manuscripta math. 40, 327 - 340 (1982)

manuscripta mathematica

UNICITE DE LA SUITE SPECTRALE D'UN FIBRE

Michel André

For a Kan fibration, the spectral sequences due to A. Dress and to M. André are isomorphic Serre spectral sequences in simplicial theory.

Le but de ce travail est de démontrer que, pour une fibration au sens de Kan, les suites spectrales (de Serre en théorie simpliciale) construites par A. Dress [2] et M. André [1] sont isomorphes.

Soit A un anneau de base quelconque.

RAPPELS SIMPLICIAUX. Soit X un ensemble simplicial.

DEFINITION 1. Un <u>système simplicial</u> F (de A-modules sur X) associe un A-module F(x) à chaque simplexe x

$$x \in X_n \quad \text{ou} \quad x : \Delta[n] \longrightarrow X$$

et un homomorphisme de A-modules

$$F\ (x,\alpha) : F(x) \longrightarrow F(x\alpha)$$

à chaque application simpliciale α

$$x \in X_n \quad \text{et} \quad \alpha : \Delta[m] \longrightarrow \Delta[n]$$

le tout avec les conditions usuelles de compatibilité

$$F(x,id) = id \qquad F(x,\alpha\beta) = F(x\alpha,\beta) \circ F(x,\alpha).$$

On peut définir un système simplicial en utilisant les seules applications simpliciales suivantes :

$$e_n^i : \Delta[n-1] \longrightarrow \Delta[n] \qquad 0 \leqslant i \leqslant n \neq 0$$

donnant les opérateurs de face

$$\varepsilon_n^i(x) = xe_n^i$$

d'une part et d'autre part

$$s_n^i : \Delta[n+1] \longrightarrow \Delta[n] \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$$

donnant les opérateurs de dégénérescence

$$\sigma_n^i(x) = xs_n^i .$$

0025-2611/82/0040/0327/$02.80

La donnée d'un système simplicial conduit à de l'homologie. Le A-module $H_n(X,F)$ est le n-ème module d'homologie du complexe $K(X,F)$ muni d'une différentielle de degré -1 et composé des A-modules suivants

$$K_n(X,F) = \Sigma_{x \in X_n} F(x).$$

Lorsque X est égal à $\Delta[0]$, alors un système simplicial est un module simplicial.

DEFINITION 2. On a la notion duale de système cosimplicial : l'homomorphisme $F(x,\alpha)$ a alors $F(x\alpha)$ comme source et $F(x)$ comme but. La donnée d'un système cosimplicial conduit à de la cohomologie. Le A-module $H^n(X,F)$ est le n-ème module de cohomologie du complexe $K(X,F)$ muni d'une différentielle de degré +1 et composé des A-modules suivants

$$K^n(X,F) = \Pi_{x \in X_n} F(x).$$

DEFINITION 3. Un système local F est un système à la fois simplicial et cosimplicial, autrement dit il s'agit d'un système simplicial $\underline{F}$ pour lequel les homomorphismes $\underline{F}(x,\alpha)$ sont tous des isomorphismes ou encore d'un système cosimplicial $\overline{F}$ pour lequel les homomorphismes $\overline{F}(x,\alpha)$ sont tous des isomorphismes :

$$\underline{F}(x) = \overline{F}(x) \quad \text{et} \quad \underline{F}(x,\alpha) = \overline{F}(x,\alpha)^{-1}.$$

Un A-module M donne un système local dit constant et noté encore M avec $M(x)$ toujours égal à M et avec $M(x,\alpha)$ toujours égal à id.

