Werk

Titel: Les groupes oscillateurs et leurs reseaux.

Autor: Medina, Alberto; Revoy, Philippe

Jahr: 1985

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0052|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

manuscripta math. 52, 81 - 95 (1985)

manuscripta mathematica
© Springer-Verlag 1985

LES GROUPES OSCILLATEURS ET LEURS RESEAUX

Alberto Medina et Philippe Revoy

In this paper we study the geometry of oscillator groups : they are the only non commutative simply connected solvable Lie groups which have a biinvariant Lorentzian metric. We first study curvature and geodesics, and then give a full analysis of lattices - i.e. discrete cocompact subgroups - getting examples of compact Lorentzian homogeneous varieties.

Les groupes de Lie connexes qui admettent une métrique de Lorentz bi-invariante ont été déterminés par le premier des auteurs en [2]. Parmi eux, ceux qui sont résolubles, non commutatifs et simplement connexes sont appelés groupes oscillateurs. Nous étudions ici la géométrie de ces groupes et leurs réseaux, i.e leurs sous-groupes discrets co-compacts. Si G est un groupe oscillateur, ses réseaux déterminent des variétés de Lorentz homogènes compactes, sur lesquelles G agit par des isométries.

Introduction - Résultat principal.

Soit $H_{2k+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}^k$ le groupe d'Heisenberg et soit $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ k nombres réels strictement positifs. Faisons agir le groupe additif $\mathbb{R}$ sur H_{2k+1} par l'action :

$$\rho(t)(u,(z_j)) = (u,(e^{i\lambda_j t} z_j)).$$

Le groupe $G_k(\lambda)$, produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par H_{2k+1} suivant ρ, est muni d'une métrique de Lorentz bi-invariante. Voici comment on la construit : soit $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$ l'espace tangent à l'origine. Etendons le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{2k}$ en une forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$ de façon que le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soit hyperbolique et orthogonal à $\mathbb{R}^{2k}$. Cette forme définit une métrique de Lorentz invariante à gauche sur $G_k(\lambda)$; elle est aussi invariante à droite car les opérateurs adjoints sur $\mathfrak{g}$ sont antisymétriques ([5]).

Les groupes $G_k(\lambda)$ sont caractérisés ([2]) par :

<u>THEOREME I</u> : <u>Les groupes $G_k(\lambda)$ sont les seuls groupes de de Lie simplement connexes, résolubles et non commutatifs qui admettent une métrique de Lorentz bi-invariante.</u>

Il est facile de voir que les groupes $G_1(\lambda)$ sont isomorphes ; le groupe $G_1 = G_1(1)$ est usuellement connu sous le nom de groupe oscillateur ([7]). L'étude des réseaux de $G_k(\lambda)$ suppose celle des réseaux du groupe dérivé H_{2k+1}. Pour ces derniers on a :

<u>THEOREME II</u> : <u>L'ensemble des classes d'isomorphie de réseaux de H_{2k+1} est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'équivalence de formes bilinéaires alternées de rang maximal sur $\mathbb{Z}^{2k}$.</u>

On notera que deux formes intervenant dans II sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes facteurs invariants.

Le théorème II est sûrement connu, néanmoins nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature. Pour une démonstration le lecteur est renvoyé à [3]([1] pour k=1).

Le lemme 3.1 fournit une condition nécessaire et suffisante portant sur ρ pour que $G_k(\lambda)$ possède des réseaux. Si elle est satisfaite, soit L un réseau de $G_k(\lambda)$: $\Gamma = L_\cap H_{2k+1}$ est alors un réseau de H_{2k+1} ([6] p.50). Désignons par B_Γ la forme alternée associée à Γ d'après II et soit $Sp(B_\Gamma)$, contenu dans $S\ell(2k,\mathbb{Z})$, le groupe symplectique correspondant. Le résultat principal de ce travail est le suivant :

<u>THEOREME III</u> : 1) <u>Tout réseau</u> Γ <u>de</u> H_{2k+1} <u>peut être plongé dans un réseau d'un groupe</u> $G_k(\lambda)$.

2) <u>A un réseau</u> L <u>de</u> $G_k(\lambda)$ <u>est associé canoniquement un élément</u> A_L <u>de</u> $Sp(B_\Gamma)$ <u>d'ordre fini. Réciproquement si</u> A <u>est un élément d'ordre fini de</u> $Sp(B_\Gamma)$, <u>il existe une infinité de groupes</u> $G_k(\lambda)$ <u>non isomorphes et des réseaux</u> L <u>tels que</u> $L \cap H_{2k+1} = \Gamma$ <u>et</u> $A_L = A$, k <u>étant supposé</u> > 1.

