(0)=\frac{2}{e}$.

Da x offenbar eine streng monoton wachsende Funktion von α ist, bleibt es zu beweisen, dass

$$\omega(x) = (x+1)(e^{\lambda(x)-1} - \lambda(x)),\ x > 0$$

streng monoton fallend ist.

Dies wird erfolgen mittels einer scharfen Abschätzung des Logarithmus, bekannt durch ihre Anwendung in der Theorie der Gamma-Funktion ([1],s.45):

$$\frac{2}{2x+1} < \log(1+\frac{1}{x}) < \frac{2}{2x+1}\{1+\frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}\},\ x > 0.$$

Demnach gilt

$$\omega'(x) = 1 - \log(1+\frac{1}{x})\{2x+1-(x+1)e^{\lambda(x)-1}\} <$$

$$< 1 - \log(1+\frac{1}{x})\ \{1+2x-(x+1)\lambda(x)\} <$$

$$< 1 - \frac{2}{2x+1}\{1 + 2x - \frac{2x(x+1)}{2x+1}(1 + \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)})\} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{(2x+1)^2} < 0,$$

und das Lemma ist vollständig bewiesen.

Nun untersuchen wir den Fall $\alpha < 0$.

Hier setzen wir $x = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$, $0 < x < 1$, und bekommen, völlig analog zum vorigen Fall,

$$(1) \qquad I(h) = \log\mu,\ \text{mit}\ \mu = \frac{1}{e}(-\alpha)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = -\frac{\alpha}{e}(\frac{1}{x}-1)^{1-x}.$$

Die Errechnung von $I(|h-I(h)|)$ hängt jetzt von der Lage der Zahlen $-\mu$ und μ relativ zu α und 1 ab.

Wenn sowohl μ als auch $-\mu$ in $[\alpha,1]$ liegen, d.h. wenn $\mu \leq \min\{-\alpha,1\}$, so gilt

$$M(\alpha) = I(|h-I(h)|) = \frac{4}{1-\alpha}\int_0^{\mu}(\log\mu-\log t)dt =$$

$$= \frac{4}{e}\, x^x(1-x)^{1-x} = u(x).$$

Nach (1) geschieht dies genau dann, wenn

$$\frac{1}{1+A} \leqq x \leqq \frac{A}{1+A}, \text{ d.h wenn } -A \leqq \alpha \leqq -\frac{1}{A},$$

wobei $A \approx 3{,}5911$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $\log\varphi = \frac{1}{\varphi}+1$ darstellt.

Weiter sieht man mit Hilfe der Ableitungen, dass $u(x)$ in $[\frac{1}{1+A}, \frac{A}{1+A}]$ konvex ist, und dass sie ihr Maximum in den Endpunkten dieses Intervalls annimmt. Somit gilt

$$\max_{-A \leqq \alpha \leqq -\frac{1}{A}} M(\alpha) = M(-A) = M(-\frac{1}{A}) = \frac{4}{1+A}. \tag{2}$$

Es verbleibt die zwei Fälle zu untersuchen, wo jeweils nur einer der Zahlen μ und $-\mu$ in $[\alpha,1]$ liegt. Wegen der Symmetrie von h bzgl. $x = 0$, lassen sich diese Fälle auf den $0 < x < \frac{1}{1+A}$, d.h. auf den $-\frac{1}{A} < \alpha < 0$ zurückführen.

Genau wie im Beweis von Lemma 1 errechnen wir hier

$$M(\alpha) = \frac{1}{2}\, I(|h-I(h)|) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\mu}^{1}(\log t-\log\mu)dt =$$

$$= (1-x)(e^{\kappa(x)-1}-\kappa(x)) = v(x),$$

wobei $\kappa(x) = x\log\frac{x}{1-x}$ ist.

Das Maximum-Verhalten von $M(\alpha)$ in $(-\frac{1}{A},0)$ wird durch das folgende Lemma beschrieben:

<u>LEMMA 2</u>. <u>Die Funktion</u> $M(\alpha)$ <u>nimmt ihr Maximum auf</u> $(-\frac{1}{A},0)$ <u>in genau einem Punkt</u> α_0 <u>an</u>. Es ist $\alpha_0 \approx -0{,}136$.

