

Werk

Titel: La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables.

Autor: Hirschowitz, André

Jahr: 1985

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0050|log18

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

**La METHODE d'HORACE pour l'INTERPOLATION
à PLUSIEURS VARIABLES**

André HIRSCHOWITZ

• *En hommage au Professeur Karl STEIN* •

"Que vouliez-vous qu'il fît, contre trois ?"
Corneille

At how many points is it possible to prescribe values to a polynomial of given degree, together with derivatives up to order, say, $t-1$? We solve this problem in case of polynomials in two variables for $t=2$ and $t=3$ and in case of polynomials in three variables for $t=2$. Proofs develop in the frame of modern projective geometry.

Table des Matières

| | |
|---------------------------------------|----|
| 0. Introduction | 2 |
| 1. Traduction en géométrie projective | 5 |
| 2. Sous-schémas rangés | 8 |
| 3. Candidats au rangement | 12 |
| 4. La Méthode d'Horace | 16 |
| 5. Techniques d'ajustage | 26 |
| 6. Techniques d'amorçage | 31 |
| 7. Le cas $n = t = 2$ | 35 |
| 8. Le cas $n = 2, t = 3$ | 37 |
| 9. Le cas $n = 3, t = 2$ | 44 |
| 10. Conclusion au goût du jour | 49 |
| Bibliographie | 50 |

0. Introduction

En combien de points peut-on imposer les valeurs d'un polynôme de degré donné et de ses dérivées (d'ordre au plus $t-1$)? A une variable, cette question est élémentaire et la réponse est classique. Dans ce travail, on traite le problème à deux variables pour $t=2$ et $t=3$ et à trois variables pour $t=2$.

Soit k un corps de caractéristique nulle (mais voir plus bas §1.5), S une partie à m éléments dans l'espace affine \mathbb{A}_k^n de dimension n sur k . On désigne par $\omega_t(s)$ le plus bas degré d'un polynôme s'annulant sur S avec toutes ses dérivées d'ordre au plus $t-1$. Enfin soit $\omega_t(m) := \omega_t(n, m)$ le maximum de $\omega_t(S)$ lorsque S décrit l'ensemble des parties à m éléments de \mathbb{A}_k^n . Des considérations élémentaires d'algèbre linéaire permettent de majorer $\omega_t(m)$ par une fonction $\omega'_t(m) := \omega'_t(n, m)$ (cf. infra §1.2). Et si $\omega_t(m)$ et $\omega'_t(m)$ sont égaux, la réponse à la question initiale est immédiate. On veut donc montrer l'égalité $\omega_t(m) = \omega'_t(m)$.

Des considérations de théorie des groupes algébriques [N] ou de théorie des nombres [W] ont conduits quelques mathématiciens à étudier les fonctions $\omega_t(S)$ et notamment leur comportement asymptotique lorsque t tend vers l'infini (Ch. 1, 2, [D], [EV], [S], [Wü]).

En fait notre problème s'exprime encore mieux en termes des nombres $\omega_t^*(S)$ introduits et étudiés dans [M] et [Ph].

Signalons que le calcul de $\omega_t(m)$, ainsi que l'étude de la stratification par le rang (cf. eg. [Hi 2]) que la fonction ω_t définit sur le schéma de Hilbert,

est relié à diverses questions de géométrie algébrique déjà étudiées sous d'autres points de vue :

- d'abord la recherche des singularités qu'on peut imposer à une hypersurface de degré d dans \mathbb{P}^n (cette question avait été abordée par Remmert en 1977 dans sa conférence au Colloque de Nice sur les Variétés Analytiques Compactes),

- ensuite l'étude de la cohomologie des faisceaux inversibles sur les cubiques lisses de \mathbb{P}^3 et plus généralement sur les surfaces de Del Pezzo (cf. [Wat]).

Enfin, pour $t=n=2$, la recherche des composantes irréductibles du schéma des courbes nodales du plan (cf. eg. [AC, Z]).

Disons maintenant quelques mots sur la méthode :

pour prouver l'égalité $\omega_t(m) = \omega'_t(m)$, on montre plus précisément l'existence de certains sous-schémas zéro-dimensionnels de rang maximum (cf. infra 2.1) de l'espace projectif \mathbb{P}^n . Le problème de l'existence de sous-schémas de rang maximum de l'espace projectif, qui prolonge naturellement l'étude des sous-schémas projectivement normaux (cf. eg. [PS], [E], [GP]) a d'abord été considéré dans le cas des courbes (cf. [H2], [EH]). Beaucoup de résultats obtenus jusqu'ici ([B1], [BE], [HH], [Hi1]) l'ont été par une méthode de spécialisation progressive introduite dans [HH1], [Hi1]. Cette méthode, que je propose d'appeler méthode d'Horace, s'est aussi montrée efficace pour la résolution d'autres problèmes de rang maximum (au sens de [Hi2]): voir [HH2,5] pour la construction de faisceaux à bonne cohomologie sur \mathbb{P}^3 , dont l'existence entraîne celle de nouvelles courbes de rang maximum, voir [B2], [Hi3] pour la recherche de systèmes de générateurs pour

HIRSCHOWITZ

l'idéal gradué de l'ensemble fini générique de \mathbb{P}_k^n .

On expose ci-dessous comment cette méthode d'Horace adaptée et enrichie, permet dans pas mal de cas, de calculer $\omega_t(m)$. Bien que dans le présent travail on ne calcule que $\omega_2(2,m)$ (§ 7.3), $\omega_3(2,m)$ (§ 8.3), $\omega_2(3,m)$ (§ 9.4) et $\omega_6(2,10)$ (§4.5, 5.3), il semble clair que la méthode permettra de traiter bien d'autres cas. On utilisera systématiquement le langage des schémas. De fait, on constate que les concepts de point non réduit et de point non fermé sont parfaitement adaptés au présent problème, dont pourtant la formulation ne relève que de l'algèbre élémentaire.

*

*Je remercie D.Bertrand, qui a éveillé mon intérêt
pour ces questions ainsi que
H.Hironaka, H.Esnault et E.Viehweg
pour des conversations stimulantes.*

*Ce travail a été exposé en juin 1984 au Séminaire
Problèmes Diophantiens de l'Université de Paris VI :*

*Je remercie vivement M.Waldschmidt pour m'avoir incité à
consacrer quelques semaines à ces questions.*

*

1. Traduction en géométrie projective

Le langage adapté à la méthode d'Horace qu'on veut décrire et illustrer est celui des schémas projectifs et des faisceaux cohérents. En effet la méthode repose sur le théorème de semi-continuité (cf. [H1] III.12.8) appliqué au schéma de Hilbert (cf. [G]).

1.1 Le nombre ω_t

Soit $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_k^n$ l'espace projectif complété de \mathbb{A}_k^n et soit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ le faisceau inversible de degré d sur \mathbb{P}^n . L'espace vectoriel des sections globales de ce faisceau s'identifie à l'espace vectoriel des polynômes (non nécessairement homogènes) de degré au plus d sur \mathbb{A}_k^n ([H1] III.5.1).

Associons maintenant à la partie finie S de \mathbb{A}_k^n le sous-schéma $Y := S^{(t)}$ de \mathbb{P}^n dont le faisceau d'idéaux I_Y est la puissance t -ième du faisceau d'idéaux de S . Comme k est de caractéristique nulle, $H^0(\mathbb{P}^n, I_Y(d))$ s'identifie à l'espace des polynômes de degré au plus d sur \mathbb{A}_k^n s'annulant sur S avec toutes leurs dérivées d'ordre au plus $t-1$. Le nombre $\omega_t(S)$ est donc aussi le plus petit entier d tel que $H^0(\mathbb{P}^n, I_Y(d))$ soit non nul. C'est cette définition de $\omega_t(S)$ que nous choisissons pour le cas d'un corps de caractéristique quelconque. Et de façon analogue, on note

$\omega_t(n, m) := \omega_t(k, n, m)$ le plus petit entier d tel qu'il existe une partie S à m éléments de \mathbb{P}_k^n pour laquelle $H^0(\mathbb{P}^n, I_Y(d))$ est non nul.

1.2 La majoration par ω'_t

Soit $\omega'(n, m)$ le plus petit entier d tel que $\binom{d+n}{n}$ majore strictement $m \binom{t+n-1}{n}$.

Proposition 1.2

- a) On a l'inégalité $\omega_t(n,m) \leq \omega'_t(n,m)$.
- b) Si k est infini et si pour une cloture algébrique \bar{k} de k , $\omega_t(k,n,m)$ égale $\omega'_t(n,m)$, alors $\omega_t(k,n,m) = \omega'_t(n,m)$.

Preuve : a) Soit S une partie à m éléments de \mathbb{P}^n et soit Y défini comme précédemment. On a la suite exacte du faisceau structural :

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0.$$

En tensorisant cette suite par le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, on obtient

$$0 \longrightarrow I_Y(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(d) \longrightarrow 0$$

d'où pour les sections :

$$0 \longrightarrow H^0(I_Y(d)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \xrightarrow{\phi_Y(d)} H^0(\mathcal{O}_Y(d))$$

ce qui signifie que $H^0(I_Y(d))$ est le noyau de $\phi_Y(d)$. Pour $d = \omega'_t(n,m)$, la dimension $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, soit $\binom{d+n}{n}$, majore strictement celle de $H^0(\mathcal{O}_Y(d))$ qui vaut $m \binom{t+n-1}{n}$. Par suite $H^0(I_Y(d))$ est non nul, ce qui prouve a).

b) Soit U l'ouvert de $(\mathbb{A}_k^n)^m$ des suites injectives. Notons encore S la partie tautologique de $U \times \mathbb{P}_k^n$, c'est un sous-schéma propre et étale sur U . Soit Y le sous-schéma dont l'idéal dans $U \times \mathbb{P}_k^n$ est la puissance t -ième de celui de S . C'est un U -schéma localement isotrivial, donc \mathcal{O}_Y et, par suite, I_Y sont U -plats. Le faisceau $I_Y(d)$ est donc aussi U -plat et on peut lui appliquer le théorème de semi-continuité. Soit F le fermé de U défini par l'inégalité

$$h^0(\mathbb{P}_x^n, I_{Y(x)}(d-1)) \geq 1$$

avec $d = \omega'_t(n, m)$.

L'hypothèse $\omega_t(\bar{k}, n, m) = \omega'_t(n, m)$ signifie que F est distinct de U tout entier. Comme k est infini, F ne peut contenir toute l'intersection de U avec $(\mathbb{A}_k^n)^m$. Il existe donc un point fermé x dans $(\mathbb{A}_k^n)^m$ tel que $h^0(\mathbb{P}_x^n, I_{Y(x)}(d-1))$ soit nul. A fortiori $h^0(\mathbb{P}_k^n, I_{Y(x)}(d-1))$ est nul, où on note encore abusivement $I_{Y(x)}$ la puissance t -ième de l'idéal de $S(x)$ dans \mathbb{P}_k^n . On a donc montré $\omega_t(k, n, m) \geq \omega'_t(n, m)$ et on conclut par a).

1.3 Le problème

On peut maintenant formuler le problème auquel on s'intéresse de la façon suivante :

- Pour quelles valeurs de n, m et t a-t-on $\omega_t(n, m) = \omega'_t(n, m)$?

1.4 Une conjecture

Dans le but de confronter le problème précédent au point de vue de [Ch], hasardons-nous à formuler la conjecture :

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $c(n)$ tel que pour tout $m \geq c(n)$ et pour tout t , $\omega_t(n, m)$ et $\omega'_t(n, m)$ soient égaux.

On vérifie facilement que, si k est non dénombrable, cette conjecture implique la conjecture 8 de [Ch 1]. En revanche l'implication réciproque n'est pas triviale et la conjecture précédente semble ouverte même pour $n=2$.

1.5 Le choix de k

Dans la mesure où on veut prouver une égalité $\omega_t = \omega'_t$,

la proposition 1.2 nous indique que pour traiter le cas d'un corps infini, il suffit de traiter celui de sa cloture algébrique. C'est pourquoi nous supposons dans la suite que k est un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

2. Sous-schémas rangés

2.1 Sous-schémas de rang maximum

Définition 2.1.1 : un sous-schéma Y de \mathbb{P}^n est dit de rang maximum si, pour chaque entier d , le morphisme de restriction $\varphi_Y(d)$ de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ vers $H^0(\mathcal{O}_Y(d))$ est soit injectif soit surjectif, autrement-dit de rang maximum.

Cette notion qui généralise celle de sous-variété projectivement normale a été d'abord introduite à propos des courbes ([H2],[EH]). Si Y est un sous-schéma de rang maximum et de dimension zéro, alors tous les nombres $h^0(\mathcal{O}_Y(d))$ sont égaux à la colongueur de Y . A partir de la colongueur, on peut donc calculer la postulation, c'est-à-dire la suite des nombres $h^0(I_Y(d))$. On connaît ainsi les degrés des hypersurfaces qui contiennent Y .