REMARQUE 4. Beaucoup de démonstrations élémentaires d'algèbre homologique se ramènent à des arguments de suites spectrales dégénérées. Il est utile d'avoir la terminologie suivante. Pour cela considérons un complexe double $K_{p,q}$ (avec des graduations positives et avec des différentielles de degré -1). L'homologie obtenue en laissant varier p (respectivement q) est notée $H_n^{(p)}$ (respectivement $H_n^{(q)}$) en degré n et $H_n^{(p,q)}$ dénote l'homologie totale. Sous l'hypothèse

$$H_m^{(p)} H_n^{(q)} [K_{p,q}] = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0$$

on a un isomorphisme naturel

$$H_k^{(p)} H_0^{(q)} [K_{p,q}] \cong H_k^{(p,q)} [K_{p,q}]$$

que l'on dit dû à une évidence première de type $(p|q)$. Sous l'hypothèse

$$H_m^{(p)} H_n^{(q)} [K_{p,q}] = 0 \quad \text{si} \quad m \neq 0$$

on a un isomorphisme naturel

$$H_0^{(p)} H_k^{(q)} [K_{p,q}] = H_k^{(p,q)} [K_{p,q}]$$

que l'on dit dû à une <u>évidence seconde</u> de type $(p|q)$. La différentielle totale est la somme de la première avec le signe + et de la seconde avec le signe ±. Rappelons que l'on a sans aucune hypothèse

$$H_0^{(p)} H_0^{(q)} [K_{p,q}] \cong H_0^{(p,q)} [K_{p,q}].$$

<u>DEFINITION 5</u>. A l'ensemble simplicial X, on peut associer un nouvel ensemble simplicial $X^\#$ (l'<u>assoupli</u> de X). Les simplexes y sont définis comme suit :

$$< \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > \ \in X_n^\#$$

est un n-simplexe de $X^\#$ et consiste en une chaîne d'applications simpliciales composables

$$\Delta[i_n] \xrightarrow{\alpha_n} \Delta[i_{n-1}] \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} \Delta[i_0] \xrightarrow{\alpha_0} X.$$

On a les opérateurs de dégénérescence suivants

$$\sigma_n^i(< \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n >) = <\alpha_0, \ldots, \alpha_i, id, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n >$$

et on a les opérateurs de face suivants

$$\varepsilon_n^i(<\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n >) = < \alpha_0, \ldots, \alpha_i \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n >$$

(pour i = n, on admet que "$\alpha_n\ \alpha_{n+1}$" signifie que α_n doit être supprimé, donc on a

$$\varepsilon_n^n(< \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n >) = < \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} >$$

de manière précise).

<u>DEFINITION 6</u>. Un système simplicial F sur X donne un système simplicial sF sur $X^\#$ et un système cosimplicial cF sur $X^\#$. Pour le système simplicial, on a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} sF(<\alpha_0, \ldots, \alpha_n >) &= F(\alpha_0) \\ sF(<\alpha_0, \ldots, \alpha_n >, s_n^i) &= id \\ sF(<\alpha_0, \ldots, \alpha_n >, e_n^i) &= id \qquad i \neq 0 \\ sF(<\alpha_0, \ldots, \alpha_n >, e_n^0) &= F(\alpha_0, \alpha_1). \end{aligned}$$

Pour le système cosimplicial, on a les définitions suivantes :

$$cF(<\alpha_0,\dots,\alpha_n>) = F(\alpha_0\dots\alpha_n)$$
$$cF(<\alpha_0,\dots,\alpha_n>,s_n^i) = id$$
$$cF(<\alpha_0,\dots,\alpha_n, e_n^i) = id \qquad i \neq n$$
$$cF(<\alpha_0,\dots,\alpha_n, e_n^n) = F(\alpha_0\dots\alpha_{n-1},\alpha_n).$$

<u>LEMME 7</u>. <u>Avec un système simplicial</u> F <u>sur</u> X <u>il existe un isomorphisme naturel</u>

$$H_n(X,F) \cong H_n(X^{\#},sF).$$

<u>DEMONSTRATION</u>. On utilise le complexe double K dont le A-module $K_{p,q}$ est la somme directe des modules suivants : à l'indice

$$\Delta[p] \xrightarrow{\beta} \Delta[i_q] \xrightarrow{\alpha_q} \dots \xrightarrow{\alpha_1} \Delta[i_0] \xrightarrow{\alpha_0} X$$