<u>Beweis</u>. Es genügt zu beweisen, dass $v'(0) > 0$, $v'(\frac{1}{1+A}) < 0$, und $v''(x) < 0$ für $0 < x < \frac{1}{1+A}$ gilt.

Offenbar haben wir $\kappa(0)=0$, $\kappa(\frac{1}{1+A}) = -\frac{1}{A}$, $\kappa'(\frac{1}{1+A})=0$, $\kappa'(0)=-\infty$. Daraus folgt nach einfacher Rechnung, dass $v'(0)=+\infty$, $v'(\frac{1}{1+A})<0$.

Andererseits ist

$$v''(x) = (e^{\kappa(x)-1}-1)\{(1-x)\kappa''(x)-2\kappa'(x)\}+e^{\kappa(x)-1}(\kappa'(x))^2(1-x) <$$

$$< (e^{\kappa(x)-1}-1)\ \frac{1-2x}{(1-x)x} - \frac{2}{1-x} + \frac{e^{\kappa(x)-1}}{1-x} + e^{\kappa(x)-1}(1-x)\log^2 \frac{x}{1-x} <$$

$$< \frac{1-x}{e}\ \{(1-e)\ \frac{1-2x}{(1-x)^2x} + \frac{e^{-1}-2}{(1-x)^2} e + \log^2 \frac{x}{1-x}\} <$$

$$< \frac{1-x}{e}\ (-\frac{3}{4x} - \frac{3}{2}\ e + \log^2 x) < 0,$$

da ja $\log^2 x < \frac{3}{4x} + \frac{3}{2} e$ in $(0, \frac{1}{1+A})$ gilt, wie man leicht feststellt.

Mit Hilfe der Lemmas 1 und 2, der Beziehung (2) und der Tatsache, dass $\frac{4}{1+A} > \frac{2}{e}$ ist, können wir sofort die BMO-Norm von h bestimmen:

SATZ 1. *Die BMO-Norm von $\log|t|$ ist gleich der mittleren Oszillation dieser Funktion auf dem Intervall $I=[\alpha_0, 1]$, wobei α_0 die eindeutig bestimmte Zahl aus dem Lemma 2 darstellt, und zwar ist* $\|\log|t|\|_{BMO} \simeq 0{,}93$.

BEMERKUNG Manchmal ist es sinnvoll den reellen Logarithmus als BMO-Funktion auf seinem natürlichen Definitionsbereich $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x>0\}$ zu betrachten. Völlig analog wie auf $\mathbb{R}$ definiert man die BMO-Norm von $\log t$ auf $\mathbb{R}_+$ und findet man dann, nach Lemma 1, dass ihr Wert gleich $\frac{2}{e}$ ist.

2. Der Komplexe Fall

Sei $f(e^{it})$ eine komplexe integrierbare Funktion auf

$$T = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\},\quad I = \{e^{it},\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\},\quad 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi,$$

und

$$I(f) = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(e^{it})dt.$$

Aus Einfachkeitsgründen arbeitet man im Komplexen mit der *quadratischen mittleren Oszillation*, d.h. mit dem Ausdruck

$$ {}_2I(|f-I(f)|) = \{\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(e^{it})-I(f)|^2 dt\}^{1/2}. $$

Völlig analog zum reellen Fall, definiert man hier als BMO(T) den Raum der Funktionen $f(e^{it})$ mit

$$ {}_2\|f\|_{BMO} = \sup_{I \subset T} {}_2I\ (|f(e^{it})-I(f)|) < +\infty. $$

Zu bemerken ist, dass, aufgrund des Satzes von John-Nirenberg, die Norm ${}_2\|f\|$ äquivalent ist zu der $\|f\|_{BMO}$, definiert wie im reellen Fall (siehe [4], S. 233, Corollary 2.3.).

Man weiss wieder ([5]), dass der komplexe Logarithmus

$$ g(e^{it}) = \log(1-e^{it}) = \log 2\sin\frac{t}{2} + i\frac{t-\pi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n}, \quad 0 < t < 2\pi, $$

zum BMO(T) gehört, doch sind weitere Eigenschaften von ${}_2I(|g-I(g)|)$, sowie der genau Wert der quadratischen BMO-Norm ${}_2\|g\|_{BMO}$ nicht bekannt.