L'idéal d'un sous-schéma de rang maximum à la cohomologie "naturelle" (cp.[HH2]) au sens suivant :

Proposition 2.1.2

Pour qu'un sous-schéma Y de \mathbb{P}^n soit de rang maximum, il faut et il suffit que pour chaque entier $d \geq 0$, au moins un des deux groupes $H^0(I_Y(d))$ et $H^1(I_Y(d))$ soit nul.

Preuve : De la suite exacte

$$0 \longrightarrow I_Y(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(d) \longrightarrow 0$$

on prend la suite longue de cohomologie; en utilisant la nullité de $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, on obtient pour $d \geq 0$,

$$0 \rightarrow H^0(I_Y(d)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \xrightarrow{\phi_Y(d)} H^0(\mathcal{O}_Y(d)) \rightarrow H^1(I_Y(d)) \rightarrow 0$$

et l'énoncé en résulte clairement. ■

On peut raffiner la conjecture 1.4 en termes de sous-schémas de rang maximum :

Conjecture 2.1.3 : pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $c(n)$ tel que, pour tout $m \geq c(n)$ et pour tout t , il existe dans \mathbb{P}^n un ensemble S de cardinal m tel que $S^{(t)}$ soit de rang maximum.

Cette conjecture implique trivialement la conjecture 1.4, tandis que l'implication réciproque n'est pas évidente. On a formulé cette dernière conjecture d'une part parce qu'elle nous semble plus naturelle que 1.4 et d'autre part parce que notre façon d'aborder le problème 1.3 consiste à construire des sous-schémas de rang maximum, plus précisément des sous-schémas rangés.

2.2 Sous-schémas rangés

Définition 2.2.1 : on dira que le sous-schéma Y de \mathbb{P}^n est rangé de niveau d si le morphisme $\phi_Y(d)$ (cf. Prop. 1.2) est bijectif. Pour trouver des sous-schémas de rang maximum, on appliquera systématiquement la

Proposition 2.2.2

- a) Tout sous-schéma rangé de dimension zéro est de rang maximum.
- b) Pour qu'un sous-schéma Y de dimension zéro soit de rang maximum, il suffit qu'il s'emboîte entre deux sous-schémas rangés de niveaux consécutifs ($Y_{d-1} \subset Y \subset Y_d$).

Preuve : Remarquons d'abord que si Y contient un sous-schéma rangé Y' de niveau d' , alors $H^0(I_{Y'}(d'))$ est nul et, à fortiori, pour $d'' \leq d'$, $H^0(I_Y(d''))$ est nul. Supposons maintenant que Y est contenu dans un sous-schéma rangé Y_d de niveau d et montrons que pour $d' \geq d$, $H^1(I_{Y'}(d'))$ est nul. La restriction de $H^0(\mathcal{O}_{Y_d}(d))$ vers $H^0(\mathcal{O}_Y(d))$ est surjective puisque les schémas considérés sont de dimension zéro. Comme $\phi_{Y_d}(d)$ est surjectif, on conclut que $\phi_Y(d)$ est surjectif et donc $H^1(I_Y(d))$ est nul.

Raisonnons alors par récurrence sur $d'' \geq d$. Soit P un hyperplan ne rencontrant pas Y . La suite exacte de restriction à P s'écrit

$$0 \longrightarrow I_Y(d''-1) \longrightarrow I_Y(d'') \longrightarrow \mathcal{O}_P(d'') \longrightarrow 0$$

et on obtient en cohomologie la suite exacte

$$H^1(I_Y(d''-1)) \longrightarrow H^1(I_Y(d'')) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_P(d''))$$

qui permet de conclure que le dernier terme est nul (H1, III.5.1).

Ces considérations prouvent aussi bien la partie a) (en prenant $d'=d$) que la partie b) (en prenant $d'=d-1$) de l'énoncé. ■

2.3 Points rangés et de rang maximum du schéma de Hilbert

Un point fermé du schéma de Hilbert correspond à un sous-schéma. En ce sens il est susceptible d'être de rang maximum voire rangé. Il en va de même pour les points non fermés, qui sont les sous-variétés (irréductibles par convention) du schéma de Hilbert. Toutes les notions et tous les résultats des §2.1 et 2.2 s'étendent, avec pour seuls changements que \mathbb{P}^n

devient $\mathbb{P}_{k(x)}^n$ où $k(x)$ est le corps résiduel du point non fermé considéré tandis que Y devient la fibre Y_x du sous-schéma universel au point considéré (dans les preuves, les dimensions sont à prendre sur $k(x)$).

2.3.1 Le point $S_q^{(t)}$: Si q est un entier, on désigne par S_q ce qu'on appelle la réunion générique de q points dans \mathbb{P}^n c'est-à-dire la composante irréductible principale (celle qui contient les sous-schémas lisses) du schéma de Hilbert des sous-schémas de colongueur q (ou de polynôme de Hilbert q). On note $S^{(t)}$ le point défini par la puissance t -ième de l'idéal tautologique dans $\mathbb{P}_{k(S_q)}$ où $k(S_q)$ est le corps résiduel du point S_q . On peut maintenant donner la «bonne» formulation de la conjecture 2.1.3.

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $c(n)$ tel que, pour tout $m \geq c(n)$ et pour tout t , $S_m^{(t)}$ est de rang maximum.

D'ailleurs c'est bien ce langage des points génériques qu'on trouve déjà dans [N2].

Le fait que les deux conjectures sont équivalentes est une conséquence immédiate du résultat suivant.

2.3.2 Ouverture du rangement :

Proposition : L'ensemble des points rangés de niveau d et l'ensemble des points de rang maximum sont des ouverts du schéma de Hilbert.

Preuve : L'ensemble des points rangés de niveau d est caractérisé par la double égalité :

$H^0(I_Y(d)) = H^1(I_Y(d)) = 0$. D'après le théorème de semi-continuité, c'est un ouvert.

HIRSCHOWITZ

Soit maintenant x un point de rang maximum, P le polynôme de Hilbert et H^P la composante du schéma de Hilbert correspondants, et soit I l'idéal tautologique sur $\mathbb{P}_{H^P}^n$. D'après le théorème de Serre (H1 III,5.2) pour $d \geq d_0$, le groupe $H^1(\mathbb{P}_{k(y)}^n, I_y(d))$ est nul en tout point y de H^P .

Soit d_1 le plus grand entier tel que $H^0(I_x(d_1))$ soit nul. Alors l'ouvert de H^P défini par

$$H^0(I_y(d_1)) = H^1(I_y(d_1+1)) = \dots = H^1(I_y(d_0-1)) = 0$$

contient x et ne comporte que des points de rang maximum.

3. Candidats au rangement

Pour de simples raisons de colongueur il est en général impossible d'emboîter $S_q^{(t)}$ (vu ici comme sous-schéma de $\mathbb{P}_{k(S_q^{(t)})}^n$) entre deux sous-schémas de rang maximum et de q même nature, c'est-à-dire obtenus par spécialisation et changement de base à partir de $S_{q'}^{(t')}$ et $S_{q''}^{(t'')}$. Si on veut appliquer 2.2.2, il faut considérer des sous-schémas plus généraux que ceux qu'on a envisagés jusqu'ici. Pour les introduire, il nous faut passer par quelques généralités.

3.1 Les opérations sur le schéma de Hilbert

Soient x et y deux points du schéma de Hilbert de corps résiduels $k(x)$ et $k(y)$. Si on pose

$$T = \text{Spec } k(x) \times \text{Spec } k(y) = \text{Spec}(k(x) \# k(y)),$$

on dispose sur \mathbb{P}_T^n de deux sous-schémas tautologiques. Soit R leur réunion, définie par l'intersection des idéaux et J leur intersection, définie par la somme des idéaux. Comme T est le Spec d'un corps, R et J sont T -plats et définissent deux nouveaux points du

schéma de Hilbert qu'on note $x \cup y$ et $x \cap y$. Ce sont la réunion et l'intersection de x et y . Chacune de ces deux opérations est commutative et associative mais aucune des deux n'est ni algébrique, ni distributive par rapport à l'autre (considérer trois droites concourantes dans \mathbb{P}^2).

Avec ces opérations, on peut désigner facilement de nouveaux points du schéma de Hilbert. Par exemple soit $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction à support fini. On lui associe le point

$$S_a := S_{a(1)}^{(1)} \cup S_{a(2)}^{(2)} \cup \dots \cup S_{a(t)}^{(t)} \cup \dots$$

Il se trouve que, toujours pour des questions de degré, ces points sont encore insuffisants pour l'application de 2.2.2 qu'on a en vue. Il faut donc considérer des sous-schémas ponctuels plus généraux que ceux définis par les puissances d'un idéal maximal.

3.2 Escaliers et points associés

On va considérer ceux qui sont essentiellement les plus simples des sous-schémas ponctuels, à savoir les sous-schémas monômiaux.

Définition 3.2.1 (cf. [BG]): un escalier (de dimension n) est une partie de \mathbb{N}^n dont le complémentaire C vérifie l'inclusion $C + \mathbb{N}^n \subset C$; nous imposons en outre que cette partie soit finie (ce n'est pas l'usage).

Définition 3.2.2: soit e un escalier. Le e -point modèle M^e est le sous-schéma de \mathbb{A}_k^n dont l'idéal est engendré par les monômes d'exposant hors de e .

On appellera colongueur d'un escalier e la colongueur du

e-point modèle. C'est bien sûr le cardinal de e . On le notera $|e|$.

Exemple 3.2.3 : disons qu'un escalier e est régulier s'il est défini par une inégalité $x_1 + \dots + x_n < t$. Les escaliers réguliers forment une suite croissante. Les e-points modèles correspondants sont les voisinages infinitésimaux de l'origine dans \mathbf{A}_k^n . On notera (t) l'escalier défini par $x_1 + \dots + x_n < t$.

Exemple 3.2.4 : on notera $\epsilon := \epsilon_n$ l'escalier de \mathbf{N}^n défini par l'inéquation $2x_1 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \leq 2$. C'est un escalier de colongueur $n+2$.

Exemple 3.2.5 : dans \mathbf{N}^2 , un escalier e est repéré par une suite finie $[e_0, \dots, e_{\ell-1}]$ de la façon suivante : ℓ est le plus petit entier tel que $(\ell, 0)$ soit hors de e et pour $i < \ell$, e_i est le plus petit entier tel que (i, e_i) soit hors de e . La suite e_i est non-croissante et on a l'égalité $|e| = e_0 + \dots + e_{\ell-1}$.

3.2.6 Le e-point générique

On sait [G] que les morphismes du schéma projectif M^e dans \mathbf{P}^n s'organisent en un schéma R^e dans lequel les plongements constituent un ouvert, soit Q^e .

Proposition : Q^e est irréductible.

Preuve : Il suffit de voir que le schéma des plongements de M^e dans \mathbf{A}^n est irréductible. Or celui-là est un ouvert dans $\mathbf{V}(\text{Hom}(H^0(\mathcal{O}_{M^e}), k^n))$. ■

Au-dessus de Q^e , on dispose donc du plongement tautologique de M^e dans $\mathbf{P}_{Q^e}^n$. L'image de ce plongement reste

évidemment Q^e -plate et définit donc un morphisme naturel τ de Q^e dans le schéma de Hilbert. On appellera e-point générique l'image par τ du point générique de Q^e . On notera P^e le e-point générique.

Remarquons que si e' se déduit de e par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur \mathbb{N}^n , alors P^e et $P^{e'}$ sont égaux.

3.2.7 Autres e-points

Plus généralement on appellera e-point tout point de l'image de Q^e dans le schéma de Hilbert.

Exemple : soit D un diviseur irréductible de \mathbb{P}^n . Alors les plongements de M^e dans \mathbb{P}^n à support dans D constituent un sous-schéma irréductible Q_D^e de Q^e . En fait Q^e est un fibré localement trivial de base \mathbb{P}^n et dont la fibre est un ouvert d'un espace affine; et Q_D^e est la restriction à D de ce fibré. On dira que l'image dans le schéma de Hilbert du point générique de Q_D^e est le e-point extraverti générique sur D . On le notera P_D^e .

3.3 Les candidats

On dispose maintenant d'une panoplie de sous-schémas ponctuels qui nous permet de réduire la conjecture 2.3.1 à une conjecture concernant des sous-schémas rangés. Il nous faut encore la

Définition 3.3.1 : nous dirons que l'escalier e est convenable s'il est emboîté entre deux escaliers réguliers consécutifs (ou de façon équivalente) si le e-point modèle est emboîté entre deux voisinages infinitésimaux consécutifs.

Conjecture 3.3.2 : pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $d(n)$ tel que pour tout $d \geq d(n)$ et pour tout t , si q et r désignent le quotient et le reste de la division de $\binom{d+n}{n}$ par $\binom{t+n-1}{n}$, alors il existe un escalier convenable e de colongueur r tel que $P^e \cup S_q^{(t)}$ soit rangé de niveau d .

Cette conjecture implique la conjecture 2.3.1 grâce à 2.2.2. En fait pour démontrer des petits bouts de cette conjecture, on devra considérer des configurations de e -points plus compliquées.

4. La méthode d'Horace

Elle repose d'une part sur le théorème de semi-continuité et d'autre part sur la suite exacte résiduelle ci-dessous. Il est d'ailleurs bien étonnant que nous n'ayons pas dégagé cette suite exacte plus tôt.