correspond le A-module $F(\alpha_0)$. On a un isomorphisme d'évidence première de type $(p|q)$ en utilisant l'indice $\alpha_0,\dots,\alpha_q,\beta,id$ systématiquement

$$H_n(X,F) \cong H_n^{(p,q)}[K_{p,q}]$$

et un de type $(q|p)$ en utilisant l'acyclicité de $\Delta[i_q]$

$$H_n(X^{\#},sF) \cong H_n^{(p,q)}[K_{p,q}].$$

<u>REMARQUE 8</u>. Dualement un système cosimplicial F sur X donne un système simplicial sF sur $X^{\#}$ avec

$$sF(<\alpha_0,\dots,\alpha_n>) = F(\alpha_0\dots\alpha_n)$$

et un système cosimplicial cF sur $X^{\#}$ avec

$$cF(<\alpha_0,\dots,\alpha_n>) = F(\alpha_0).$$

Le lemme dual concerne alors la cohomologie

$$H^n(X,F) \cong H^n(X^{\#},cF).$$

<u>REMARQUE 9</u>. Si F est un système local sur X, on a donc un système simplicial $\underline{F}$ sur X, un système simplicial $s\underline{F}$ sur $X^{\#}$, un système cosimplicial $\overline{F}$ sur X, un système simplicial $s\overline{F}$ sur $X^{\#}$. Mais alors $s\underline{F}$ et $s\overline{F}$ sont isomorphes de manière naturelle, puisque les modules

$$s\underline{F}(<\alpha_0,\dots,\alpha_n>) = \underline{F}(\alpha_0)$$
$$s\overline{F}(<\alpha_0,\dots,\alpha_n>) = \underline{F}(\alpha_0\dots\alpha_n)$$

sont isomorphes de manière naturelle grâce à l'isomorphisme

$\underline{F}(\alpha_0,\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

De même $c\underline{F}$ et $c\overline{F}$ sont isomorphes de manière naturelle.

DEUX SUITES SPECTRALES. Soit Ω un ensemble bisimplicial.

DEFINITION 10. La q-ème fibre (ou mieux la q-ème grosse fibre) de Ω est l'ensemble simplicial $F_q\,\Omega$ donné par l'égalité suivante

$$(F_q\,\Omega)_p = \Omega_{p,q}.$$

La grosse fibre dépend de q de manière simpliciale.

Soit M un A-module quelconque.

REMARQUE 11. L'homologie de la grosse fibre, elle aussi, dépend de q de manière simpliciale. Autrement dit il existe pour chaque entier $p \geqslant 0$ un A-module simplicial $H_p(F\Omega,M)$ qui est égal au A-module suivant en degré q : $H_p(F_q\Omega,M)$.

PROPOSITION 12. *Avec un ensemble bisimplicial et avec un A-module M, il existe une suite spectrale du premier quadrant*

$$H_q\,[H_p(F\Omega,M)] \underset{q}{\Longrightarrow} H_n(\Omega,M).$$

DEMONSTRATION. Considérons le complexe double $K(\Omega,M)$ composé des A-modules suivants

$$K_{p,q} = \Sigma_{\omega\,\varepsilon\,\Omega_{p,q}}\; M.$$

Il lui correspond une suite spectrale du premier quadrant en laissant varier en premier lieu p et en second lieu q. Comme aboutissement de la suite spectrale on a évidemment

$$H_n^{(p,q)}[K_{p,q}] = H_n(\Omega,M).$$

Comme début de la suite spectrale on a les modules suivants

$$E^1_{q,p} = H_p(F_q\Omega,M).$$

Cela donne un complexe (avec q variable) dont l'homologie en degré q donne le terme $E^2_{q,p}$ annoncé de la suite spectrale.

Pour retrouver la situation classique de la topologie (suites spectrales de Serre-Kan) il reste à bien choisir un certain ensemble bisimplicial et à écrire chacune des grosses fibres comme une réunion disjointe de petites fibres.

