Werk

Titel: Propriétés analytiques du spèctre dans les algèbres de Jordan-Banach.

Autor: Aupetit, Bernard; Zraibi, A.

Jahr: 1982

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0038|log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

manuscripta math. 38, 381 - 386 (1982)

manuscripta mathematica
© Springer-Verlag 1982

PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DU SPECTRE DANS LES ALGÈBRES DE JORDAN-BANACH

Bernard AUPETIT et Abdelwahab ZRAÏBI

If $\lambda \to f(\lambda)$ is an analytic function from a domain D of the complex plane into a Jordan-Banach algebra we prove that $\lambda \to \mathrm{Sp}\, f(\lambda)$ is an analytic multivalued function. From this derives the subharmonicity of $\lambda \to \mathrm{Log}\, \rho(f(\lambda))$, where ρ denotes the spectral radius. We apply these results to prove that a Jordan-Banach algebra A is associative if and only if the spectral radius is subadditive and submultiplicative on A and to prove that $A/\mathrm{Rad}\, A$ is isomorphic to the complex plane if and only if each element of A has only one point in its spectrum.

Soit $\lambda \to f(\lambda)$ une fonction analytique définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans une algèbre de Jordan-Banach. En suivant l'idée de [2], nous montrons, dans ce cas, que la fonction $\lambda \to \mathrm{Sp}\, f(\lambda)$ est analytique multiforme (voir [2,3] pour la définition). De cela résulte un bon nombre de résultats, comme ceux obtenus dans [1,3]. En particulier on obtient que $\lambda \to \mathrm{Log}\, \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique sur D, où ρ dénote le rayon spectral. De ce résultat le premier auteur a pu démontrer très simplement l'équivalence des normes complètes dans les algèbres de Jordan-Banach semi-simples (voir [4]). Nous donnons quelques applications à la caractérisation des algèbres de Jordan-Banach associatives et à la caractérisation du corps des nombres complexes.

Rappelons qu'une algèbre de Jordan-Banach complexe A est une algèbre de Jordan complexe munie d'une norme $\|\ \|$ telle que A est un espace de Banach pour cette norme et telle que $\|a.b\| \leq \|a\| . \|b\|$ quels que soient a et b dans

---

Le travail du permier auteur a été subventionné par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (subvention A 7668)

0025-2611/82/0038/0381/$01.20

A . En adjoignant une identité à une algèbre de Jordan-Banach A il est toujours possible de supposer qu'une telle algèbre a une unité 1 qui satisfait $||1|| = 1$. Rappelons aussi que C(a) , la sous-algèbre fermée engendrée par 1 et un élément quelconque a de A , est toujours associative, donc une algèbre de Banach classique. Si $a \in A$ on dit que a est inversible s'il existe $b \in A$ tel que $a.b = 1$ et $a^2.b = a$. Cet élément b est unique et on l'appelle l'inverse de a , noté a^{-1} . On définit l'opérateur quadratique $U_a(x) = 2\,a.(a.x)-a^2.x$. Alors a est inversible si et seulement si U_a est inversible dans $\mathcal{L}(A)$ ou si et seulement si 1 est dans l'image de U_a (voir [5], théorème 1.13). De plus on a $(U_a)^{-1} = U_{a^{-1}}$ quel que soit $a \in A$. On définit le spectre de $x \in A$ comme étant l'ensemble des λ de $\mathbb{C}$ tels que $x-\lambda 1$ est non inversible. Comme dans le cas associatif le spectre est un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{C}$, de plus le rayon spectral $\rho(x)$ est donné par $\lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}$. Dans une algèbre de Jordan A on dit qu'un idéal I est quasi-inversible si pour tout $a \in I$ on a 1-a inversible. K. McCrimmon a démontré que dans toute algèbre de Jordan il existe un idéal quasi-inversible unique qui contient tout idéal quasi-inversible. Par définition cet idéal est le radical de McCrimmon de A , on le notera Rad A . De cette définition on voit que le radical de McCrimmon de A/Rad A est zéro, donc que A/Rad A est semi-simple. Pour plus de détails sur toutes ces questions voir [5, 6] .