3) <u>Si</u> 1 <u>n'est pas valeurs propre de</u> A, <u>le réseau</u> L <u>est uniquement déterminé, à isomorphisme près, par</u> $G_k(\lambda)$. <u>Si</u> 1 <u>est valeur propre de</u> A, <u>il y a un nombre fini de réseaux</u> L <u>non isomorphes dans</u> $G_k(\lambda)$ <u>tels que</u> $A_L = A$.

Ce résultat détermine en particulier tous les réseaux du groupe G_1.

Voici comme cet article est organisé. Dans 1 nous donnons l'expression, en coordonnées locales, de la métrique de $G_k(\lambda)$ et de ses courbures. La section 2 étudie les géodésiques. La preuve du théorème III est faite dans 3.

1. Métrique et courbures de $G_k(\lambda)$.

Soit $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ où $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ l'algèbre de Lie de $G_k(\lambda)$. Il existe une base $\{e_o,e_1,\dots,e_{2k},e_{2k+1}\}$ de $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ dans laquelle le crochet de Lie s'exprime comme :

$$[e_o,e_i] = 0 \quad , \quad [e_{2j-1},e_{2j}] = e_o$$

$$[e_{2k+1},e_{2j-1}] = \lambda_j e_{2j} \; ; \; [e_{2k+1},e_{2j}] = - \lambda_j e_{2j-1}$$

pour $i > 0$, $1 \leq j \leq k$, tous les autres produits étant nuls, ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation. Ici $\{e_1,\dots,e_{2k}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2k} \equiv \mathbb{C}^k$ pour le produit scalaire usuel. Etendons ce dernier à $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ de façon que le plan $\mathbb{R}e_o \oplus \mathbb{R}e_{2k+1}$ soit hyperbolique et orthogonal à $\mathbb{R}^{2k}$. La forme symétrique $< , >$ ainsi obtenue sur $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ est non dégénérée et d'indice 1. Des formules ci-dessus, il résulte que pour tout a,b et c dans $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ on a :

$$< \mathrm{ad}\, a\, (b), c > + < b, \mathrm{ad}\, a(c) > = 0$$

Par conséquent $< , >$ définit sur $G_k(\lambda)$ une métrique de Lorentz bi-invariante. Cette construction n'est qu'un cas particulier de la technique de double extension décrite en [4]. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ et soit Φ_e

l'isomorphisme entre l'espace $\mathfrak{g}$ et son dual $\mathfrak{g}^*$ défini par $<\ ,\ >$. Si g est un élément de $G_k(\lambda) = G$ la métrique en g s'exprime par l'isomorphisme d'espaces vectoriels Φ_g de $T_g(G)$ dans $T^*_g(G)$:

$$\Phi_g = {}^tD(\bar{g}^1).\ \Phi_e.D(\bar{g}^1)$$

où $D(\bar{g}^1)$ est la différentielle en l'élément neutre de la translation à gauche suivant g.

Un calcul direct dans les coordonnées globales $(u,(a_j,b_j),t)$ où $z_j = a_j + ib_j$ conduit à l'expression suivante pour la métrique :

$$ds^2 = 2\ dudt + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(b_j da_j - a_j db_j)dt + \sum_{j=1}^{k} (da_j^2 + db_j^2)$$

On peut évidemment toujours trouver un système local de coordonnées dans lequel la métrique s'écrit sous sa forme canonique. Par exemple si pour $G_1 = G_1(1)$ on pose,

$$T = 2tg(t), \quad u' = u - \frac{1}{4}T(a^2+b^2)$$

$$a' = a + btg(t), \quad b' = b - atg(t)$$

dans les coordonnées (u',a',b',T) la métrique devient

$$ds^2 = (1 + T^2/4)^{-1}(du'dT + da'^2 + db'^2)$$

et donc

$$ds^2 = (1 + (v_1-v_2)^2/4)^{-1}(dv_1^2 - dv_2^2 + da'^2 + db'^2)$$

où $\quad v_1 = \frac{1}{2}(u'+T)$ et $v_2 = \frac{1}{2}(u'-T)$.