Considérons une application d'ensembles simpliciaux

$$\pi : X \longrightarrow Y.$$

Il existe deux manières de lui associer un ensemble bisimplicial raisonnable. La première est due à M. André (avec la notation B ci-dessous) et la seconde est due à A. Dress (avec la notation D ci-dessous). La première a l'avantage de donner des fibres simples et a l'inconvénient de faire apparaître la base sous la forme $Y^{\#}$. La seconde a l'avantage de faire apparaître la base sous la forme Y et a l'inconvénient de donner des fibres moins simples. Mais les deux méthodes se confondent dans le cas d'une fibration au sens de Kan.

<u>DEFINITION 13</u>. Un élément de $B_{p,q}$ est un carré commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd}
\Delta[p] \arrow[rrrr, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & & & & X \arrow[d, "\pi"] \\
\Delta[j_q] \arrow[r, "\gamma_q"] & \Delta[j_{q-1}] \arrow[r, "\gamma_{q-1}"] & \cdots \arrow[r] & \Delta[j_0] \arrow[r, "\gamma_0"] & Y
\end{tikzcd}$$

<u>DEFINITION 14</u>. Un élément de $D_{p,q}$ est un carré commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd}
\Delta[p]\times\Delta[q] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\
\Delta[q] \arrow[r, "\gamma"] & Y
\end{tikzcd}$$

η étant la seconde projection du produit cartésien.

<u>REMARQUE 15</u>. A chaque simplexe de Y

$$y : \Delta[n] \longrightarrow Y$$

on associe une <u>fibre de première espèce</u>

$$F_y = \Delta[n] \times_Y X$$

et une <u>fibre de seconde espèce</u> F_y^* qui découle de l'application simpliciale cenonique

$$F_y \longrightarrow \Delta[n]$$

et qui est définie par l'égalité suivante. Un p-simplexe de F_y^* est un élément de $D_{p,n}$ avec γ égal à y.

REMARQUE 16. Avec la situation suivante

$$\Delta[m] \xrightarrow{\mu} \Delta[n] \xrightarrow{y} Y$$

on a une application d'ensembles simpliciaux

$$\varphi(y,\mu) : F_{y\mu} \longrightarrow F_y$$

et une application d'ensembles simpliciaux

$$\varphi^*(y,\mu) : F^*_y \longrightarrow F^*_{y\mu} .$$

Donc la fibre de première espèce a un caractère cosimplicial et la fibre de seconde espèce a un caractère simplicial. On peut identifier F_y et F^*_y lorsque y est un 0-simplexe.

Il s'agit maintenant de réinterpréter deux fois la proposition 12 de nature générale.

Comme la fibre F_y dépend de y de manière cosimpliciale, pour chaque entier $p \geqslant 0$ il existe donc un système cosimplicial C_p sur Y donnant lieu à l'égalité suivante

$$C_p(y) = H_p(F_y, M).$$

Par ailleurs la grosse fibre F_qB est une réunion disjointe de fibres de première espèce

$$F_qB = \coprod_{<\gamma_0,\ldots,\gamma_q> \in Y_q^{\#}} F_{\gamma_0\ldots\gamma_q} .$$

Par conséquent on a les isomorphismes suivants

$$H_p(F_qB, M) \cong \Sigma_{<\gamma_0,\ldots,\gamma_q>} H_p(F_{\gamma_0\ldots\gamma_q}, M) \cong$$

$$\Sigma_{<\gamma_0,\ldots,\gamma_q>} C_p(\gamma_0\ldots\gamma_q) \cong K_q(Y^{\#}, sC_p).$$

Mais alors on a les isomorphismes suivants en passant à l'homologie

$$H_q[H_p(FB, M)] \cong H_q[K(Y^{\#}, sC_p)] \cong H_q(Y^{\#}, sC_p).$$

Par ailleurs il existe un isomorphisme d'évidence première de type $(p|q)$ concernant le complexe double K(B,M) et apparu dans le lemme 7

$$H_n(B,M) \cong H_n(X,M).$$

On a donc le résultat suivant (concernant une <u>suite spectrale de première espèce</u> pour ainsi dire).