4.1 La suite exacte résiduelle

Soit X une variété quasi-projective (dans la suite $X = \mathbb{P}^n$). Soit K une extension du corps de base k et soit D un diviseur de Cartier sur X_K . Il lui correspond deux suites exactes de restriction :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_K}(-D) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}_{X_K} & \xrightarrow{P} & \mathcal{O}_D \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_K} & \xrightarrow{i(D)} & \mathcal{O}_{X_K}(D) & \xrightarrow{P(D)} & \mathcal{O}_D(D) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Soit Y un sous-schéma de X_K d'idéal I_Y . L'image $p(I_Y)$ de I_Y dans \mathcal{O}_D est l'idéal d'un sous-schéma Y'' de D , qu'on appelle la trace de Y sur D . On vérifie facilement que Y'' est l'intersection de Y et D . Par ailleurs le noyau du morphisme obtenu en composant $i(D)$ avec la

restriction de $\mathcal{O}_{X_K}(D)$ vers $\mathcal{O}_Y(D)$ est l'idéal d'un sous-schéma Y' de X_K qu'on appelle (schéma) résiduel de Y par rapport à D . Par construction, on a la suite exacte des faisceaux sur X_K qu'on appellera suite exacte résiduelle :

$$(4.1.1) \quad 0 \longrightarrow I_{Y'}(-D) \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_{Y'',D} \longrightarrow 0$$

où $I_{Y'',D}$ désigne le faisceau d'idéaux de Y'' dans D .

Signalons que si Y est de dimension zéro, alors Y' et Y'' le sont aussi et qu'on a l'égalité

$$(4.1.2) \quad \text{colongueur}_K Y = \text{colongueur}_K Y' + \text{colongueur}_K Y''.$$

4.2 Le lemme d'Horace

Soit L un faisceau inversible sur X (dans la suite, c'est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$). Soit Z un point du schéma de Hilbert H de X . Soit Δ un système linéaire sur X de point générique δ . Soit T une spécialisation du point (Z, δ) de $H \times \Delta$, de corps résiduel K . On note D_T le diviseur tautologique de X_T et Y_T l'autre sous-schéma tautologique de X_T . Comme en (4.1), on note Y''_T la trace de Y_T sur D_T et Y'_T son résiduel. Ce résiduel est un T -point de H , dont on note \bar{Y}'_T l'image dans H .

Pour que $H^0(X_Z, I_Z \otimes L)$ soit nul, il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

(condition en basse dimension, ou dôme) :

$$H^0(D_T, I_{Y''_T, D_T} \otimes L) = 0;$$

(condition en bas degré, ou dègue) : $H^0(X_{\bar{Y}'_T}, I_{\bar{Y}'_T} \otimes L(-\Delta)) = 0$.

Preuve : Par changement de base, la dègue implique l'égalité $H^0(X_T, I_{Y_T} \otimes L(-\Delta)) = 0$. La suite exacte résiduel-

le de Y_T par rapport à D_T donne la suite exacte de la cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(X_T, I_{Y_T} \otimes L(-\Delta)) \rightarrow H^0(X_T, I_{Y_T} \otimes L) \rightarrow H^0(D_T, I_{Y_T} \otimes L).$$

Les termes extrêmes étant nuls, $H^0(X_T, I_{Y_T} \otimes L)$ est nul, et par généralisation $H^0(X_Z, I_Z \otimes L)$ l'est aussi. ■

4.3 Mode d'emploi. Le point Z est donné.

On commence par choisir le diviseur D . On convient de dire qu'on exploite D pour dire qu'on applique le lemme d'Horace avec D pour diviseur. Choisir D , c'est choisir le système Δ et l'image de T dans Δ . Ensuite on choisit T . Pour ce faire, on choisit une extension K de $k(D)$ et un point de H à valeur dans K . En pratique on décrira géométriquement T comme réunion de points génériques assujettis à certaines conditions. Une fois T choisi, on vérifie la dîme et la dègue. Ce sont des énoncés de même nature que l'énoncé initial, qu'on peut donc aussi prouver en invoquant le lemme d'Horace.

4.4 Calculs de résiduels

Avant de voir comment la méthode s'applique, il va falloir calculer les schémas résiduels. On va traiter ici les cas dont on aura besoin plus loin. D'abord on remarque que le résiduel d'une réunion disjointe est la réunion (disjointe) des résiduels (bien sûr, on entend que deux points du schéma de Hilbert sont disjoints si leur intersection est vide).

Exemple 4.4.1 : Soit e un escalier. On introduit sa trace e'' sur \mathbb{N}^{n-1} par $e'' = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in e\}$, et son résiduel e' par $e' = \{(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, 1+x_n) \in e\}$. Alors on vérifie que la trace du

e-point modèle M^e sur \mathbb{A}^{n-1} est $M^{e''}$ et que son résiduel est $M^{e'}$. Ce résultat ne concerne que le diviseur très particulier \mathbb{A}^{n-1} . Pour l'étendre introduisons la

Définition 4.4.2 : soit P un e-point et D un diviseur rencontrant D . On dira que D est un diviseur directeur pour P si, au voisinage étale de P , le couple (P, D) se déduit du couple (M^e, \mathbb{A}^{n-1}) par changement de base. Soit $Q^e(D)$ le sous-schéma de Q_D^e des morphismes dont l'image admet D pour diviseur directeur. Si D est irréductible, on voit en fibrant $Q^e(D)$ sur D -Sing D que $Q^e(D)$ l'est aussi et on note $P^e(D)$ l'image de son point générique dans le schéma de Hilbert. On dira que e est extraverti si $P_D^e = P^e(D)$.

Exemples 4.4.3 : les escaliers réguliers sont extravertis: en effet si e est régulier, un e-point est défini par des monômes dans tout système de coordonnées. On en déduit que si D est un diviseur réduit, le résiduel de $P^e(D)$ est $P^{e'}(D)$ et sa trace est le e'' -point générique dans D .

On a la caractérisation suivante des escaliers extravertis:

Proposition 4.4.4 : Pour qu'un escalier e soit extraverti, il suffit qu'il ait la propriété suivante :

si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est dans e avec $\alpha_i > 0$ alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n + 1)$ est dans e .

Preuve : Localement dans la topologie étale de \mathbb{A}^n , un diviseur générique passant par 0 a une équation

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$$

où les a_i sont des unités à valeurs dans l'hensélisé de l'anneau local.

On va montrer que le changement de base

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \sum a_i x_i)$$

conserve M^e .

Pour cela, on pose $x' = x_n - \sum a_i x_i$ et il nous suffit de montrer que pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ hors de e , $x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$ est dans l'idéal de M^e , ce qui, en développant $x_n^{\alpha_n}$, résulte de l'hypothèse. ■

Exemples 4.4.5 : a) L'escalier e (cf. 3.2.4) est extraverti. b) Un escalier $[e_0, \dots, e_{\ell-1}]$ de \mathbb{N}^2 (cf. 3.2.5) est extraverti si la suite e_i est strictement décroissante.

4.4.6 Le cas des courbes nodales

Soit D une courbe nodale dans une surface, N un noeud de D , δ la direction tangente à l'une des branches. Il existe dans l'hensélisé de l'anneau local un système de paramètres (x, y) tel que $xy=0$ soit une équation de D et que $x=0$ soit tangente à δ . Soit alors e un escalier de \mathbb{N}^2 . L'image inverse de M^e par (x, y) ne dépend pas du système choisi (parce qu'un autre système s'écrit (x', y') avec $x'=ax$, $y'=by$ où a et b sont des unités). On note $P_{DN\delta}^e$ cette image inverse. La trace de $P_{DN\delta}^e$ sur D est la réunion des traces sur les deux branches (qu'on calcule comme en 4.4.1) et le résiduel est $P_{DN\delta}^{e'}$ avec

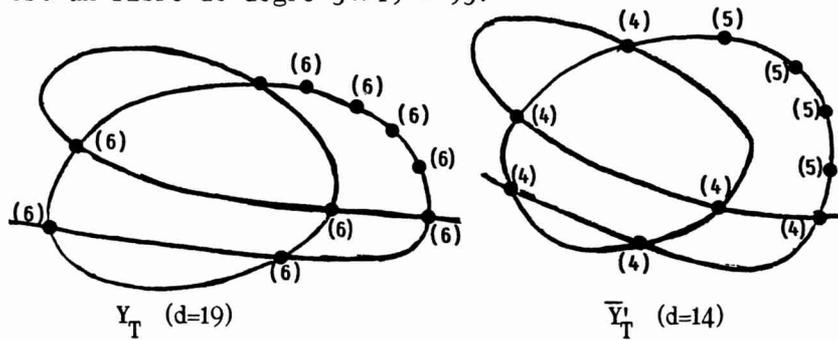
$$e' = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in e \mid (\alpha_1+1, \alpha_2+1) \in e\}.$$

4.5 Un exemple

L'énoncé suivant répond à une question soulevée par J. Dixmier :

Proposition : $\omega_6(2, 10) = \omega_6'(2, 10) = 20$.

Preuve : Soit donc Z la réunion générique de dix 654321-points, autrement-dit, $Z=S_{10}^{(6)}$. On prend pour Δ le système complet de degré cinq et on exploite la quintique rationnelle générique D . On prend $T=P_0^{(6)} \cup \dots \cup P_9^{(6)}$ où P_0, \dots, P_5 sont les six points doubles de D et P_6, \dots, P_9 sont des copies du point générique de D . La dime se vérifie sur la normalisée \hat{D} de D , où l'image réciproque de la trace est un diviseur de degré $4 \times 6 + 6 \times 2 \times 6 = 96$, alors que l'image inverse de $\mathcal{O}_{\hat{D}}(19)$ est un fibré de degré $5 \times 19 = 95$.



La dègue dit que $H^0(I_{\bar{Y}'_T}(14))$ est nul avec

$$\bar{Y}'_T = P_0^{(4)} \cup \dots \cup P_5^{(4)} \cup P_6^{(5)} \cup \dots \cup P_9^{(5)}.$$

Pour la démontrer, on va exploiter la cubique rationnelle générique C . Donc Δ_1 est un système de degré trois. On prend

$$T_1 = P_0^{(4)} \cup \dots \cup P_5^{(4)} \cup P_6^{(5)} \cup \dots \cup P_9^{(5)}$$

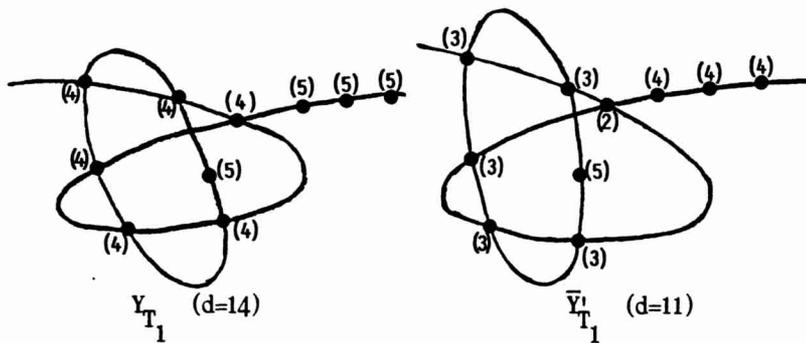
où P_0 est le point singulier de C , $P_1, \dots, P_5, P_6, P_7, P_8$ sont des copies du point générique de C , et P_9 est le point générique de la conique C' circonscrite à $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$. Il faut vérifier le

Lemme : T_1 est spécialisation de \bar{Y}'_T .

Preuve : Il suffit de montrer que la réunion $C \cup C'$ de la

cubique rationnelle générique et de la conique (générique) passant par P_1, \dots, P_5 se généralise en courbe irréductible ayant six noeuds en P_0, \dots, P_5 . Comme l'espace des quintiques ayant une singularité en P_0, \dots, P_5 est un projectif de dimension au moins deux, il suffit de voir qu'une telle courbe irréductible existe. Il suffit par conséquent de prouver que le schéma des quintiques réductibles et singulières en P_0, \dots, P_5 est de dimension au plus un. Or une telle courbe est réunion d'une conique passant par cinq des six points avec une cubique passant par les six points et singulière au sixième. Comme il n'y a que six coniques possibles, il nous suffit par exemple de montrer que le schéma des cubiques singulières en P_0 et passant par P_1, \dots, P_5 est de dimension un. Ceci se démontre par exemple en spécialisant P_1, P_2, P_3, P_4 de façon que P_0, P_1, P_2 et P_0, P_3, P_4 soient alignés. ■

Il reste à vérifier la dime et la dègue. La dime se vérifie comme précédemment en considérant la normalisée de C . Reste donc à prouver la dègue.