Etudions maintenant les courbures de la variété Lorentzienne $G_k(\lambda)$. Puisque la métrique est invariante, il nous suffit de connaître les courbures en l'élément neutre du groupe.

La connexion ∇ de Levi-Civita étant donnée par $\nabla_a b = \frac{1}{2}[a,b]$ pour a et b dans $\mathfrak{g}_k(\lambda) = g$,

$$R_{a,b} = \nabla_{[a,b]} - [\nabla_a, \nabla_b] = \frac{1}{4}\, \mathrm{ad}[a,b]$$

est le tenseur de courbure. Si $k(a,b) = < R_{a,b}(a), b >$ est la forme de courbure, un calcul simple montre que $k(a,b) = \frac{1}{4} < [a,b],[a,b] >$. Ainsi si $P = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ est un plan non isotrope, sa courbure, sectionnelle, est fournie par

$$s(P) = \frac{1}{4} \frac{< [a,b],\ [a,b] >}{<a,a><b,b>-<a,b>^2}$$

Le tenseur R n'étant pas identiquement nul il existe dans $\mathfrak{g}_k(\lambda)$ des plans non isotropes de courbure non nulle. Par contre tout plan tangent en e à H_{2k+1} a une courbure nulle.

En ce qui concerne la forme de Ricci, un calcul à l'aide d'une base orthonormale permet de l'exprimer comme

$$r(a,b) = -\frac{1}{4} K(a,b)$$

où K est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Par suite si $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est la projection sur $\mathbb{R}e_{2k+1}$ on a alors,

$$r(a,b) = \frac{1}{2} f(a)f(b) \sum_1^k \lambda_j^2$$

Finalement soit S la courbure scalaire en e. Un calcul dans la base orthonormale de $\mathfrak{g}$, $\frac{1}{2}(e_o + e_{2k+1})$, $\frac{1}{2}(e_o - e_{2k+1})$,

$e_j \quad 1 \leq j \leq 2k$, donne alors

$$S = \frac{1}{4} \sum_{1}^{k} \lambda_j^2$$

2. Géodésiques de $G_k(\lambda)$

La connexion de Levi-Civita étant invariante à gauche, il nous suffit de connaître les géodésiques passant par l'élément neutre. Or ces dernières ne sont autres que les sous-groupes à un paramètre de $G_k(\lambda)$.

Considérons d'abord, un homomorphisme de groupes de Lie du groupe additif $\mathbb{R}$ dans G_1, $s \mapsto (u(s),z(s),t(s))$.

Pour tout s_1 et s_2 dans $\mathbb{R}$ nous avons :

i) $u(s_1+s_2) = u(s_1) + u(s_2) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \bar{z}(s_1)e^{it(s_1)} z(s_2)$

ii) $z(s_1+s_2) = z(s_1) + e^{it(s_1)} z(s_2)$

iii) $t(s_1+s_2) = t(s_1) + t(s_2)$

La dernière condition implique l'existence de β réel, tel que $t(s) = \beta s$ pour tout s. Si $\beta = 0$, les géodésiques passant par e sont les sous-groupes à un paramètre de H_3 :

$$u(s) = \lambda s, \; z(s) = z_o s \quad , \quad t(s) = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z_o \in \mathbb{C}$.

Supposons β non nul. Le rôle symétrique de s_1 et s_2 permet d'écrire ii) comme

$$z(s_1)(1-e^{i\beta s_2}) = z(s_2)(1-e^{i\beta s_1})$$

Prenons $s_2 = 1$ et posons $z_o = \frac{z(1)}{1-e^{i\beta}}$ si $\beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$; sinon on prendra une autre valeur de s_2. Dans tous les cas on trouve $z(s) = z_o(1 - e^{i\beta s})$ qui est effectivement solution de ii). Rapportant dans i), il vient

$$u(s_1+s_2) = u(s_1)+u(s_2)+\frac{|z_o|^2}{2} \quad (\sin\beta\, s_1+\sin\beta\, s_2-$$