Zunächst schreiben wir

$$ (3)\quad \{{}_2I(|g-I(g)|)\}^2 = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{|g(e^{it})|^2 + |I(g)|^2 - 2\mathrm{Re}\,I(g)\overline{g(e^{it})}\}dt = $$

$$ = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(e^{it})|^2 dt - |I(g)|^2. $$

Danach setzen wir für einen Bogen I mit Mittelpunkt e^{ix} und Länge δ

$$ \{{}_2I(|g-I(g)|)\}^2 = Q(x,\delta), \quad 0 \leq x < 2\pi, \quad 0 < \delta \leq 2\pi, $$

und beweisen wir die folgende Symmetrieeigenschaft:

SATZ 2. Für jeden Bogen $I \subset T$ gilt

$$ (4)\qquad Q(x,\delta) \leq Q(0,\delta)\ . $$

d.h. die quadratische mittlere Oszillation von g auf allen Bögen gleicher Länge nimmt ihren grössten Wert bei dem Bogen mit Mittelpunkt im $z = 1$ an.

Beweis Offenbar ist $Q(x,\delta)$ symmetrisch bzgl. der Ebene $x = \pi$. Daher genügt es, die Ungleichung (4) für $0 \leq x \leq \pi$, $0 < \delta \leq 2\pi$ zu beweisen. Für $\delta = 2\pi$ gilt (4) als Gleichheit, da definitionsgemäss (s. [3], S. 34)

$$Q(x,2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log(1-e^{it})|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 \leqq x < 2\pi.$$

Wir werden (4) mittels der Ungleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,\delta) \leqq 0, \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 < \delta < 2\pi \tag{5}$$

nachweisen.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) <u>Der Punkt</u> $z = 1$ <u>gehört nicht zum Bogen</u> I, d.h. $x > \frac{\delta}{2}$.

Man setzt $x+\frac{\delta}{2} = \alpha$, $x-\frac{\delta}{2} = \gamma$, $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \gamma < \pi$,

$$\varphi(t) = \log 2\sin\frac{t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

und hat nach (3)

$$Q(x,\delta) = \frac{1}{\delta}\int_\gamma^\alpha \{\varphi^2(t)+(\tfrac{t-\pi}{2})^2\}dt - \frac{1}{\delta^2}\{\int_\gamma^\alpha (\varphi(t)+i\tfrac{t-\pi}{2})dt\}^2 =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_\gamma^\alpha \varphi^2(t)dt - \frac{1}{\delta^2}\{\int_\gamma^\alpha \varphi(t)dt\}^2 + \frac{\delta^2}{48}, \text{ d.h.}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{\delta^2}\{\varphi(\alpha)-\varphi(\gamma)\}\{\tfrac{\delta}{2}(\varphi(\alpha)+\varphi(\gamma)) - \int_\gamma^\alpha \varphi(t)dt\}.$$

Da zusätzlich, wegen der Konkavität von $\varphi(t)$,

$$\frac{\delta}{2}\{\varphi(\alpha)+\varphi(\gamma)\} < \int_\alpha^\gamma \varphi(t)dt$$

gilt, ist die Beziehung (5) in diesem Fall bewiesen.

β) <u>Der Punkt</u> $z = 1$ <u>gehört zu</u> I, d.h. $x \leqq \frac{\delta}{2}$.

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial Q}{\partial x}$ bzgl. x genügt es, wenn (5) für $x < \frac{\delta}{2}$, bewiesen wird.

Mit $x+\frac{\delta}{\alpha} = \alpha$, $x+2\pi-\frac{\delta}{2} = \beta$, $\alpha,\beta \in (0,2\pi)$, $\alpha < \beta$, $\frac{\alpha+\beta}{2} > \pi$, bekommen wir nach (3)

$$Q(x,\delta) = \frac{1}{\delta}\{\int_0^{2\pi} |g(e^{it})|^2 dt - \int_\alpha^\beta |g(e^{it})|^2 dt\} - \tag{6}$$

$$- \frac{1}{\delta^2}\{\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\}^2 - \frac{1}{\delta^2}\{\int_\alpha^\beta \frac{t-\pi}{2}\,dt\}^2 =$$

$$= \frac{\pi^3}{6\delta} - \frac{1}{\delta}\int_\alpha^\beta \varphi^2(t)dt - \frac{1}{\delta^2}\{\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\}^2 - \frac{x^2}{\delta^2}\pi(\pi-\frac{\delta}{2}) +$$

$$+ \frac{1}{12}(\frac{\delta^2}{4} - \frac{3}{2}\pi\delta + 3\pi^2),$$

und daraus

$$\delta^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = -x\pi(2\pi-\delta) + 2\{\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\}\{\delta\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} + \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\}.$$

Somit ist (5) in diesem Fall äquivalent zu der folgenden scharfen Ungleichung, die wir getrennt als Lemma beweisen.