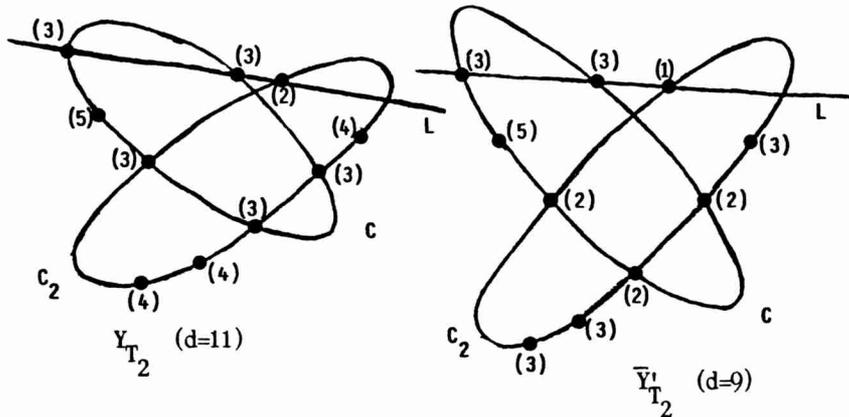


Cette fois on exploite une deuxième conique générique C_2 . On prend donc pour Δ_2 le système complet de degré

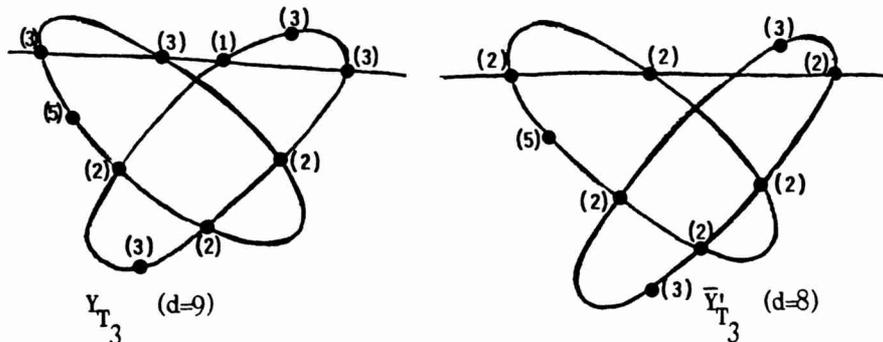
deux. On prend

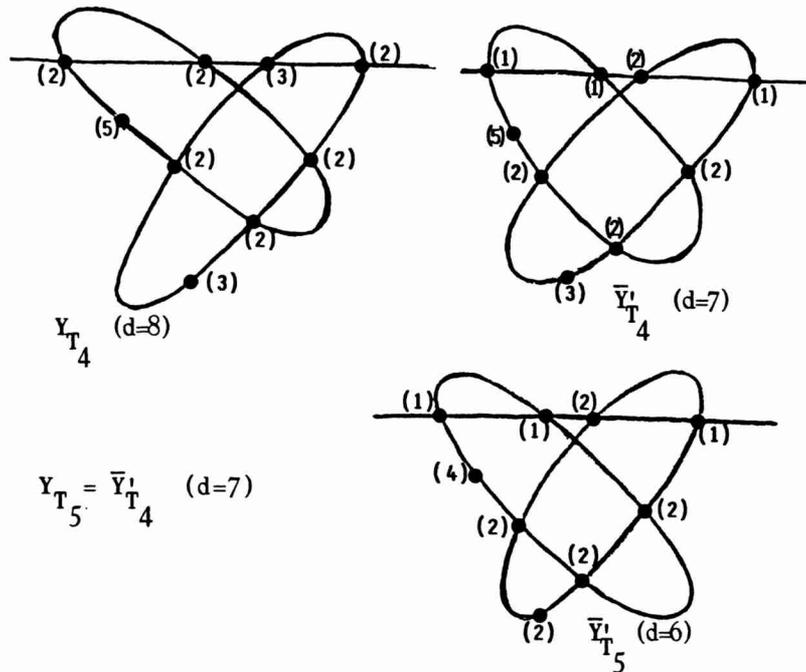
$$P_2 = P_0^{(2)} \cup P_1^{(3)} \cup \dots \cup P_5^{(3)} \cup P_6^{(4)} \cup P_7^{(4)} \cup P_8^{(4)} \cup P_9^{(5)}$$

où $P_0, P_1, P_2, P_3, P_6, P_7, P_8$ sont des copies du point générique de C_2 , P_4 est le point générique du plan, P_5 est le point générique de la droite $L := P_0 P_4$ et P_9 est le point générique de la conique C circonscrite à $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$. On vérifie que T_2 ainsi défini est spécialisation de \bar{Y}'_{T_1} : cela résulte du fait que $L \cup C_2$ se généralise en la cubique à point double en P_0 générique.



La dime est claire. Pour montrer la dègue, on exploite deux fois L en spécialisant d'abord P_6 dans L puis P_7 en P_0 . Après quoi on exploite la droite $P_8 P_9$. Les dessins correspondants sont les suivants :

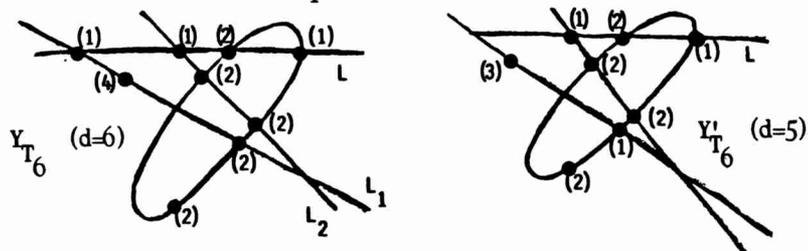




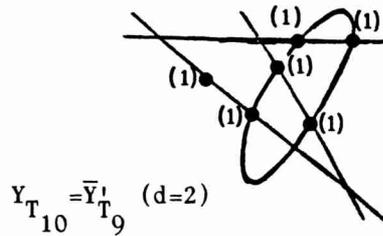
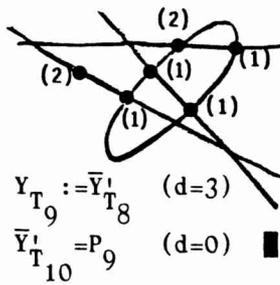
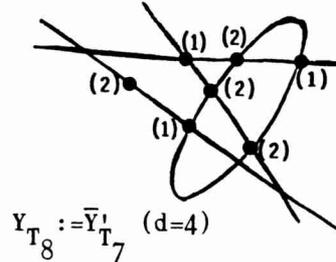
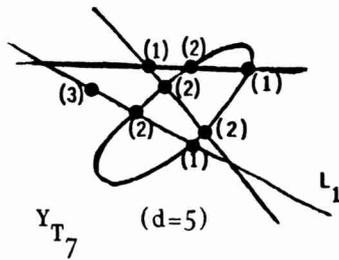
Maintenant on exploite une deuxième droite générique L_1 , en spécialisant C en réunion $L_1 \cup L_2$ de deux droites génériques. Donc Δ_6 est de degré un et on prend

$$T_6 = P_0^{(2)} \cup P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3^{(2)} \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_8^{(2)} \cup P_9^{(4)}$$

où P_0, P_6, P_8 sont des copies du point générique de C_2 , L est la droite $P_0 P_6$, P_4 est $L \cap L_2$, P_5 est $L \cap L_1$, P_1 et P_2 sont les points d'intersection de C_2 avec L_2 , P_3 est un point d'intersection de C_2 avec L_1 , et P_9 est le point générique de L_1 .



La dîme est claire et pour montrer la dègue, on exploite L_1 en y spécialisant P_8 , puis on exploite L_2 , puis la droite $P_0 P_9$ et enfin la conique C_2 . Les figures correspondantes sont les suivantes :



4.6 Rôle des accessoires

Pour l'aide à la conception de preuves générales d'existence de schémas rangés, la méthode d'Horace est fournie avec divers accessoires. La principale difficulté réside dans l'ajustage : ajuster une fois D choisi, c'est trouver T tel que Y_T^n ait la bonne colon-gueur. Ainsi dans l'exemple 4.5, on a travaillé avec une quintique parce qu'on n'aurait pas su ajuster sur une courbe de plus bas degré. On exposera deux techniques d'ajustage: la collision et l'introversion (cf.infra §5). La deuxième difficulté réside dans l'amorçage : dans \mathbb{P}^2 , on espère toujours trouver un diviseur sur

lequel on sache ajuster, et on ne s'inquiète pas de la dîme, parce qu'on connaît bien la théorie des diviseurs sur les courbes. Dans \mathbb{P}^n $n \geq 3$, en revanche, on a peur des diviseurs de degré autres que un, ou à la rigueur deux, sur lesquels on ne sait pas grand chose. On dispose alors d'une technique d'amorçage, qui permet de travailler avec un hyperplan même si on ne sait pas ajuster (cf. infra §6).

5. Techniques d'ajustage

Le principal accessoire de la méthode d'Horace est la technique de collision, déjà utilisée avec des courbes en [HH 1] et [Hi 1]. Elle consiste à spécialiser une réunion disjointe de deux sous-schémas en un schéma connexe. On va donc exposer quels nouveaux sous-schémas on obtient dans les cas qui nous intéressent : ce sont les e-points introduits précédemment. C'est par collision entre des e-points de type régulier qu'on fait apparaître des e-points de type irrégulier et c'est pour cette raison qu'on a considéré des escaliers généraux. La collision des e-points est décrite en (5.1). On montre ensuite comment les collisions permettent d'ajuster par expulsion (5.2) et par absorption aux noeuds (5.3). Les e-points de type irrégulier sont anisotropes en ce sens que la colongueur de leur trace sur les diviseurs lisses (passant par leur support) n'est pas constante. Ceci offre une nouvelle possibilité d'ajustage, c'est l'introversion (5.4).

5.1 Collisions de e-points

5.1.1 Somme de deux escaliers. Ici, on fait jouer un

rôle particulier à la dernière variable : on peut décrire tout escalier e par l'unique fonction $\hat{e}: \mathbb{N}^{n-1} \rightarrow \mathbb{N}$ dont il est l'"hypographe" :

$$e = \{(x, y) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N} \mid y < \hat{e}(x)\}.$$

Inversement, pour qu'une fonction $g: \mathbb{N}^{n-1} \rightarrow \mathbb{N}$ à support fini provienne d'un escalier (i.e. ait un escalier pour hypographe) il suffit qu'elle soit décroissante (i.e. $\forall x \forall x' \quad g(x+x') \leq g(x)$).

On définit la somme $e_1 + e_2$ de deux escaliers par la formule $\widehat{e_1 + e_2} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2$ qui définit bien un escalier parce que la somme de deux fonctions décroissantes à support fini est encore décroissante à support fini.

5.1.2 Proposition : Soient e' et e'' deux escaliers de somme e . Alors :

- a) P^e est spécialisation de $P^{e'} \cup P^{e''}$.
- b) Si D est un diviseur irréductible (i.e. un point du schéma des diviseurs) alors P_D^e est spécialisation de $P_D^{e'} \cup P_D^{e''}$, et $P^e(D)$ est spécialisation de $P^{e'}(D) \cup P^{e''}$.

Preuve : Pour a dans \mathbb{A}^1 , notons t_a la translation de \mathbb{A}^n définie par $t_a(x', x_n) = (x', x_n + a)$. Il suffit de prouver que M^e est spécialisation de $M^{e'} \cup t_a(M^{e''})$. Cette dernière réunion est plate sur $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ et, le schéma de Hilbert étant propre, se prolonge en une famille plate $U \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$.

On va voir que $U(0)$ est M^e . C'est un sous-schéma de colongueur égale à la somme des colongueurs de e' et e'' , donc à la colongueur de e . Il nous suffit donc de prouver que M^e contient $U(0)$. Soit $x'^\alpha x_n^\beta$ un monôme s'annulant sur M^e . On a $\beta \geq \hat{e}(\alpha) = \hat{e}'(\alpha) + \hat{e}''(\alpha)$. On peut donc écrire $\beta = \beta' + \beta''$ avec $\beta' \geq \hat{e}'(\alpha)$ $\beta'' \geq \hat{e}''(\alpha)$. Le polynôme $x'^\alpha x_n^{\beta'} (x_n - a)^{\beta''}$ s'annule donc sur $U(a)$ pour a non nul. Par semi-continuité, il s'annule aussi sur $U(a)$

pour a nul. on voit donc que tout monôme s s'annulant sur M^e s'annule sur $U(0)$. ■

5.2 Expulsion par collision

Supposons par exemple que le support e'' de \hat{e}'' soit plus grand que celui e'_0 de \hat{e}' . La trace sur D de $P_D^{e'} \cup P_D^{e''}$ est un e'_0 -point dans D , tandis que la trace de $P_D^{e''}$ est un e''_0 -point, comme celle de $P_D^{e''}$. Donc en spécialisant $P_D^{e'} \cup P_D^{e''}$ en $P_D^{e''}$, la trace de $P_D^{e'}$ est remplacée par celle de $P_D^{e''}$. En ce sens le e' -point est "expulsé", au profit du e'' -point. Voyons sur un exemple comment ce mécanisme permet d'ajuster.

Proposition 5.2 : Dans \mathbb{P}^2 , $S_{15}^{(2)}$ est rangée de niveau 8.