$- \sin\beta(s_1+s_2))$. Il est alors immédiat que les seules solutions de cette équation sont les fonctions

$$s \mapsto u(s) = \alpha\, s - \frac{1}{2}|z_o|^2 \sin\beta\, s$$

Par conséquent les équations des géodésiques passant par e sont :

$$g(s) = (\alpha\, s - \frac{1}{2}|z_o|^2\sin\beta\, s,\ z_o(1-e^{i\beta s}), \beta s) \quad \text{si} \quad \beta \neq 0$$

$$g(s) = (\alpha\, s,\ z_o s,\ 0) \quad \text{autrement}$$

Dans le cas général du groupe $G_k(\lambda)$, par un calcul analogue, on obtient

$$(1) \qquad \begin{aligned} t(s) &= \beta\, s \\ v_j(s) &= z_j(1-e^{i\lambda_j\beta s}) \\ u(s) &= \alpha\, s - \frac{1}{2}\sum_j |z_j|^2 \sin\beta\,\lambda_j s \end{aligned}$$

En termes de l'action de $\mathbb{R}$ sur H_{2k+1} qui définit $G_k(\lambda)$ ces géodésiques peuvent s'écrire simplement comme

$$g(s) = (\alpha\, s - \frac{1}{2} B(v,\rho(\beta s)v),\ (\mathrm{Id}-\rho(\beta s))(v), \beta s)$$

où B est la forme bilinéaire alternée implicite dans (1) et $v = (z_1,\dots,z_k)$ est un élément de $\mathbb{C}^k$.

3. Démonstration du théorème III.

Pour prouver le théorème nous avons besoin du lemme suivant :

3.1 LEMME. *Pour que le groupe $G_k(\lambda)$ où $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ ait des réseaux, il faut et suffit que les λ_j engendrent un sous-groupe additif discret de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons que $G_k(\lambda)$ ait un réseau L ; alors $\Gamma = L \cap H_{2k+1}$ est un réseau de H_{2k+1} ([6],p.50). D'après le théorème II, Γ est défini par un réseau Λ_Γ de $V = \mathbb{C}^k$ et une forme bilinéaire alternée B_Γ à valeurs entières sur Λ_Γ. Soit $\gamma = (u,(z_j),t)$ un élément de L n'appartenant pas à Γ ; pour tout élément s de Γ, $\gamma s \gamma^{-1}$ appartient à Γ. Si $s = (v,(y_j),0)$ on trouve $\gamma s \gamma^{-1} = (w,(e^{i\lambda_j t} y_j),0)$. Cela signifie que Λ_Γ est invariant par la transformation linéaire $(x_j) \mapsto (e^{i\lambda_j t} x_j)$ que nous noterons $A(t)$. Il est clair que $A(t)$ est une isométrie de V pour la norme $\|(x_j)\|^2 = \sum_j |x_j|^2$. Comme tout réseau n'a qu'un nombre fini de vecteurs de longueur donnée, $A(t)$ est d'ordre fini dans le groupe linéaire de V. En outre $A(nt) = A(t)^n$ et donc les fonctions $t \mapsto e^{i\lambda_j t}$, $1 \leq j \leq k$, ont une période commune non nulle c'est-à-dire que les scalaires λ_j sont deux à deux commensurables. Ainsi les λ_j engendrent additivement un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. On remarquera que si $\mathbb{Z}t_0$ est le groupe des périodes ci-dessus, le centre de $G_k(\lambda)$

est constitué des triplets de la forme $(u,0,nt_o)$ avec $u \in \mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{Z}$.

Réciproquement supposons que les λ_j engendrent un sous-groupe discret du groupe additif $\mathbb{R}$. Si Γ est un réseau de H_{2k+1} alors $\bar{\Gamma} = \Gamma \times \mathbb{Z}(0,0,t_o)$, $t_o \neq 0$, est un réseau de $G_k(\lambda)$.

<u>Démonstration du théorème</u>. D'après un résultat de Minkowski, l'ordre d'un élément de $S\ell(2k,\mathbb{Z})$ est soit infini soit borné uniquement en fonction de k. Considérons un réseau L de $G_k(\lambda)$ et soit T la plus petite période non nulle des fonctions $t \mapsto e^{i\lambda_j t}$. Désignons par p et π les projections des suites exactes de groupes de Lie

$$\{0\} \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} H_{2k+1} \xrightarrow{p} V \to \{0\}$$

$$\{0\} \to H_{2k+1} \xrightarrow{i} G_k(\lambda) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \to 0$$

A chaque $t_o \in \pi(L)$ il correspond un automorphisme d'ordre fini de Λ c'est-à-dire un élément de $S\ell(2k,\mathbb{Z})$. Puisque l'ordre de cet élément est le plus petit entier positif h tel que $h\, t_o \in \mathbb{Z}T$, cela signifie qu'il existe un entier N tel que $\pi(L)$ est contenu dans $\mathbb{Z}T/N$ et donc que $p(L) = \mathbb{Z}\, t_L$ où t_L et T sont commensurables. Il s'en suit qu'à L est associé canoniquement un automorphisme $A(t_L)$ de Λ_Γ qu'on notera simplement A_L. Noter que A_L est un élément de $Sp(B_\Gamma)$.