PROPOSITION 17. <u>Soit</u> $\pi : X \longrightarrow Y$ <u>une application simpliciale, à considé-</u>

<u>rer avec ses fibres de première espèce</u> F_y. <u>Alors il existe un ensemble bisimplicial</u> B <u>pour lequel la suite spectrale de la proposition</u> 12 <u>a la forme suivante</u>

$$H_q(Y^{\#}, sC_p) \underset{q}{\Longrightarrow} H_n(X,M)$$

<u>avec</u> $C_p(y)$ <u>égal à</u> $H_p(F_y,M)$ <u>pour le système cosimplicial</u> C_p <u>sur</u> Y.

Comme la fibre F^*_y dépend de y de manière simpliciale, pour chaque entier $p \geqslant 0$ il existe donc un système simplicial S_p sur Y donnant lieu à l'égalité suivante

$$S_p(y) = H_p(F^*_y,M).$$

Par ailleurs la grosse fibre F_qD est une réunion disjointe de fibres de seconde espèce

$$F_qD = \coprod_{\gamma \in Y_q} F^*_\gamma .$$

Par conséquent on a les isomorphismes suivants

$$H_p(F_qD,M) \cong \Sigma_\gamma H_p(F^*_\gamma,M) \cong \Sigma_\gamma S_p(\gamma) \cong K_q(Y,S_p).$$

Mais alors on a les isomorphismes suivants en passant à l'homologie

$$H_q[H_p(FD,M)] \cong H_q[K(Y,S_p)] \cong H_q(Y,S_p).$$

Par ailleurs il existe un isomorphisme d'évidence première de type $(p|q)$ concernant le complexe double K(D,M)

$$H_n(D,M) \cong H_n(X,M)$$

(la démonstration forme le deuxième paragraphe de [2]). On a donc le résultat suivant (concernant une <u>suite spectrale de seconde espèce</u> pour ainsi dire).

<u>PROPOSITION 18</u>. <u>Soit</u> $\pi : X \longrightarrow Y$ <u>une application simpliciale, à considérer avec ses fibres de seconde espèce</u> F^*_y. <u>Alors il existe un ensemble bisimplicial</u> D <u>pour lequel la suite spectrale de la proposition</u> 12 <u>a la forme suivante</u>

$$H_q(Y,S_p) \underset{q}{\Longrightarrow} H_n(X,M)$$

<u>avec</u> $S_p(y)$ <u>égal à</u> $H_p(F^*_y,M)$ <u>pour le système simplicial</u> S_p <u>sur</u> Y.

<u>COMPARAISON DES FIBRES</u>. Soit toujours $\pi : X \longrightarrow Y$ une application simpliciale quelconque. Il s'agit maintenant de comparer les deux espèces de fibres F et F* rencontrées ci-dessus.

LEMME 19. Avec la situation suivante

$$\Delta[m] \xrightarrow{\mu} \Delta[n] \xrightarrow{y} Y$$

il existe une application simpliciale canonique

$$f(y,\mu) : \Delta[m] \times F^*_y \longrightarrow F_{y\mu}.$$

DEMONSTRATION. Soit un k-simplexe de $\Delta[m]$

$$a : \Delta[k] \longrightarrow \Delta[m] \text{ (sans condition)}$$

et soit un k-simplexe de F^*_y

$$b : \Delta[k] \times \Delta[n] \longrightarrow X \text{ (avec condition).}$$

En utilisant l'application diagonale, on forme alors une application simpliciale c par composition

$$\Delta[k] \longrightarrow \Delta[k] \times \Delta[k] \longrightarrow \Delta[k] \times \Delta[m] \longrightarrow \Delta[k] \times \Delta[n] \longrightarrow X.$$

La condition sur b entraîne la commutativité du carré suivant

$$\begin{array}{ccc} \Delta[k] & \xrightarrow{c} & X \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Delta[m] & \xrightarrow{y\mu} & Y \end{array}$$

On a donc là un k-simplexe de $F_{y\mu}$.