Preuve : On exploite d'abord la cubique générique D , en prenant

$$T = P_0^{(2)} \cup \dots \cup P_{14}^{(2)}$$

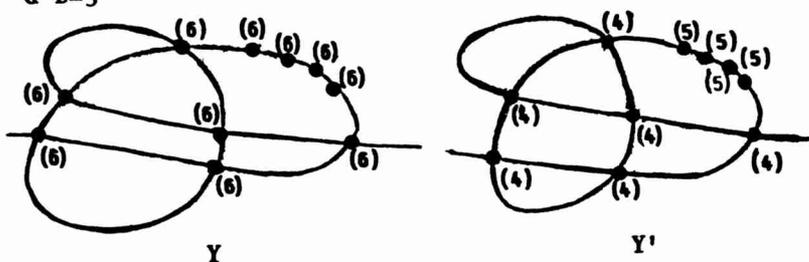
avec P_0, P_1, P_2 génériques et P_3, \dots, P_{14} génériques dans D . La dîme est vérifiée parce que $\mathcal{O}_D(2P_3 + \dots + 2P_{14})$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{O}_D(8)$. Pour démontrer la dègue, on calcule $\bar{Y}'_T = P_0^{(2)} \cup P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3 \cup \dots \cup P_{14}$ avec P_0, P_1, P_2 génériques et P_3, \dots, P_{14} génériques dans D . On voudrait spécialiser sur D un ou deux parmi les points P_0, P_1, P_2 . Mais on constate que un, c'est pas assez, et deux, c'est trop. On spécialise alors P_1 dans D et $P_0^{(2)} \cup P_{14}$ en P_D^{31} en vertu de 5.1.2 b) avec $e'=1$ et $e''=21$. On peut ainsi exploiter D : la dîme est vérifiée comme précédemment. Pour la dègue, il faut montrer que $P_2^{(2)} \cup P_1 \cup P_D^{11}$ est rangé de niveau deux. On s'en convainc en exploitant successivement les droites $P_1 P_2$ et $P_2 P_D^{11}$. ■

5.3 Absorption par collision aux noeuds

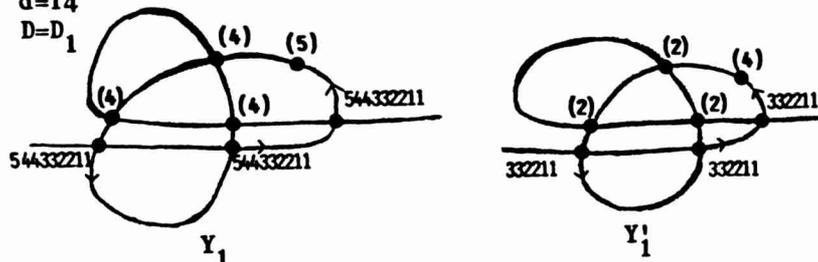
On va montrer comment des collisions aux noeuds

permettent d'augmenter la colongueur de la trace. On donne pour modèle une deuxième démonstration de l'égalité $w_6(10) = 20$ (cf.4.5). On se contente d'accompagner les dessins de quelques commentaires, la méthode consistant toujours à appliquer plusieurs fois le lemme d'Horace. On commence comme dans la première démonstration :

$d=19$
 $d \circ D=5$

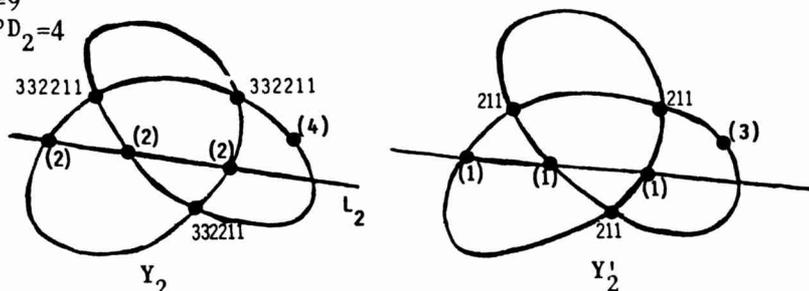


$d=14$
 $D=D_1$



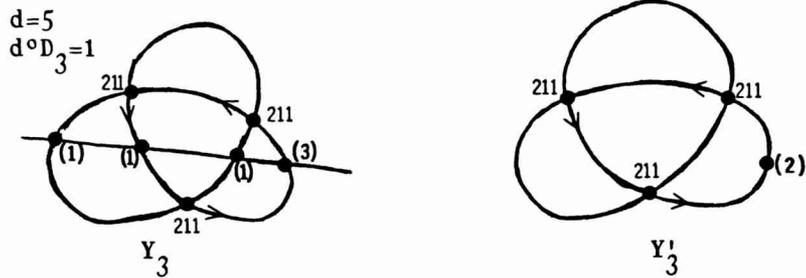
Les flèches indiquent la courbe, ou plutôt la branche de courbe directrice.

$d=9$
 $d \circ D_2=4$



Ici on aura dû démontrer que $D_2 \cup L_2$ se déforme en

quintique rationnelle irréductible de façon qu'on puisse déformer simultanément les six noeuds choisis. Pour cela on prouve que la variété des quintiques ayant six points singuliers donnés parmi lesquels trois alignés et les autre généraux est de dimension exactement deux (coïncidence troublante: c'est un énoncé de postulation du type de ceux qu'on rencontre dans les récurrences de la méthode d'Horace). Cette variété est la variété des quartiques ayant trois points doubles imposés et trois points simples alignés imposés. Sa dimension se calcule en spécialisant l'un des points doubles sur la droite.



Enfin $d=4$, D_4 est la quartique, Y_4 est Y'_3 et Y'_4 est un point.

Cette démonstration est donc plus courte que la première, mais je ne sais pas encore laquelle se généralisera le mieux (sans doute un mélange des deux).

5.4 Introversion

On a vu que les collisions engendrent des schémas ponctuels anisotropes. C'est cette anisotropie qu'on veut maintenant mettre au profit de l'ajustage.

Définitions : on dira que l'escalier e est introverti s'il n'est pas extraverti et s'il existe une permutation σ telle que $\sigma(e)$ soit extraverti. Dans ce cas, pour

tout diviseur réduit D , on appellera introversion la spécialisation de P_D^e en $P^e(D)$ et plus généralement la spécialisation d'une réunion disjointe $P_D^e \cup R$ en $P^e(D) \cup R$.

On utilisera systématiquement l'introversion aux paragraphes 7,8 et 9.

6. Techniques d'amorçage

Pour montrer qu'un point Z est rangé, lorsqu'on ne sait pas ajuster sur le diviseur D , on dispose de la technique d'amorçage pour se réduire à l'étude d'un autre point du schéma de Hilbert. On expose ci-dessous deux lemmes d'amorçage. Le premier, qui n'est pourtant qu'une remarque triviale, aurait déjà suffi pour démontrer le théorème 9.1. Le second lemme est de formulation plus délicate, mais contribue à une preuve plus simple du théorème 9.1.

6.1 Version de base

6.1.1 Premier lemme d'amorçage. Soit Z un point d'un schéma de Hilbert H de X . Soit Γ une sous-variété du schéma de Hilbert de X , de point générique γ (on dira que γ est le sous-schéma d'amorçage; dans la suite ce sera une courbe, la courbe d'amorçage). Soit T une spécialisation du point (Z, δ) de $H \times \Gamma$. On note Y_T et C_T les deux sous-schémas tautologiques de X_T , Y_T''' leur intersection et \hat{Y}_T leur réunion.

Pour que $H^0(X_Z, I_Z \otimes L)$ soit nul, il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :

(condition d'amorçage ou amorce) $H^0(H_T, I_{Y_T'''} \otimes C_T \otimes L) = 0$.

(condition transformée) $H^0(X_T, I_{\hat{Y}_T} \otimes L) = 0$.

Preuve : évidente.

6.1.2 Mode d'emploi. Pour le cas où Z est de dimension zéro, on prendra pour δ une courbe de façon qu'on puisse d'une part "ajuster" la colongueur de Y''' et d'autre part qu'on puisse appliquer le lemme d'Horace à \hat{Y}_T . Le résiduel contiendra une courbe dont on aura hâte de s'affranchir en la spécialisant dans un diviseur d'exploitation.

6.1.3 Exemple. Montrons que dans \mathbb{P}^3 , $S_5^{(2)}$ est rangé. Il s'agit de montrer que si P_1, \dots, P_5 sont des copies du point générique de \mathbb{P}^3 , $P_1^{(2)} \cup \dots \cup P_5^{(2)}$ est rangé de niveau trois. On prend pour courbe d'amorçage la réunion des quatre droites $P_1 P_2$, $P_3 P_4$, $P_4 P_5$ et $P_5 P_3$ (on pourrait ne prendre que $P_1 P_2$). L'amorce est clairement vérifiée. Pour vérifier la transformée, on exploite le plan D qui contient $P_1 P_2 P_3$. La dîme est vérifiée grâce au point d'intersection de $P_1 P_2$ avec D et la dègue dit que la réunion de $P_1 P_2$ avec $P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$ n'est pas sur une quadrique, ce qui est clair.

6.2 Version de luxe

6.2.1 Notations. Soit Γ un schéma de Hilbert de courbes de S . Pour tout Γ -schéma S , on note C_S le sous-schéma tautologique de X_S . Soit Δ un schéma de Hilbert de diviseurs de Cartier linéairement équivalents de X . Pour tout Δ -schéma S , on note D_S le diviseur tautologique de X_S . Soit H un troisième schéma de Hilbert de X . Pour tout H -schéma S , on note Y_S le sous-schéma tautologique correspondant de X_S . Pour tout point T d'un $\Delta \times H$ -schéma on note Y_T'' et Y_T' la trace et le résiduel de Y_T vis-à-vis de D_T . Pour tout point T d'un $\Gamma \times H$ -schéma, on note Y_T''' la trace de Y_T sur C_T . Pour tout point T

d'un $\Delta \times \Gamma$ -schéma, on note C_T'' la trace de C_T sur D_T . Si T est un tel point, pour lequel C_T'' est non singulier de dimension zéro, on notera $K(T)$ une extension finie du corps résiduel $k(T)$ telle que $C_{K(T)}''$ ait $(C_T \cdot D_T)$ points $K(T)$ -rationnels, où $(C_T \cdot D_T)$ désigne le nombre d'intersection. On note $F_{K(T)}$ et $G_{K(T)}$ deux parties complémentaires de $C_{K(T)}''$. Enfin pour un point R d'un schéma de Hilbert $\text{Hilb } C_S$, on notera P_R le sous-schéma tautologique de C_R .

6.2.2 Second lemme d'amorçage. Soit T un point de $\Gamma \times \Delta \times H$ tel que C_T'' soit non singulier et disjoint de Y_T . Soit T_1 l'image de T dans $\Gamma \times \Delta$ et S l'image de Y_T'' dans le schéma de Hilbert $\text{Hilb } D_{T_1}$. Soit R un point du schéma de Hilbert $\text{Hilb } C_{K(S)}$ ayant même image dans $\text{Hilb } C_S$ que Y_T''' . On suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(amorçe) R admet dans $\text{Hilb } C_{K(S)}$ une spécialisation Q telle que P_Q contienne F_Q et soit disjoint de G_Q et telle que les groupes $H^0(C_Q, I_{P_Q} \otimes L(-G_Q))$ et $H^1(C_Q, I_{P_Q} \otimes L(-G_Q))$ soient nuls.

(dîme) $H^0(D_{K(S)}, I_{Y_{K(S)}'' \cup F_{K(S)}} \otimes L) = 0$.

(dègue) $H^0(X_{\bar{Y}_T}, I_{\bar{Y}_T} \otimes L(-\Delta)) = 0$ où \bar{Y}_T désigne le point correspondant à Y_T' dans le schéma de Hilbert $\text{Hilb } X$. Alors si Z désigne le point générique de H , $H^0(X_Z, I_Z \otimes L)$ est nul.

Preuve : Remarquons d'abord que, du fait de l'amorçe, l'entier $r := \#G_{K(T)}$ est déterminé par la relation

$$(C_T \cdot L)\text{-colongueur } Y_T''' - r = g - 1$$

où $(C_T \cdot L)$ désigne le nombre d'intersection et g le genre arithmétique de C_T .

Soit U l'ouvert des points x de Hilb $C_{K(S)}$ vérifiant $H^0(C_x, I_{P_x} \otimes L(-G_x)) = H^1(C_x, I_{P_x} \otimes L(-G_x)) = 0$. Dans U on a aussi $H^0(C_x, I_{P_x} \otimes L(-\Delta)) = 0$ et $H^1(C_x, I_{P_x} \otimes L) = 0$. Notons π la première projection de $U \times C_{K(S)}$. Notons aussi \mathcal{P} le sous-schéma universel, \mathcal{I} son idéal et $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ son faisceau structural. Alors, d'après le théorème de changement de base (cf. [H1] III.12.11), les faisceaux $\pi_*(L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$, $\pi_*(\mathcal{I} \otimes L(-G_{K(S)}))$, $R^1 \pi_*(\mathcal{I} \otimes L(-G_{K(S)}))$, $\pi_*(\mathcal{I} \otimes L)$ et $R^1 \pi_*(\mathcal{I} \otimes L)$ sont localement libres sur U . En particulier $\pi_*(\mathcal{I} \otimes L)$ est un sous-fibré de rang r de π_*L comme on le voit en prenant l'image directe de la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \otimes L \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \longrightarrow 0.$$

La fibre en Q de ce sous-fibré ne rencontre $H^0(C_Q, L(-D_Q))$ qu'en zéro puisque $H^0(C_Q, I_{P_Q} \otimes L(-G_Q))$ est nul. Par suite la composition

$$\pi_*(\mathcal{I} \otimes L) \longrightarrow \pi_*L \longrightarrow \pi_*(L \otimes \mathcal{O}_{C_{K(S)}''})$$

fait de $\pi_*(\mathcal{I} \otimes L)$ un sous-fibré de rang r de $\pi_*(L \otimes \mathcal{O}_{C_{K(S)}''})$. La fibre en Q de ce sous-fibré est $H^0(C_Q'', I_{F_Q} \otimes \mathcal{E}_Q'' \otimes L)$.