Réciproquement, soit A un élément d'ordre fini de

$Sp(B_\Gamma)$; les valeurs propres de A sont des racines de l'unité. De plus A est de déterminant 1 et il existe une forme quadratique φ définie positive sur $\Lambda_\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ invariante par A. Pour ceci il suffit de prendre un produit scalaire arbitraire $< , >$ et de poser

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{o(A)} < A^i x, A^i y >$$

où $o(A)$ est l'ordre de A.

Par conséquent A appartient à un sous-groupe à un paramètre du groupe $SU(k,\mathbb{C})$. De façon précise, A est produit de k rotations dans k plans P_j deux à deux perpendiculaires d'angles respectifs $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. En effet les valeurs propres de A sont les $e^{\pm i\alpha_j}$, $j = 1,2,\ldots,k$.

Soit $A(t)$ la matrice produit des k rotations dans les plans P_j d'angles respectifs $(\alpha_j + 2\pi n_j)t$, les n_j étant des entiers arbitraires ; alors $A(1) = A$.

Le produit semi-direct de H_{2k+1} par $\mathbb{R}$ suivant l'action $A(t)$ est un groupe $G_k(\lambda)$ avec $\lambda = (\alpha_j + 2\pi n_j)$ et l'ensemble des triplets (u,z,n) où (u,z) parcourt le réseau Γ de H_{2k+1} et $n \in \mathbb{Z}$ est un réseau L de $G_k(\lambda)$ car $A(n) = A^n$ est un automorphisme de B_Γ. Il est clair aussi que la matrice A_L associée à L est exactement $A(1) = A$.

On remarquera que deux groupes $G_k(\beta_j)$, $G_k(\beta'_j)$ avec $\beta_j = \alpha_j + 2\pi n_j$; $\beta'_j = \alpha_j + 2\pi n'_j$ ne sont isomorphes que si les quotients β_j/β'_j ont la même valeur, indépendante de j.

Ainsi pour $k > 1$ et Γ réseau de H_{2k+1} nous obtenons une infinité de groupes $G_k(\lambda)$ non isomorphes ayant chacun un réseau $L(\lambda)$ tel que $\Gamma = H_{2k+1} \cap L(\lambda)$ et $A_{L(\lambda)} = A$.
Reste à étudier ce qui se passe pour deux réseaux L_1 et L_2 d'un même groupe $G_k(\lambda)$ pour lesquels $L_1 \cap H_{2k+1} = L_2 \cap H_{2k+1}$ et $A_{L_1} = A_{L_2}$.
Remarquons qu'un automorphisme du groupe de Lie $G_k(\lambda)$ qui laisse H_{2k+1} stable est de la forme

$$(u,v,t) \mapsto (u+\alpha t - \tfrac{1}{2}B(v_o, A(t)v_o),\ v + (Id-A(t))v_o, t)$$

avec $g(t) = (\alpha t - \frac{1}{2}B(v_o, A(t)v_o),\ (Id-A(t))v_o, t)$

groupe à un paramètre, α et v_o étant arbitraires dans $\mathbb{R}$ et V respectivement.
Soit (u,v,t) un élément de L dont la projection sur $\mathbb{R}$ engendre $\pi(L)$. Si $Id-A_L$ est inversible, il existe un vecteur unique v_o de V tel que $(Id-A_L)(v_o) = v$ et en modifiant L par un automorphisme convenable de $G_k(\lambda)$, qui laisse stable H_{2k+1}, on peut supposer que $(0,0,t)$ appartient à L. Il en résulte que L est isomorphe au réseau de $G_k(\lambda)$ canoniquement construit à l'aide de A_L. Par conséquent il y a une seule classe d'isomorphisme de réseaux L de $G_k(\lambda)$ qui soit une extension de Γ et pour lequel $A_L = A$.
Si 1 est valeur propre de A_L, $Ker(Id-A_L)$ est un sous-espace de dimension paire de V et le réseau Λ_Γ est une somme orthogonale pour B_Γ de deux réseaux Λ_1 et