REMARQUE 20. L'application simpliciale $f(y,\mu)$ est naturelle dans le sens suivant. D'une part il s'agit d'un isomorphisme dans le cas simple où m et n sont nuls : c'est l'isomorphisme qui permet d'identifier les fibres F^*_y et F_y dans le cas d'un 0-simplexe y. D'autre part au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[m] & \xrightarrow{\mu} & \Delta[n] & \xrightarrow{y} & Y \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \Delta[m'] & \xrightarrow{\mu'} & \Delta[n'] & \xrightarrow{y'} & Y \end{array}$$

correspond le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Delta[m] \times F^*_y & \longrightarrow & F_{y\mu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[m'] \times F^*_{y'} & \longrightarrow & F_{y'\mu'} \end{array}$$

concernant les applications simpliciales suivantes

$$f(y,\mu) \;,\; f(y',\mu') \;,\; \sigma \times \varphi^* (y,\tau) \;,\; \varphi (y'\mu',\sigma) \;.$$

Remarquer l'orientation réciproque des flèches σ et τ.

En passant à l'homologie, le lemme et la remarque donnent le résultat suivant, compte tenu de l'isomorphisme canonique

$$H_p\,(\Delta[m] \times F^*_y, M) \cong H_p(F^*_y, M).$$

PROPOSITION 21. Avec la situation suivante

$$\Delta[m] \xrightarrow{\mu} \Delta[n] \xrightarrow{y} Y$$

il existe un homomorphisme naturel

$$\rho_p(y,\mu) \;:\; S_p(y) \longrightarrow C_p(y\mu).$$

Lorsque m et n sont nuls, il s'agit d'un isomorphisme. Au carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \Delta[m] \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\sigma"] & \Delta[n] \arrow[r, "y"] & Y \arrow[d, "id"] \\ \Delta[m'] \arrow[r, "\mu'"] & \Delta[n'] \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "y'"] & Y \end{tikzcd}$$

correspond le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} S_p(y) \arrow[r, "\rho_p(y,\mu)"] \arrow[d, "S_p(y,\tau)"] & C_p(y\mu) \arrow[d, "C_p(y'\mu',\sigma)"] \\ S_p(y') \arrow[r, "\rho_p(y',\mu')"] & C_p(y'\mu'). \end{tikzcd}$$

COROLLAIRE 22. Lorsque π : X $\longrightarrow$ Y est une fibration au sens de Kan, alors il existe un système local sur Y dont S_p est l'aspect simplicial et dont C_p est l'aspect cosimplicial.

DEMONSTRATION. Lorsque π est un fibré, alors les fibres de première espèce ont toutes la même homologie et $C_p(y,\tau)$ est toujours un isomorphisme et les fibres de seconde espèce ont toutes la même homologie et $S_p(y,\tau)$ est toujours un isomorphisme. Il suffit de contrôler que $\rho_p(y,\mu)$ est toujours un isomorphisme pour être certains que S_p et C_p sont les deux aspects d'un même système local. Grâce à la naturalité, on se ramène au cas où m et n sont nuls et dans ce cas l'isomorphisme est donné de manière explicite. Plus précisément avec la situation suivante

$$\Delta[m] \xrightarrow{\mu} \Delta[n] \xrightarrow{y} Y$$

on fixe un 0-simplexe de $\Delta[m]$

$$\beta : \Delta[0] \longrightarrow \Delta[m].$$

On considère alors un premier diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[0] & \xrightarrow{\mu\beta} & \Delta[n] & \xrightarrow{y} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \Delta[m] & \xrightarrow{\mu} & \Delta[n] & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

qui démontre que $\rho_p(y,\mu)$ est un isomorphisme si $\rho_p(y,\mu\beta)$ en est un, puisque l'on a deux isomorphismes

$$S_p(y,id) \text{ et } C_p(y\mu,\beta).$$

On considère ensuite un second diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[0] & \xrightarrow{\mu\beta} & \Delta[n] & \xrightarrow{y} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle \mu\beta} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \Delta[0] & \xrightarrow{id} & \Delta[0] & \xrightarrow{y\mu\beta} & Y \end{array}$$

qui démontre que $\rho_p(y,\mu\beta)$ est un isomorphisme puisque l'on a trois isomorphismes

$$\rho_p(y\mu\beta,id),\ S_p(y,\mu\beta),\ C_p(y\mu\beta,id).$$

La proposition précédente démontre donc le corollaire.