LEMMA. Wenn $\varphi(t) = \log 2\sin\frac{t}{2}$, $0 < t < 2\pi$, so gilt

$$\{\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\}\{(2\pi-(\beta-\alpha))\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} + \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\} < \frac{\pi}{2}(\frac{\alpha+\beta}{2}-\pi)(\beta-\alpha) \tag{7}$$

für alle α, β in $(0,2\pi)$, mit $\beta > \alpha$ und $\frac{\alpha+\beta}{2} > \pi$.

Beweis. Nach der Ungleichung von Karamata ([6], S. 272) ist

$$\varphi(\alpha)-\varphi(\beta) = \log\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} < \frac{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}} <$$

$$< \frac{1}{4}(\beta-\alpha)(\frac{\alpha+\beta}{2} - \pi)\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}},$$

also genügt es

$$(2\pi-(\beta-\alpha))\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} + \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt < 2\pi\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} \tag{8}$$

für unsere α und β zu beweisen.

Wir unterscheiden vier Fälle für die α, β.

(i) $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} \leqq \beta < 2\pi$.

Wir setzen hier $2\pi-\beta = B = \mu\alpha$, wobei man aus Symmetriegründen $\mu < 1$ annehmen kann.

Es gilt $\frac{3}{\pi} \leqq 2 \frac{\sin\frac{t}{2}}{t} < 1$ für $0 < t \leqq \frac{\pi}{3}$, da ja $(\frac{\sin x}{x})' < 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$. D.h. $\log\alpha + \log\frac{3}{\pi} \leqq \varphi(\alpha) < \log\alpha$, und ähnlich $\log B + \log\frac{3}{\pi} \leqq \varphi(B) < \log B$.

Berücksichtigt man ausserdem dass $\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = 0$, so braucht man statt (8), die

$$(\alpha+B)(\log\alpha+\log B) - 2\int_0^{\alpha}(\log t+\log\tfrac{3}{\pi})dt - 2\int_0^{B}(\log t+\log\tfrac{3}{\pi})dt < 4\pi\sqrt{(\tfrac{3}{2\pi})^2 \alpha B}$$

zu beweisen. Letztete ist äquivalent zu der $(1-\mu)\log\mu+2(1-\log\frac{3}{\pi})(\mu+1)-6\sqrt{\mu}<0$, $0 < \mu < 1$, welche aber wahr ist, wie man leicht mit Hilfe der Ableitungen feststellt.

ii) $\frac{\pi}{3} \leqq \alpha \leqq \frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} \leqq \beta < 2\pi$.

Wir beginnen hier mit der Bemerkung, dass $\frac{\pi}{3} < 2\pi-(\beta-\alpha) < 2\pi$, und auch

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dt < 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \varphi(t)dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varphi(t)dt < -2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\log\tfrac{3}{\pi} + \log t)dt = \tfrac{2\pi}{3}.$$

Falls $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) \geqq 0$, d.h. $1 \leqq 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} < 2$, so genügt es zu beweisen, dass $2\pi \frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} + \frac{2\pi}{3} < \pi\sqrt{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$, oder $\log\omega + \frac{2}{3} < \sqrt{\omega}$ für $1 \leqq \omega < 2$, was wahr ist.

Falls $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) < 0$, so genügt es, wenn die Ungleichung

$$\frac{\pi}{3}\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)}{2} + \frac{2\pi}{3} < \pi\sqrt{4\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}},$$

oder die $\log\omega + 4 < 6\sqrt{\omega}$ für $0 < \omega < 1$ gilt, was sofort zu verifizieren ist.

iii) $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{3}$, $\pi < \beta < \frac{5\pi}{3}$.