LEMME 1. *Soit* A *une algèbre de Jordan-Banach complexe. Supposons que* (x_n) *est une suite d'éléments inversibles de* A *qui converge vers* $x \in A$ *et telle que* $\sup_n ||x_n^{-1}|| < +\infty$. *Alors* x *est inversible et* (x_n^{-1}) *converge vers* x^{-1} .

Démonstration. L'application $x \to U_x$ étant continue on a (U_{x_n}) qui converge vers (U_x) dans $\mathcal{L}(A)$. De plus $||U_a|| \leq 3||a||^2$ quel que soit $a \in A$. Donc $||U_{x_n^{-1}}|| = ||(U_{x_n})^{-1}|| \leq 3||x_n^{-1}||^2$ et donc $\sup_n ||(U_{x_n})^{-1}|| < +\infty$. D'après [8], théorème 1.4.21, U_x est inversible, alors x est inversible, d'où (x_n^{-1}) converge x^{-1} . ∎

THÉORÈME 1. *Soit* $\lambda \to f(\lambda)$ *une fonction analytique définie sur un ouvert* D *de* $\mathbb{C}$ *à valeurs dans une algèbre de Jordan-Banach* A . *Alors* $\lambda \to \mathrm{Sp}\, f(\lambda)$ *est une fonction analytique multiforme.*

Démonstration. Soit $\Omega = \{(\lambda,z) : f(\lambda)-z$ inversible $\} \subset \mathbb{C}^2$. Si on pose

$$h(\lambda,z) = \| f(\lambda)-z)^{-1} \| - \mathrm{Log}\ \mathrm{dist}(\lambda, \partial D)$$

cette fonction est plurisous-harmonique sur Ω . En reprenant l'argument de [2] il résulte que $h(\lambda,z)$ tend vers $+\infty$ quand (λ,z) tend vers le bord de Ω . Car s'il existe une suite (λ_n,z_n) convergeant vers $(\lambda_0,z_0) \in \partial\Omega$ avec $\sup_n h(\lambda_n,z_n) < +\infty$, on a $\lambda_0 \in D$ et $\sup_n \| (f(\lambda_n)-z_n)^{-1} \| < +\infty$. Donc d'après le lemme 1 on a $f(\lambda_0)-z_0$ inversible, ce qui est absurde puisque $\lambda_0 \in D$ et $(\lambda_0,z_0) \in \partial\Omega$. ∎

En appliquant le théorème de H. Yamaguchi (voir [3], théorème 3.7) on obtient:

COROLLAIRE 1. *Avec les hypothèses du théorème 1, les fonctions* $\lambda \to \mathrm{Log}\, \rho(f(\lambda))$, $\lambda \to \mathrm{Log}\, \delta_n(f(\lambda))$ *et* $\lambda \to \mathrm{Log}\, \mathrm{cap}(f(\lambda))$ *sont sous-harmoniques sur* D , *où* ρ *est le rayon spectral,* δ_n *le n-ième diamètre spectral et cap la capacité du spectre.*

LEMME 2. *Soit* A *une algèbre de Jordan-Banach complexe. Si* $x \in A$ *alors* $\mathrm{Sp}\, x = \mathrm{Sp}\, \bar{x}$, *où* $\bar{x}$ *dénote la classe de* x *dans l'algèbre de Jordan-Banach* $A/\mathrm{Rad}\, A$. *En particulier* $\rho(x) = \rho(\bar{x})$.

Démonstration. A cause du morphisme $A \to A/\mathrm{Rad}\, A$ on a l'inclusion $\mathrm{Sp}\, \bar{x} \subset \mathrm{Sp}\, x$. Réciproquement si $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, \bar{a}$ alors $\bar{a} - \lambda$ est inversible dans $A/\mathrm{Rad}\, A$. Donc il existe $b \in A$ tel que $U_{\bar{a}-\lambda}(\bar{b}) = \bar{1}$. D'où on a $U_{a-\lambda}(b) - 1 \in \mathrm{Rad}\, A$. Donc $U_{a-\lambda}(b) - 1$ est quasi-inversible, d'où $U_{a-\lambda}(b)$ inversible , ce qui implique que $a-\lambda$ est inversible. ∎

On dira que ρ est sous-additif (resp. sous-multiplicatif) s'il existe $\alpha > 0$

tel que $\rho(x+y) \leq \alpha(\rho(x)+\rho(y))$ (resp. $\rho(xy) \leq \alpha\rho(x).\rho(y)$) , quels que soient x,y dans A . Ces deux conditions sont vérifiées si l'on a $\rho(x) \geq C\,\|x\|$, quel que soit $x \in A$.