Lorsque π est une fibration au sens de Kan, les suites spectrales des propositions 17 et 18 commencent de la même manière. En effet le corollaire 22, la remarque 9 et le lemme 7 donnent les isomorphismes suivants

$$H_q(Y^{\#},sC_p) \cong H_q(Y^{\#},sS_p) \cong H_q(Y,S_p).$$

Il reste à démontrer qu'en fait les deux suites spectrales sont isomorphes. Sans hypothèse sur π, on a seulement une application de la suite spectrale de la proposition 18 dans la suite spectrale de la proposition 17. Essayons de donner une démonstration compacte du théorème d'isomorphisme du cas fibré (isomorphisme des suites spectrales à partir des termes E^2). Pour cela faisons avec les ensembles trisimpliciaux ce qui a été fait ci-dessus avec les ensembles bisimpliciaux.

REMARQUE 23. Soit Ω un ensemble trisimplicial. La grosse fibre de bidegré (r,s) de Ω est l'ensemble simplicial $F_{r,s}\Omega$ donné par l'égalité suivante

$$(F_{r,s}\Omega)_p = \Omega_{p,r,s}.$$

Cette grosse fibre dépend de son bidegré de manière bisimpliciale. Passons à l'homologie. Pour chaque entier $p \geqslant 0$, il existe un A-module bisimplicial

$$H_p(F\Omega,M)$$

qui est égal au A-module suivant en bidegré (r,s)

$$H_p(F_{r,s}\Omega,M).$$

On considère aussi le complexe triple associé $K(\Omega,M)$ et la suite spectrale correspondante du type indiqué ci-dessous

$$H_j^{(r,s)}\ H_i^{(p)} \Longrightarrow H_n^{(p,r,s)}.$$

On a donc à nouveau une suite spectrale

$$H_q\ [H_p(F\Omega,M)] \Longrightarrow H_n(\Omega,M)$$

où H_q est de l'homologie totale (concernant les deux dernières graduations : $q = r+s$).

DEFINITION 24. Voici l'ensemble trisimplicial qui est utilisé dans la démonstration du théorème d'isomorphisme des suites spectrales. Un élément de $C_{p,r,s}$ est un diagramme commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd} & \Delta[p] \arrow[d, "\beta"', "\delta"] & & \Delta[p]\times\Delta[j_0] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\eta"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \Delta[r] \arrow[r] & \Delta[j_s] \arrow[r, "\alpha_s"] & \cdots \arrow[r, "\alpha_1"] & \Delta[j_0] \arrow[r, "\alpha_0"] & Y. \end{tikzcd}$$

La grosse fibre de bidegré (r,s) est une réunion disjointe de petites fibres. A chaque bisimplexe

$$\langle\alpha_0,\ldots,\alpha_s|\beta\rangle$$

correspond la petite fibre qui est l'ensemble simplicial suivant

$$\Delta[j_s]\times F^*_{\alpha_0}.$$

En degré p, son homologie est le module suivant

$$H_p(\Delta[j_s]\times F^*_{\alpha_0},M) \cong H_p(F^*_{\alpha_0},M)$$

c'est-à-dire $S_p(\alpha_0)$.

REMARQUE 25. Il existe un homomorphisme naturel

$$\nu\ :\ K(C,M) \longrightarrow K(B,M)$$

dont voici la définition en bref. Au trisimplexe de la définition 24 correspond l'élément nul si r n'est pas nul et si r est nul le bisimplexe

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta[p] & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad c \qquad\qquad\qquad} & & & & & X \\ \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \Delta[j_s] & \xrightarrow{\alpha_s} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_1} & \Delta[j_0] & \xrightarrow{\alpha_0} & Y \end{array}$$

avec l'application simpliciale c construite selon la démonstration du lemme 19, à partir des données suivantes

$$y = \alpha_0 \ , \quad \mu = \alpha_1 \ldots \alpha_s \quad , \quad a = \delta \quad , \quad b = \gamma .$$