Soit maintenant σ dans $H^0(X_T, I_{Y_T} \otimes L)$. Sa trace $\bar{\sigma}$ sur D_T s'annule sur Y_T'' et son image dans $H^0(C_T'', L)$ est dans celle de $H^0(C_T, I_{Y_T''} \otimes L)$. Si on remonte $\bar{\sigma}$ sur $K(S)$, on obtient une section encore notée $\bar{\sigma}$ dans $H^0(D_{K(S)}, I_{Y_{K(S)}''} \otimes L)$ dont l'image dans $H^0(C_{K(S)}'', L)$ est dans celle de $H^0(C_{K(S)}, I_{P_R} \otimes L)$. Mais on a vu que $H^0(C_{K(S)}, I_{P_R} \otimes L)$ est la fibre en R du sous-fibré $\pi_*(\mathcal{I} \otimes L)$ de $\pi_*(L \otimes \mathcal{O}_{C_{K(S)}''})$ et d'après la dîme, au point Q , la fibre de ce sous-fibré ne rencontre l'image de $H^0(D_{K(S)}, I_{Y_{K(S)}''} \otimes L)$ qu'en zéro. Il en est donc de même au point R c'est-à-dire que $\bar{\sigma}$ est nulle. On conclut comme pour le lemme d'Horace en utilisant la suite exacte résiduelle et la dègue. ■

6.3 Remarques et perspectives

Un trait caractéristique de la technique d'amorçage est que le schéma résiduel n'est plus rangé. On aura hâte de s'affranchir de cette source d'erreur en spécialisant la courbe d'amorçage dans un diviseur d'exploitation. Dans le présent travail, les courbes d'amorçage sont très simples (droites et coniques) et cette spécialisation peut se faire "en une seule fois". Pour n et t plus grands, il faudra peut-être considérer des courbes moins banales qu'on ne pourra spécialiser dans des diviseurs d'exploitation qu'en plusieurs fois. On disposera pour ce faire des résultats de [HH 3]; tandis que pour contrôler l'intersection des courbes d'amorçage avec les diviseurs, on disposera de [P] thm.9.

7. Le cas $n = t = 2$

Ce paragraphe est essentiellement consacré à la démonstration du

Théorème 7.1 : Soit $d \geq 5$. Soit q la partie entière de $\frac{(d+1)(d+2)}{6}$. Si d est divisible par trois la réunion de $S_q^{(2)}$ avec le point générique est rangée de niveau d . Sinon $S_q^{(2)}$ est rangée de niveau d .

Comme toujours en pareil cas, on démontre par récurrence un résultat plus fort :

Proposition 7.2 : Soient d, q, δ, ϵ des entiers non-négatifs vérifiant :

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} = 3q + 2\delta + \epsilon, \quad \delta \leq 1, \quad \delta + \epsilon \leq d.$$

Soit D la droite générique de \mathbb{P}^2 , et $S_\epsilon(D)$ sa partie générique à ϵ éléments. Alors si δ est nul $S_q^{(2)} \cup S_\epsilon(D)$ est rangé de niveau d , et si δ vaut un, $S_q^{(2)} \cup S_\epsilon(D) \cup P^2(D)$

est rangé (ici 2 désigne l'escalier extraverti de colongueur deux), sauf si (q, δ, ϵ) prend l'une des deux valeurs $(2, 0, 0)$ et $(5, 0, 0)$.

Preuve : Pour $d=1$, le résultat est évident. On raisonne donc par récurrence en supposant désormais $d \geq 2$. Soit α l'entier défini par

$$d + 1 \leq 2\delta + \epsilon + 2\alpha \leq d + 2.$$

Si $2\delta + \epsilon$ vaut $d+1$, alors δ vaut un et $\delta + \epsilon$ vaut d . Si d est différent de trois et cinq, on exploite D en introvertissant le $(1, 1)$ -point. Si d vaut trois on exploite d'abord la droite joignant les (2) -points puis D . Si d vaut cinq, on exploite d'abord la conique contenant les cinq (2) -points en y spécialisant l'un des quatre 1-points, puis on exploite D . On peut donc désormais supposer α positif. Montrons $\alpha \leq q$:

On a

$$\alpha \leq \frac{d+2-(2\delta+\epsilon)}{2} \quad \text{et} \quad q \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6} - \frac{2\delta+\epsilon}{3}$$

et on conclut parce que $\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ majore $\frac{d+2}{2}$.

Si $\delta + \epsilon + 2\alpha$ vaut $d+1$, on exploite D en y spécialisant α (2) -points. La dîme est claire et la dègue est l'hypothèse de récurrence avec $q' = q - \alpha$, $\delta' = 0$, $\epsilon' = \alpha + \delta$.

Si $\delta + \epsilon + 2\alpha$ vaut d , alors δ vaut un. On exploite D en y spécialisant α (2) -points et en introvertissant le $(1, 1)$ -point. La dîme est claire et la dègue est l'hypothèse de récurrence avec $q' = q - \alpha$, $\delta' = 0$, $\epsilon' = \alpha$.

Si $\delta + \epsilon + 2\alpha$ vaut $d+2$, alors δ est nul. Si ϵ est non nul, on exploite D en y spécialisant α (2) -points et en expulsant un 1-point. La dîme est claire et la dègue est l'hypothèse de récurrence avec $q' = q - \alpha$, $\delta' = 1$, $\epsilon' = \alpha - 1$.

Il reste à traiter le cas où δ et ϵ sont nuls et d est pair. On a donc $d \geq 8$. On exploite la cubique générique C en y spécialisant $\frac{3d}{2}$ (1)-points. La dîme est claire. Pour prouver la dègue, on spécialise C en réunion générique $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ de trois droites avec $d-2$ des $\frac{3d}{2}$ 1-points résiduels sur L_1 et les autres sur L_2 . Puis on exploite L_1 puis on spécialise L_2 en D et on applique l'hypothèse de récurrence avec

$$q' = \frac{(d+1)(d+2)}{6} - \frac{3d}{2}, \quad \delta'=0, \quad \epsilon' = \frac{3d}{2} - d + 2. \blacksquare$$

Corollaire 7.3 : Pour q différent de 2 et 5, $S_q^{(2)}$ est de rang maximum dans \mathbb{P}^2 . Pour m différent de 2 et 5, $\omega_2(m)$ est égal à $\omega_2'(m)$.

Preuve : Pour $m \geq 7$, l'énoncé découle de 7.1 et 2.2.2.b). De même, on conclut par 2.2.2.b) pour $P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3^{(2)}$ qui est emboîté entre $P_1^{(2)} \cup P_2^2 \cup P_3$ et $P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3^{(2)} \cup P_4$ qui sont rangés; ainsi que pour $P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3^{(2)} \cup P_4^{(2)}$ qui est emboîté entre $P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3^{(2)} \cup P_4$ et $P_1^{(2)} \cup P_2^{(2)} \cup P_3^{(2)} \cup P_4^{(2)} \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7$, ainsi que pour $P_1^{(2)} \cup \dots \cup P_6^{(2)}$ qui est emboîté entre $P_1^{(2)} \cup \dots \cup P_4^{(2)} \cup P_5^2 \cup P_6$ et $P_1^2 \cup \dots \cup P_6^{(2)} \cup P_7^{(2)}$, qui sont rangés d'après 7.2. \blacksquare

8. Le cas $n = 2$, $t = 3$

Ce paragraphe est consacré essentiellement à la démonstration du

Théorème 8.1 : Soit $d \geq 7$. Si $\frac{(d+1)(d+2)}{2} = 6q + \epsilon$ avec $0 \leq \epsilon \leq 5$ alors si $\epsilon=0$, $S_q^{(3)}$ est rangée de niveau d et si $\epsilon \geq 1$ il existe un escalier convenable e de colongueur ϵ tel que $S_q^{(3)} \cup P^e$ soit rangé de niveau d .

Comme au paragraphe précédent on va démontrer par

récurrence un résultat plus fin. Pour cela introduisons l'ensemble d'escaliers :

$$I = \{[3,2,1], [2,2,1,1], [2,2,1], [2,1,1], [2,1], [2], [1,1], [1]\}$$

L'ordre précédent permet d'identifier toute fonction sur I par la suite de ses huit valeurs. Comme les seuls entiers intervenant dans la description de ces escaliers sont 1,2 et 3, on omettra les virgules (et les crochets) dans l'écriture des éléments de I. Pour $i=i_1 i_2 \dots$ dans I on pose $|i|:=i_1+i_2+\dots$ et $i':=i_1$. On introduit la partie suivante de I :

$$I' := \{2211, 221, 211, 2, 11\} .$$

Enfin si a est une fonction non-négative sur I, on note R_a la réunion générique de a_{321} (3)-points avec a_{2211} 2211-points (extravertis) sur la droite générique D, a_{2211} 221-points (extravertis) sur D, a_{211} 211-points (extravertis) sur D, a_{21} (2)-points sur D, a_2 11-points (introvertis) sur D, a_{11} 11-points (extravertis) sur D et a_1 1-points sur D. Remarquons que comme le groupe des permutations de deux éléments n'a qu'un élément non trivial, on peut parler d'introverson même pour un escalier e extraverti : dans ce cas, l'introverson est la spécialisation de P_D^e en $P^{\sigma(e)}(D)$. On peut alors énoncer la

Proposition 8.2 : Soit $d \geq 5$ et a une fonction non-négative sur I. On suppose

- i) $\sum_{i \in I} |i| a_i = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$
- ii) $\sum_{i \neq (3)} i' a_i \leq d$, si $\sum_{i \neq (3)} i' a_i = d$ alors $a_{2211} \leq 1$
- (iii) $\sum_{i \in I} a_i \leq 2$.

Enfin on suppose que a n'est pas l'un des sept octuplets exceptionnels suivants : 21001000, 40010000, 40001001,

HIRSCHOWITZ

30200000, 50000006, 50000104, 50000202. Alors R_a est rangée de niveau d .

Preuve : Traitons d'abord un à un tous les cas avec $d=5$ (dans l'ordre lexicographique décroissant).

30001000 : Il suffit d'exploiter 3 coniques passant par les 4 points.

30000101 : exploiter la conique passant par les 5 points.

30000011 : ce cas est une généralisation du précédent.

30000003 : idem.

21001000 : c'est l'exception.

21000101 : exploiter successivement la droite L joignant les (3)-points, puis D , puis à nouveau L et enfin la droite sur laquelle le 211-point résiduel a une trace de colongueur trois.

21000011 :

21000003 : ces cas sont des généralisations du précédent.

21110000 : exploiter la droite L joignant les (3)-points, puis D , en introvertissant le 31-point.

20101001 : exploiter d'abord L , puis D .

20100012 : exploiter L puis D .

20011010 : exploiter L puis D .

12001000 : exploiter deux fois D .

On suppose désormais $d \geq 6$, et on raisonne par récurrence.

On veut exploiter D . Montrons d'abord que $\sum_{i \in I} i' a_i \geq d+5$.

De fait on a $\frac{(d+1)(d+2)}{2} = \sum i a_i \leq 2 \sum i' a_i + 4$

et l'inégalité annoncée découle de $d+5 \leq \frac{(d+1)(d+2)}{4} - 2$.

Supposons donc $\sum_{i \neq 321} i' a_i = d+1 - 3\alpha + \beta$ avec $0 \leq \beta \leq 2$.

Si β est nul, on spécialise α (3)-points sur D (on a bien $\alpha \leq a_{321}$) et il ne reste qu'à vérifier les hypothèses de récurrence. Si β est non nul, il faut procéder à

un ou deux ajustements par introversion ou expulsion. Les

i -points avec $i=2211, 221, 211, 11$ sont susceptibles d'être introvertis, tandis que les i -points avec $i=21, 2, 1$ sont susceptibles d'être expulsés. Chaque introversion et chaque expulsion modifie la congruence modulo trois de la colongueur de la trace. Il suffit donc que $\sum_{i \neq 321} a_i$ vaille au moins deux pour qu'on puisse ajuster : en effet d'une part l'inégalité $\sum_i a_i \geq d+5$ assure que a_{321} est suffisamment grand pour permettre deux expulsions si nécessaire, et d'autre part $\sum_{i \neq 321} i' a_i$ est suffisamment petit pour permettre deux ajustements si nécessaire, sauf dans le cas litigieux où $\sum_{i \neq 321} i' a_i$ vaut d , et où les ajustements ne peuvent porter que sur des 2211-points ou des 1-points. On a alors $a=xy00000z$ avec $0 \leq y \leq 1$, $z=d-2y$ et on peut traiter ce cas comme généralisation du cas $xy00010z'$ avec $z'=z-2$, où l'ajustement est réalisé par expulsion du 2-point.