THÉORÈME 2. *Soit* A *une algèbre de Jordan-Banach complexe telle que* ρ *soit sous-additif (ou uniformément continu). Alors* $\rho(Dx) = 0$ *pour tout* x *de* A *et toute dérivation continue* D *de* A *dans lui-même.*

Démonstration. Comme D est une dérivation continue de A alors $e^{\lambda D}$ est un automorphisme continu de A , quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$. D'où $\rho(e^{\lambda D}(x)) = \rho(x)$ quels que soient $x \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $e^{\lambda D}(x)-x = \lambda\, Dx + \frac{\lambda^2}{2!} D^2x + \ldots$

Donc $$\rho(e^{\lambda D}(x)-x) = |\lambda|\rho(Dx+ \tfrac{\lambda}{2!} D^2x + \ldots) .$$

Si ρ est sous-additive alors

$$\rho(Dx + \tfrac{\lambda}{2!} D^2x +\ldots) \leq \alpha[\rho e^{\lambda D}(x))+\rho(x)]/|\lambda| = 2\,\alpha\,\rho(x)/|\lambda| ,$$

quel que soit $\lambda \neq 0$. Mais $\lambda \to \rho(Dx+ \frac{\lambda}{2!} D^2x +\ldots)$ est une fonction sous-harmonique qui tend vers zéro à l'infini, donc identiquement nulle. Ainsi $\rho(Dx) = 0$, quel que soit $x \in A$. Si $|\rho(x)-\rho(y)| \leq M\|x-y\|$, quels que soient x , $y \in A$, alors $\rho(Dx + \frac{\lambda}{2!} D^2 +\ldots) \leq (\rho(x) +M\|x\|)/|\lambda|$ et on termine de la même façon. ∎

THÉORÈME 3. *Soit* A *une algèbre de Jordan-Banach complexe. Alors* $A/\mathrm{Rad}\,A$ *est associative (donc une algèbre de Banach commutative) si et seulement si* ρ *est sous-additif et sous-multiplicatif sur* A .

Démonstration. Si $A/\mathrm{Rad}\,A$ est associative alors, d'après le lemme 3 et [8], théorème 1.4.1, ρ est sous-additif et sous-multiplicatif avec $\alpha = 1$. Réciproquement si ρ est sous-additif, d'après le théorème 2, on a $\rho(Dx) = 0$ pour toute dérivation continue D et tout $x \in A$. Comme en plus ρ est sous-multiplicatif alors $Dx \in \mathrm{Rad}\,A$ quel que soit $x \in A$. Si on prend $D = R_zR_y-R_yR_z$, où $R_a(x) = a.x$ on vérifie que D est une dérivation continue, donc $(x.y).z-(x.z).y \in \mathrm{Rad}\,A$, ce qui est l'associativité modulo le radical. ∎

En utilisant la théorie de la représentation, on peut montrer assez facilement que si dans une algèbre de Banach A on a le spectre de tout élément réduit à un seul point alors $A/\mathrm{Rad}\,A$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Le même résultat est aussi vrai si on suppose seulement que $\rho(x).\rho(x^{-1}) = 1$ sur un ouvert d'éléments inversibles de A (voir [1], p. 73). Nous allons généraliser ce résultat dans le cas des algèbres de Jordan-Banach en donnant une démonstration nouvelle.

THÉORÈME 4. *Soit* A *une algèbre de Jordan-Banach complexe. Supposons que le spectre de* x *soit réduit à un seul point, quel que soit* x *dans un ouvert non vide de* A. *Alors* $A/\mathrm{Rad}\,A$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}$ *ou* $A = \mathrm{Rad}\,A$.