In diesem Fall ist $\frac{1}{2} < \sin\frac{\beta}{2} < 1$, also brauchen wir lediglich die Ungleichung

$$(2\pi-(\beta-\alpha))\varphi(\alpha)+(\beta-\alpha)\varphi(\alpha) < \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\tfrac{\alpha}{2}}, \text{ oder die } \log\omega < \frac{\sqrt{\omega}}{2} \text{ für } 1<\omega=2\sin\tfrac{\alpha}{2}<2$$

nachzuweisen. Letztere ist aber sofort einzusehen.

iv) $\frac{5\pi}{3} < \alpha < 2\pi$, $\frac{5\pi}{3} < \beta < 2\pi$.

In diesem Fall ist (8) trivial, da ja ihre linke Seite negativ ist.

Der Satz 2 erlaubt uns jetzt, die quadratische BMO - Norm von $\log(1-e^{it})$ auszurechnen.

<u>SATZ 3</u>. Es gilt $_2\|\log(1-e^{it})\|_{BMO} = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$.

<u>Beweis</u>. Aus dem Satz 2 folgt

$$\{_2\|\log(1-e^{it})\|_{BMO}\}^2 = \sup_{0<\delta\leq 2\pi} Q(0,\delta) ,$$

wobei, gemäss (6) und den Beziehungen $\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)dt = \frac{\pi^3}{6}$, $\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt = 0$,

$$Q(0,\delta) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varphi^2(t)dt - \frac{1}{\alpha^2}\{\int_0^\alpha \varphi(t)dt\}^2 + \frac{\alpha^2-3\pi\alpha+3\pi^2}{12}$$

gilt, mit $\alpha = \frac{\delta}{2}$.

Setzen wir

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varphi^2(t)dt - \frac{1}{\alpha^2}\{\int_0^\alpha \varphi(t)dt\}^2 \tag{9}$$

so genügt es offenbar zu zeigen, dass $\sup_{0<\alpha\leq\pi} \sigma(\alpha) = 1$.

Zunächst verifiziert man nach wiederholter Differentiation, dass

$$\lim_{\alpha\to 0}\sigma(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}\{\alpha\varphi(\alpha) - \int_0^\alpha \varphi(t)dt\} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{2}\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} = 1. \tag{10}$$

Wir setzen nun $F(\alpha) = \alpha^2(\sigma(\alpha)-1)$, und beweisen, dass $F'(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$ und $F''(\alpha) < 0$ für $0 < \alpha < \pi$.

Es ist sofort einzusehen, dass diese Beziehungen, in Kombination mit (10), die Ungleichung $F(\alpha) < 0$, d.h. die $\sigma(\alpha) < 1$ für $0 < \alpha \leq \pi$ implizieren, welche aber den Satz vollständig beweist.

Für α klein gilt offenbar

$$|\int_\varphi^\alpha \varphi(t)dt| < |\int_0^\alpha \log(\frac{2}{\pi}\,t)dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{und}$$

$$\int_0^\alpha \varphi^2(t)dt < \int_0^\alpha \log^2(\frac{2}{\pi}\,t)dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

also $F'(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Für die zweite Ableitung $F''(\alpha)$ errechnen wir

$$F''(\alpha) = \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\ \{\alpha\varphi(\alpha) - \int_0^\alpha \varphi(t)dt\} - 2,$$

und bemerken dann, dass

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\, F''(\alpha) < \alpha\varphi(\alpha) - \int_0^\alpha \varphi(t)dt - \alpha.$$

Dabei strebt die rechte Seite wieder gegen 0, wenn $\alpha \to 0$, indem ihre Ableitung negativ bleibt für alle α, $0 < \alpha < \pi$. Somit gilt $F''(\alpha) < 0$ in der Tat.

Herrn Prof. Chr. Pommerenke sei hier für Hinweise gedankt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. CAMPBELL, Les intégrales eulériennes et leurs applications , Dunod 1966

[2] N. DANIKAS, Über die BMOA-Norm von log(1-z), Arch. Math. 42, 74-75 (1984)

[3] P.L. DUREN, Theory of H^p Spaces, Academic Press 1981

[4] J.B. GARNETT, Bounded analytic functions, Academic Press 1981

[5] F. JOHN, L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14, 415-426 (1961)

[6] D.S. MITRINOVIC, Analytic inequalities, Springer-Verlag 1970

N. DANIKAS
Fachbereich Mathematik
Aristoteles Universität Thessaloniki
54006 Thessaloniki
Griechenland

(Eingegangen am 26. Mai 1987)