Supposons donc $\sum_{i \neq 321} a_i \geq 2$. Comme on vient d'expliquer, on va faire 0, 1 ou 2 ajustements et il faut choisir le type des deux points qu'on va envisager d'introvertir ou d'expulser : on opte pour l'ordre de préférence : 2211, 221, 211, 11, 2, 21, 1, qui a l'avantage de préserver la condition (iii). Une fois ainsi déterminé le type des deux points sur lesquels va porter l'ajustement, il se peut que subsiste une alternative. Ainsi par exemple si $a_{221} = a_{211} = 1$ avec $\beta=2$, on peut aussi bien introvertir le 221-point que le 211-point. On opte pour le même ordre de préférence que précédemment : 2211, 221, 211, 11, 2, 21, 1 (comme on l'a dit plus haut, si β est nul, on ne spécialise que α 321-points sur D). On a ainsi déterminé une spécialisation Y de R_a dont la colongueur de la trace sur D est $d+1$. Il

reste donc à vérifier la dègue. Le résiduel est une réunion générique R_b et il faut voir si b vérifie les hypothèses de récurrence. La condition i) est automatique et on a déjà vu que iii) est vérifiée. Pour prouver ii) on observe l'inégalité $\sum_{i \neq 321} i' b_i \leq \frac{2}{3}(d+1) + \frac{4}{3} = \frac{2d+6}{3}$. Pour $d \geq 10$ on a $\frac{2d+6}{3} < d-1$.

Pour $7 \leq d \leq 9$, on a $\lfloor \frac{2d+6}{3} \rfloor \leq d-1$. Si $b_{2211}=3$, cela signifie qu'on a expulsé deux 21-points. Vu la stratégie choisie, cela implique $a_{2211} = a_{221} = a_{11} = 0$ d'où en fait

$$\sum_{i \neq 321} i' b_i \leq \frac{2}{3}(d+1) < d-1 .$$

Pour $d=6$, on a $\frac{2d+6}{3} \leq d$. Pour que $\sum_{i \neq 321} i' b_i$ vaille 6, il faut que $a_{2211} + a_{221}$ vaille deux et que β vaille zéro, et que a_{211} , a_{21} , a_{21} , a_2 , a_{11} et a_1 soient nuls. Le seul cas possible est l'exception 30200000. On a donc $\sum_{i \neq 321} i' b_i \leq 5$. Si $b_{2211}=2$, comme précédemment on a $a_{2211} = a_{221} = a_{11} = 0$ et $\sum_{i \neq 321} i' b_i \leq \frac{2}{3}(d+1) < d-1$.

Il reste à traiter les cas où b est une exception. Le plus simple consiste à examiner tous les cas pour $d=6,7,8$.

d=6 : Si $b=21001000$, alors $a_{2211} = a_{211} = 0$, $a_{21} = 1$ et $a_{321} + a_{221} = 4$ avec $a_{221} \leq 1$. On trouve l'exception 40001001 et les généralisations de 30101100; pour cet octuplet, la stratégie choisie conduit à $b=30000101$.

d=7 :

Si $b=30200000$ alors a ne peut être que l'exception 50000202.

Si $b=40010000$ alors $a=xy000ztu$ avec $y \leq 1$.

Si $y=1$ alors $x=4$ et $a=41000014$ d'où $b=40000101$.

Si $y=0$ alors $x=5$ et $z+t \leq 1$. Si $z=1$, alors a est une exception; si $z=0$ alors $a=50000014$ et $b=40001001$.

HIRSCHOWITZ

Il faut donc choisir une autre stratégie : on exploite deux fois la conique passant par les cinq (3)-points en spécialisant un 1-point dessus la seconde fois. Puis on exploite D.

Si $b=40001001$, alors $a_{2211} = 0$ et $a_{221} \leq 1$. Si $a_{221} = 1$, alors $a_{321} = 4$, et $a_{211} = 0$ (puisque'on n'a pas introverti le 221-point). On a $a_{21} \leq 1$. Si $a_{21} = 1$, alors $a_{11} = 0$ et a ne vérifie pas ii). Si $a_{21} = 0$, a ne vérifie pas ii). Si maintenant $a_{221} = 0$, alors $a_{321} = 5$ et $a_{211} \leq 1$. Si $a_{211} = 1$ alors a est généralisation de 50010100. Ici encore on change de stratégie en exploitant deux fois la conique passant par les cinq 321-points, la seconde en y spécialisant le 2-point. Puis on exploite D en introvertissant le 211-point. Si a_{211} est nul, alors $a_{21} \leq 1$. Si $a_{21} = 1$, alors a est généralisation de 50001101. On change de stratégie pour exploiter comme plus haut deux fois la conique et une fois D. Si $a_{21} = 0$ alors a , n'étant pas une exception vaut 50000014, cas déjà traité plus haut.

d=8 :

Si $b=50000006$, on voit que ii) est impossible.

Si $b=50000104$, de même ii) est impossible.

Si $b=50000202$, alors $a_{2211} + a_{221} = 2$ et $a_{21} = 2$ de sorte que i) est impossible.

Il faut maintenant aborder les cas avec $\sum_{i \in I} a_i \leq 1$ (ce sont en fait les seuls qui nous intéressent). On commence par traiter un par un les cas initiaux :

d=6 : $a_{211} = 1$ c'est une exception.

d=7 : si $a_{2211} = 1$, on exploite D et on trouve $b=(30012000)$.

si $a_{2211} = 0$, on exploite successivement deux des coniques passant par cinq des six 321-points.

HIRSCHOWITZ

d=8 : $a_{21}=1$: on exploite une autre droite D' , en y spécialisant trois 321-points, puis on spécialise D' en D , et on exploite D , ce qui ramène au cas (30001000).

d=9 , $a_1=1$: on exploite D en y spécialisant trois 321-points, ce qui ramène au cas (60003000).

d=10 : si $a_{2211}=1$ alors on exploite D en y spécialisant trois 321-points ce qui ramène au cas (70013000).
Si $a_{2211}=0$, on exploite la réunion $C \cup C'$ de deux coniques génériques en spécialisant quatre 321-points à l'intersection $C \cup C'$ et trois autres 321-points sur chacune des deux coniques. Puis on exploite C en y spécialisant le dernier 321-point, puis C' en spécialisant dans $C \cup C'$ un 21-point et 1-point.

d=11 : on exploite une autre droite générique D' en y spécialisant quatre 321-points, puis on spécialise D' en D , ce qui ramène soit au cas (90004000) soit au cas (81004000).

d=12 , $a_1=1$: on exploite D en y spécialisant quatre 321-points, ce qui ramène au cas (11,0,0,0,4,0,0,0).

d=13 , $a_{21}=1$: on exploite D en y spécialisant quatre 321-points, ce qui ramène au cas (13,0,0,0,4,0,0,1).

d=14 : on exploite une autre droite générique D' en y spécialisant cinq 321-points, puis on spécialise D' en D , ce qui ramène soit au cas (15,0,0,0,5,0,0,0) soit au cas (14,1,0,0,5,0,0,0).

Abordons enfin le cas général $d \geq 15$. On exploite d'abord la cubique générique C en y spécialisant d 321-points. Puis on spécialise C en réunion $C' \cup D'$ de la conique et de la droite génériques, avec $d-3$ des d 21-points résiduels sur C' et les trois autres sur D' . On exploite C' en expulsant l'un des $d-3$ 21-points.

On spécialise C' en réunion $D'' \cup D'''$ de deux droites génériques, les $d-4$ 1-points résiduels allant sur D'' , et le 2211-point allant sur D''' . On exploite D'' puis on spécialise D' et D''' en D , ce qui ramène à un cas ($\times 1003000$) ou ($\times 2003000$) (si $d \equiv 2, 7, 10$ ou $11 \pmod{12}$), à un cas ($\times 1003001$) (si $d \equiv 0$ ou $9 \pmod{12}$), à un cas ($\times 1004000$) (si $d \equiv 1, 4, 5, 8 \pmod{12}$) et à un cas ($\times 1013000$) (si $d \equiv 3$ ou $6 \pmod{12}$). Les hypothèses de récurrence sont bien vérifiées, sauf pour $d=15$, auquel cas on exploite D ce qui ramène au cas (60010013). ■

Corollaire 8.3 : Pour m différent de 2 et 5, on a l'égalité $\omega_3(2, m) = \omega'_3(2, m)$. Plus précisément, pour $m \geq 6$, si S désigne la partie générique à m éléments de \mathbb{P}^2 , alors $S^{(3)}$ est de rang maximum.

Preuve : pour $m \geq 6$, on applique 2.2.2 (et 8.1). Pour $m=1$, l'égalité $\omega_3(2, 1)=3$ est évidente. Pour $m=3$, toute courbe de degré au plus cinq contenant $S^{(3)}$ contient le triangle de sommets dans S . Comme S n'est pas aligné, une telle courbe est de degré au moins cinq et $\omega_3(2, 3) = 5 = \omega'_3(2, 3)$. Pour $m=4$, $S^{(3)}$ est de rang maximum d'après 2.2.2 b) : on applique 8.2 dans les cas (30001000) et (40000004).

9. Le cas $n = 3, t = 2$

Ce paragraphe est consacré principalement à la démonstration du

Théorème 9.1 : Soit $d \geq 3, d \neq 4$. Si $\frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} = 4q + \epsilon$ avec $0 \leq \epsilon \leq 3$, alors si ϵ est nul, $S_q^{(2)}$ est rangée de niveau d et si ϵ est non nul, il existe un escalier convenable (à peu près unique) e de colongueur ϵ tel que $S_q^{(2)} \cup P^e$ soit rangé de niveau d dans \mathbb{P}^3 .

La démonstration présente beaucoup d'analogies avec celle du paragraphe précédent. On formule un énoncé plus précis dont la preuve est plus facile dans les cas auxiliaires ($\epsilon + \delta + \gamma \geq 2$) que dans les cas fondamentaux pour lesquels on utilise une courbe d'amorçage.

Conventions 9.2 : Dans ce paragraphe, D désigne un plan de \mathbb{P}^3 . On n'exploitera pas d'autre diviseur que des plans. Les 1-points sont des points réduits, les 2-points, ou (11)-points sont des points doubles, les 21-points sont des 21-points dans un plan, tandis que les 31-points sont définis par des carrés d'idéaux maximaux (ce ne sont pas des 31-points dans un plan). On dira qu'un 21-point à support dans D est introverti s'il est contenu dans D , extraverti sinon.

Proposition 9.3 : Soient $d, q, \epsilon, \delta, \gamma$ des entiers non négatifs vérifiant $\binom{d+3}{3} = 4q + \epsilon + 2\delta + 3\gamma$, $d \geq 3$ et $\delta \leq 2, \gamma \leq 1$, si $\gamma = 1$, alors $\delta = \epsilon = 0$, et enfin $\epsilon + \delta \leq \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 6$. Alors la réunion générique de q 31-points hors de D avec ϵ 1-points dans D , δ 2-points extravertis sur D et γ 21-points extravertis sur D est rangée (de niveau D), sauf si $d=4, q=8$, et $\gamma=1$.

Preuve : Traitons d'abord le cas où d vaut trois. On a $\gamma=0$. Le cas $q=5$ a été traité en 6.3. Le cas $q=4, \delta=2$ en est une généralisation, ainsi que le cas $q=4, \delta=1, \epsilon=2$. Voyons le cas où $q=4, \delta=0, \epsilon=4$. On exploite le plan générique D' sur lequel on spécialise trois 31-points et un 1-point. La dîme résulte de 7.2 et la dègue se vérifie facilement, par exemple en spécialisant le dernier 31-point dans D .

On raisonne désormais par récurrence en supposant $d \geq 4$. On traite d'abord le cas où l'ajustage dans un plan est possible. L'introversion et l'expulsion modifiant la congruence modulo trois de la colongueur de la trace, l'ajustage est possible par exemple dès que $\epsilon + \delta + \gamma \geq 2$. Il est aussi trivialement possible si $\epsilon + \delta + \gamma$ vaut 0 ou 1 et que $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ est divisible par trois ce qui est le cas lorsque d n'est pas divisible par trois. Enfin l'ajustage est possible, même si d est divisible par trois lorsque $\epsilon + \delta$ vaut un (mais nous ne nous en servons pas).

Traisons plus en détail le cas où $\epsilon + \delta + \gamma$ vaut au moins deux. On a donc γ nul et $\epsilon + \delta \geq 2$. On a

$$\epsilon + \delta + 3q \geq \frac{3}{4} \binom{d+3}{3} \geq \frac{(d+1)(d+2)}{2}.$$

Soient α et β les entiers vérifiant

$$\epsilon + \delta + 3\alpha - \beta = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \quad 0 \leq \beta \leq 2.$$

On a $2 \leq \alpha \leq q$, et $\alpha \leq \frac{(d+1)(d+2)}{6} \leq \frac{d(d+1)}{2} - 6 - 2$, si $d \geq 5$.