Λ_2 tels que A est l'identité sur Λ_1 et 1 n'est pas valeur propre de la restriction de A à Λ_2. Nous pouvons alors modifier le réseau L de sorte qu'un relèvement du générateur positif de p(L) soit de la forme (u,v,t) où $v \in \Lambda_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Tout revient donc à étudier ce qui arrive quand A est la matrice identique i.e quand $\pi(L)$ est dans le groupe des périodes des fonctions $s \to e^{i\lambda_j s}$. Soient $\gamma = (u,v,0) \in \Gamma$ et $g = (u_1,v_1,t) \in L$. Puisque $(0,0,t)$ est dans le centre de $G_k(\lambda)$, l'élément de Γ, $\gamma\, g\, \gamma^{-1} g^{-1}$ est égal à $(B_\Gamma(v,v_1),0,0)$. Il en résulte que v_1 n'est pas n'importe quel élément de $\Lambda_\Gamma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$: en fait $B_\Gamma(v,v_1)$ devra appartenir à $\mathbb{Z}$ quel que soit v dans Λ_Γ. Ainsi v_1 est un élément du réseau dual Λ_Γ^* de Λ_Γ. D'autre part puisque B_Γ est à valeurs entières sur Λ_Γ, Λ_Γ^* contient Λ_Γ. Ils sont identiques si et seulement si les facteurs invariants de B_Γ sont tous égaux à 1 et l'indice de Λ_Γ dans Λ_Γ^* est le discriminant de B_Γ, c'est-à-dire le carré de son pfaffien $d_1^2 d_2^2 \ldots d_k^2$.

Noter que modifier (u_1,v_1,t) par un élément de Γ revient à ajouter à v_1 un vecteur de Λ_Γ. Par suite, seule la classe de v_1 dans le groupe fini $\Lambda_\Gamma^*/\Lambda_\Gamma$ est caractéristique de L. Aussi, à l'aide d'une modification par un sous-groupe à un paramètre on pourra toujours prendre $u_1 = 0$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Le théorème fournit toutes les classes d'isomorphie de réseaux de G_1. En effet, les réseaux Γ de H_3 sont paramétrés par le facteur invariant $d_1 (d_1 \in \mathbb{N})$ de B_Γ qui est l'indice du commutateur $[\Gamma,\Gamma]$ dans le centre $Z(\Gamma)$ de Γ. Compte tenu du théorème on a :

COROLLAIRE 1) Les classes d'isomorphie de réseaux de G_1 sont déterminées par les rotations d'angle $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, π et 0 du plan.

2) Les quatre premières rotations fournissent chacune une classe d'isomorphie. Pour la dernière il y a autant de classes d'isomorphie que d'orbites dans $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z})^2$ sous l'action de $S\ell(2, \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z})$ et il y a au plus d_1^2 orbites.

Le corollaire résulte du fait que ces rotations sont les seuls éléments d'ordre fini de $S\ell(2,\mathbb{Z})$. On remarquera que $\Lambda^*_\Gamma/\Lambda_\Gamma \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}$ et que si d_1 est premier il n'y a que deux orbites pour v_1, Λ_Γ et $\Lambda^*_\Gamma - \Lambda_\Gamma$.

Références

[1] Auslander L, Green L, Hahn F, Flows on homogeneous spaces, Ann. of Math. studies N°53, 1963, Princeton Univ. Press

[2] Medina A. Groupes de Lie munis de pseudo-métriques de Riemann bi-invariantes. Séminaire Géom. Diff., 1981-1982 Montpellier

[3] Medina A., Revoy Ph. Les groupes oscillateurs et leûrs

réseaux (Pre-print)

[4] Medina A., Revoy Ph. Caractérisation des groupes de Lie ayant une pseudo-métrique bi-invariante. Applications. Séminaire Sud-Rhodanien de Géom III, Travaux en cours, Hermann Paris, 1984

[5] Milnor J, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Adv. in Math., 21, 1976, 283-329

[6] Raghunathan M.S., Discret subgroups of Lie groups, Springer-Verlag, 1972

[7] Streater R.F., The representations of the oscillator group, Commun. math, phys.,4,1967,217-236

A. MEDINA - Ph. REVOY
Université Montpellier II
Place E. Bataillon
34060 Montpellier CEDEX France

(Reçu le Octubre 17, 1984)