<u>REMARQUE 26</u>. Il existe un homomorphisme naturel

$$w : K(C,M) \longrightarrow K(D,M)$$

dont voici la définition en bref. Au trisimplexe de la définition 24 correspond l'élément nul si s n'est pas nul et si s est nul le bisimplexe

$$\begin{array}{ccc} \Delta[p]\times \Delta[r] & \xrightarrow{\gamma(id \times \beta)} & X \\ \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \Delta[r] & \xrightarrow{\alpha_0\beta} & Y. \end{array}$$

Cette définition n'utilise que la naturalité de la fibre de seconde espèce.

<u>THEOREME 27</u>. <u>Pour une fibration</u> π <u>au sens de Kan, les suites spectrales des propositions</u> 17 <u>et</u> 18 <u>sont isomorphes de manière naturelle</u>.

<u>DEMONSTRATION</u>. Grâce aux homomorphismes v et w définis dans les remarques 25 et 26, on a la situation suivante

suite spectrale de première espèce due à B
suite spectrale auxiliaire due à C
suite spectrale de seconde espèce due à D.

Pour démontrer qu'il s'agit de deux isomorphismes, il suffit de démontrer que c'est bien le cas au niveau des termes E^2. Les arguments à utiliser sont déjà apparus précédemment. En voici un résumé.

Commençons par $E^2(v)$. Le calcul du terme E^1 de la suite spectrale auxiliaire fait considérer l'indice suivant

$$\Delta[r] \xrightarrow{\beta} \Delta[j_s] \xrightarrow{\alpha_s} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} \Delta[j_0] \xrightarrow{\alpha_0} Y$$

avec l'homologie en degré p de l'ensemble simplicial

$$\Delta[j_s] \times F^*_{\alpha_0}$$

autrement dit avec l'homologie en degré p de l'ensemble simplicial

$$F_{\alpha_0 \ldots \alpha_s}$$

selon le corollaire 22. Mais alors l'homomorphisme $E^1(v)$ est obtenu par la simple suppression de β. Cette suppression conduit à un isomorphisme en homologie par une évidence première de type $(s|r)$, le degré p étant fixé, évidence première due à l'acyclicité de $\Delta[j_s]$. L'homomorphisme $E^2(v)$ est donc un isomorphisme pour chaque bidegré.

Terminons par $E^2(w)$. Le calcul du terme E^1 de la suite spectrale auxiliaire fait considérer l'indice suivant

$$\Delta[r] \xrightarrow{\beta} \Delta[j_s] \xrightarrow{\alpha_s} \ldots \xrightarrow{\alpha_1} \Delta[j_0] \xrightarrow{\alpha_0} Y$$

avec l'homologie en degré p de l'ensemble simplicial

$$\Delta[j_s] \times F^*_{\alpha_0}$$

autrement dit avec l'homologie en degré p de l'ensemble simplicial

$$F^*_{\alpha_0}$$

évidemment. Mais alors l'homomorphisme $E^1(w)$ est obtenu par la simple composition de $\alpha_0,\ldots,\alpha_s,\beta$. Cette composition conduit à un isomorphisme en homologie par une évidence première de type $(r|s)$, le degré p étant fixé, évidence première déjà apparue dans la démonstration du lemme 7 et due à la bonne utilisation de l'indice

$$\alpha_0,\ldots,\alpha_s,\beta,\mathrm{id}.$$

L'homomorphisme $E^2(w)$ est donc un isomorphisme pour chaque bidegré.

[1] M. André
Limites et fibrés
C.R. Acad. Sci. Paris 260, 756-759 (1965).

[2] A. Dress
Zur Spectralsequenz von Faserungen
Inventiones Mathematicae 3, 172-178 (1967).

Michel André
Département de Mathématiques - Ecole Polytechnique Fédérale
1015 Lausanne

(Received February 3, 1982;
in revised form November 3, 1982)