Démonstration. Soit U l'ouvert non vide où le spectre est réduit à un seul point. Fixons $a \in U$, alors quel que soit $x \in A$ on a $a+\lambda(x-a) \in U$ pour $|\lambda|<r$, avec r assez petit. Si δ désigne le diamètre du spectre, d'après le corollaire 1, $\lambda \to \mathrm{Log}\,\delta\,(a+\lambda(x-a))$ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et vaut $-\infty$ sur le disque $D(0,r)$ qui est de capacité non nulle. Donc $\mathrm{Log}\,\delta\,(a+\lambda(x-a)) \equiv -\infty$, c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}\,x$ est réduit à un seul point quel que soit $x \in A$. Notons $\mathrm{Sp}\,x = \{\chi(x)\}$ et montrons que χ est un caractère de A. Montrons d'abord que $\chi(x+y) = \chi(x)+\chi(y)$. D'après le théorème 1, la fonction $\lambda \to \{\chi(x+\lambda y)\}$ est analytique multiforme sur $\mathbb{C}$, avec ses ensembles de valeurs réduits à un seul point. D'après un théorème de F. Hartogs, la fonction $\lambda \to \chi(x+\lambda y)$ est entière (voir [7], chapitre 4). De plus

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\chi(x+\lambda y)}{\lambda} = \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \mathrm{Sp}\left(\frac{x}{\lambda}+y\right) \subset \mathrm{Sp}\,y\,,$$

d'après la semi-continuité supérieure du spectre. Comme $\mathrm{Sp}\,y$ a un seul point on a

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\chi(x+\lambda y)}{\lambda} = \chi(y)\,. \tag{1}$$

D'après le théorème de Liouville on a $\chi(x+\lambda y) = \alpha\lambda+\beta$ où $\beta = \chi(x)$ et $\alpha = \chi(y)$ d'après (1). D'où en prenant $\lambda = 1$ on obtient $\chi(x+y) = \chi(x)+\chi(y)$. Comme

$\mathrm{Sp}\, x^2 = (\mathrm{Sp}\, x)^2$ on a $\chi(x^2) = \chi(x)^2$. Donc $\chi[(a+b)^2-(a-b)^2] = 2\,\chi(ab) = [\chi(a)+\chi(b)]^2 - [\chi(a)-\chi(b)]^2 = 2\,\chi(a)\chi(b)$. Si $\chi(x) = 0$ quel que soit $x \in A$, alors $A = \mathrm{Rad}\, A$. Supposons donc $\chi \neq 0$. Alors $\chi(A) = \mathbb{C}$. Comme χ est un caractère son noyau est un idéal d'éléments quasi-inversibles, donc contenu dans le radical de A . Ainsi $A/\mathrm{Rad}\, A$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. ∎

Remarques. Si $\rho(x).\rho(x^{-1}) = 1$ sur un ouvert d'éléments inversibles alors $\mathrm{Sp}\, x$ a un seul point sur cet ouvert, donc $A/\mathrm{Rad}\, A$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. On en déduit que si $\|x\|\,\|x^{-1}\| = 1$ sur cet ouvert alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$, mais ce dernier résultat peut être obtenu directement en utilisant le fait que $C(x)$ est une algèbre de Banach ayant la même propriété et le corollaire 3.2.5 de [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. AUPETIT, B.: *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*. Lecture Notes in Mathematics n° 735, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979
2. AUPETIT, B.: Some applications of analytic multivalued functions to Banach algebras. *Proc. Roy. Irish Acad.* 81 A, 37-42 (1981)
3. AUPETIT, B.: Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras. *Advances Math.*, sous presse
4. AUPETIT, B.: The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach-Jordan algebras. *J. Functional Anal.*, sous presse
5. JACOBSON, N.: *Structure and representations of Jordan algebras*. American Mathematical Society, Providence, 1968
6. MARTÍNEZ MORENO, J.: *Sobre algebras de Jordan normadas completas*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Secretariado de Publicationes, Granada, 1977
7. NARASIMHAN, R.: *Several complex variables*. University of Chicago Press, Chicago, 1971
8. RICKART, C.E.: *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, New York, 1960

Département de mathématiques
Université Laval
Québec, G1K 7P4
Canada

(Reçu les avril 12, 1982)