Si β est nul, on spécialise α 31-points dans D et, grâce à 7.2, on se réduit à l'hypothèse de récurrence avec $q' = q - \alpha$, $\epsilon' = \delta + \alpha$, $\delta' = \gamma' = 0$.

Si β vaut 1 et ϵ n'est pas nul, on spécialise α 31-points sur D en expulsant un 1-point. Grâce à 7.2, on se réduit ainsi à l'hypothèse de récurrence avec

$$q' = q - \alpha, \quad \epsilon' = \alpha - 1 + \delta, \quad \delta' = 1, \quad \gamma' = 0.$$

Si β vaut 1 et ϵ est nul alors δ vaut deux. On spécialise $\alpha - 1$ 31-points sur D et on introvertit les 2-points. La dîme ne résulte pas directement de 7.2 mais on s'y ramène en exploitant la droite joignant les 2-points (il faut y spécialiser $[\frac{d-1}{2}]$ 21-points et si d est pair, introvertir l'un des deux 2-points). Quant à la dernière c'est l'hypothèse de récurrence avec $q' = q - \alpha + 1, \epsilon' = \alpha - 1, \delta' = \gamma' = 0$.

Si β vaut deux et δ est non nul, on spécialise $\alpha-1$ 31-points sur D et on introvertit un 2-point. La condition en basse dimension résulte de 7.2 et on est réduit à l'hypothèse de récurrence avec

$$q'=q-\alpha+1, \quad \epsilon'=\alpha-1, \quad \delta'=\gamma'=0.$$

Enfin si β vaut deux et ϵ vaut au moins deux, on spécialise α 31-points sur D en expulsant deux 1-points, ce qui nous réduit à l'hypothèse de récurrence avec

$$q'=q-\alpha, \quad \epsilon'=\alpha-2, \quad \delta'=2, \quad \gamma'=0.$$

Il nous reste à traiter le cas fondamental où $\epsilon+\delta+\gamma \leq 1$. Si d n'est pas divisible par trois, on exploite le plan générique D' qu'on spécialise ensuite en D (on ne détaille pas ce cas, qui est analogue au cas $\beta=0$ ci-dessus). On peut donc supposer $d=3d'$ dans la suite.

On va appliquer le second lemme d'amorçage (6.2.2). On prend pour Γ le schéma de Hilbert des coniques et pour Δ le point fermé D . Pour T , on prend la réunion générique de d 31-points sur la conique générique C_T avec $\frac{3(d'^2+d')}{2}$ 31-points dans d , avec $q - \frac{3d'^2+9d'}{2}$ 31-points génériques et, si ϵ est non nul, avec P^e où e est l'escalier convenable de longueur $\epsilon \left(\frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{3} = 4q + \epsilon, 0 \leq \epsilon \leq 4 \right)$. On convient que, si ϵ est nul, P^e est le sous-schéma vide.

L'amorce se vérifie en spécialisant un des d 31-points de C_T sur C_T'' . La dîme résulte de 7.2. La dègue dit que la réunion générique de $q - \frac{3d'^2+9d'}{2}$ 31-points avec d 31-points sur C_T , $\frac{3(d'^2+d')}{2}$ points de D et P^e n'est pas sur une surface de degré $d-1$. Pour la prouver, on exploite le plan D' de la conique C en y spécialisant $\frac{d^2-5d}{6}$ 31-points et encore un point de D . Après exploitation de C , la dîme dit que la réunion générique dans D'

de d points sur la conique avec $\frac{d^2-5d}{6}$ 21-points et encore un point (sur $D \cap D'$) est rangée de niveau $d-3$. On spécialise la conique en réunion de deux droites génériques $L_1 \cup L_2$ avec le point de $D \cap D'$ sur L_1 ainsi que $d-3$ des d points de C , les trois autres allant sur L_2 , et on exploite L_1 . Le résultat découle alors de 7.2 sauf pour $d=6$, auquel cas le résultat est quand même vrai parce que la réunion générique d'un 21-point avec trois points alignés est rangée de niveau deux. On reste avec une dègue qui dit que la réunion générique de $q-3d'^2-2d'$ 21-points avec $\frac{d^2+d}{6}$ points de D' dont d sur C , $\frac{3d'^2+3d'-2}{2}$ points de D et P^e est rangée de niveau $d-2$.

On définit f et g par $\frac{3d'^2-7d'+2}{2} = 3f-g$, $0 \leq g \leq 2$. On spécialise D' en D , g des $\frac{d^2-5d}{6}$ points "libres" de D' entrant en collision avec g des $\frac{3d'^2+3d'-2}{2}$ points de D . On spécialise encore f 31-points dans D , sauf si la colongueur de e est trois, auquel cas d vaut au moins neuf, f est non nul et on spécialise P^e en un 21-point introverti dans D et on spécialise seulement $(f-1)$ 31-points dans D . Puis on exploite D . La dème dit que la réunion générique de $3d'^2+2d'-1-g$ points de D dont d sur C avec f 21-points est rangée dans D . Elle se démontre en spécialisant C en réunion de deux droites $L_1 \cup L_2$ avec $d-1$ points sur L_1 et un sur L_2 , en spécialisant les $3d'^2+2d'-1-g$ points en $\frac{3d'^2+2d'-1-g}{3}$ 21-points et en exploitant L_1 , ce qui nous ramène à 7.2. La dègue dit, si la colongueur de e est trois que la réunion générique de $q-3d'^2-2d'-f+1$ 31-points avec $f+g-1$ point de D est rangée de niveau $d-3$ et sinon que la réunion générique de $q-3d'^2-2d'-f$ 31-points avec $f+g$

points de D et P^e est rangée de niveau $d-3$. Après spécialisation éventuelle de P^e en $P^e(D)$, cette dernière résulte de l'hypothèse de récurrence. ■

Corollaire 9.4 : Pour m différent de 2, 3 et 9, $S_m^{(2)}$ est de rang maximum dans \mathbb{P}^3 . Pour m différent de 3 et 9, $\omega_2(3,m)$ est égal à $\omega_2'(3,m)$.

Preuve : pour m égal à un, tout est clair. Il est aussi clair que $S_2^{(2)}$ n'est pas contenu dans un plan. Pour voir que $S_4^{(2)}$ est de rang maximum, on applique 2.2.2.b) avec $S_5^{(2)}$ et la réunion générique d'un (2)-point avec trois 2-points, dont on montre facilement qu'elle est rangée. Pour $m=5,6,7,8$, $S_m^{(2)}$ est emboîté entre $S_5^{(2)}$ et la réunion générique de $S_8^{(2)}$ avec un 2-point et un point, qui est rangée d'après 9.3. Cette réunion est contenue dans $S_m^{(2)}$ pour $10 \leq m \leq 14$ qui est contenu dans $S_{14}^{(2)}$ et pour ces valeurs de m $S_m^{(2)}$ est rangée toujours par 2.2.2.b). Pour $m \geq 14$, on conclut par 2.2.2.b) et le théorème 9.1. Signalons qu'on a parlé d'inclusion abusivement : ces inclusions sont à comprendre sur des extensions communes aux corps résiduels. ■

10. Conclusion au goût du jour

Les démonstrations données ne donnent pas d'algorithme pour trouver une partie finie S telle que $S^{(2)}$ ou $S^{(3)}$ soit de rang maximum. Cependant il n'est pas difficile, sur le plan théorique, de concevoir un tel algorithme : on a montré que certaines matrices à coefficients polynomiaux sont de rang maximum. On peut calculer ces coefficients, puis les mineurs maximaux de la matrice et en déterminer un non nul. Il ne reste plus, étant donné un polynôme non nul (sur $(\mathbb{A}^n)^q$) qu'à

trouver un point où ce polynôme n'est pas nul, ce qui ne présente pas de difficulté.

Bibliographie

- [AC] Arbarello, E. - Cornalba, M., A few remarks about the variety of irreducible plane curves of given degree and genus, Ann.Scient. Ec.Norm.Sup. 16 (1983), 467-488
- [B1] Ballico, E., On the postulation of disjoint rational curves in a projective space, Preprint, Pise 1984
- [B2] ———, Homogeneous ideals of points, Preprint, Pise 1984
- [BE 1] Ballico, E. - Ellia, Ph., Generic curves of small genus in \mathbb{P}^3 are of maximal rank, Math. Ann. 264 (1983) 211-225
- [BE 2] ———, The maximal rank conjecture for non special curves in \mathbb{P}^3 , Invent. Math., à paraître
- [BG] Briançon, J. - Galligo, A., Déformations distinguées d'un point de \mathbb{E}^2 ou \mathbb{R}^2 , In Astérisque 7/8 (1973), 129-138
- [Ch 1] Chudnovsky, G.V., Finite sets of singular points of complex hypersurfaces, CRAS ser.A 286 (1978), 1133-1135
- [Ch 2] ———, Singular points on complex hypersurfaces and multidimensional Schwarz lemma, Sem. D.P.P., Prog. in Math. 12 (1981), 29-69
- [D] Demailly, J.P., Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, Bull. SMF 110 (1982), 75-102
- [EH] Eisenbud, D. - Harris, J., Divisors on general curves and cuspidal rational curves, Invent. Math. 74 (1983), 371-418
- [E] Ellingsrud, G., Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans \mathbb{P}^e à cône de Cohen-Macaulay, Ann.Sci. Ec.Norm.Sup. Paris 8 (1975), 423-432
- [EV] Esnault, H. - Viehweg, E., Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points, Math. Ann. 263 (1983), 75-86
- [G] Grothendieck, A., Techniques de construction en géométrie algébrique. Les schémas de Hilbert, Sem. Bourbaki, exposé 221, (1960-61)
- [GP] Gruson, L. - Peskine, Ch., Genre des courbes de l'espace projectif I. In Algebraic Geometry, Tromsø 1977, L.N. in Math. 687 (1978), 31-59
- [H1] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer Verlag, New York (1977) XVI+496pp.
- [H2] ———, On the classification of Space Curves, In Vector Bundles and Differential Equations, Prog. in Math. 7 (1980), 83-112

HIRSCHOWITZ

- [HH 1] Hartshorne, R. - Hirschowitz, A., Droites en position générale dans l'espace projectif, In Algebraic Geometry, Proc. La Rabida 1981, L.N. in Math. 961 (1982), 169-189
- [HH 2] ———, Cohomology of a general instanton bundle, Ann.Scient. Ec.Norm.Sup. 15 (1982), 365-390
- [HH 3] ———, Smoothing Algebraic Space Curves, In Week of Algebraic Geometry, Proc. Barcelona 1983, L.N., à paraître
- [HH 4] ———, Courbes rationnelles et droites en position générale, Preprint Nice 1984
- [HH 5] ———, Nouvelles courbes de bon genre via la cohomologie des faisceaux réflexifs, en préparation
- [Hi 1] Hirschowitz, A, Sur la postulation générique des courbes rationnelles, Acta Math. 146 (1981), 209-230
- [Hi 2] ———, Rank Techniques and jump stratifications, In Proc. Bombay Conf. 1984, à paraître
- [Hi 3] ———, Sur l'idéal de la partie finie générique de \mathbb{P}^n , en préparation
- [M] Masser, D., A note on multiplicities of polynomials, Publ. Math. Paris VI, n°43, Problème Diophantiens 1980/81, exp.n°2, 11pp.
- [N 1] Nagata, M., On the fourteenth problem of Hilbert, Amer. J.Math. 81, n°3 (1959), 766-772
- [N 2] ———, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay 1965
- [P] Perrin, D., Courbes passant par k points généraux de \mathbb{P}^3 , CRAS 299, série I n°10 (1984), 451-453
- [PS] Peskine, Ch. - Szpiro, Liaison des variétés algébriques I, Invent. Math. 26 (1974) 271-302
- [Ph] Philippon, P., Interpolation dans les espaces affines, In sem. de Théorie des Nombres 1980/81, Prog. in Math. 22 (1982) 221-235
- [S] Skoda, H., Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ et applications arithmétiques, In sem. P.Lelong, L.N. in Math. 578 (1977), 314-323
- [W 1] Waldschmidt M., Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables (II), In Sem. P.Lelong, L.N. in Math. 578 (1977), 108-135
- [W 2] ———, Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque n°69-70 (1980)
- [Wat] Watanabe, M., On projective Normality of Space Curves on a Non-Singular Cubic Surface in \mathbb{P}^3 , Tokyo J.Math., vol.4 n°2 (1981), 331-341
- [Wü] Wüstholtz, G., On the degree of algebraic hypersurfaces with given singularities, Publ.Math. Paris VI,

HIRSCHOWITZ

N°43, Problèmes Diophantiens 1980/81, exp. n°5, 19pp.
[Z] Zariski, O., Dimension-theoretic characterization
of maximal irreducible algebraic systems of plane
nodal curves of a given order n and with a given number
 d of nodes, Amer. J. Math. 103 (1982)

André HIRSCHOWITZ
U.A. n°168
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Parc Valrose, F-06034 NICE CEDEX

(Recu le Janvier 28, 1985)