manuscripta math. 38, 375 - 379 (1982)

manuscripta mathematica

σ-KOMPAKTE RÄUME

Norbert Brunner

The theorem, that σ-compact spaces are Lindelöf, is equivalent to the countable axiom of choice. Variants of this theorem are compared with weak versions of the axiom of choice.

1. Schwache Lindelöf Räume

Ein Raum ist σ-kompakt, wenn er von einer abzählbaren Folge kompakter Mengen überdeckt wird. Wie Alexandroff und Urysohn bewiesen haben, impliziert das abzählbare Auswahlaxiom (= AC^{ω}, $\omega = \{0 , 1 , \ldots\}$):

(1.1.) Jeder σ-kompakte Raum ist Lindelöf.

AC ist für den Beweis wesentlich, was Jech [4] als erster bemerkt hatte.

(1.2.) Im Cohen-Halpern-Levy-Modell ist $\mathbb{R}$ nicht Lindelöf. $\mathbb{R}$ ist jedoch schwach Lindelöf.

1.1. DEFINITION. *Ein Raum ist schwach Lindelöf, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Verfeinerung hat.*

Unmittelbare Konsequenzen von 1.1. sind.

(1.3.) Lindelöf Räume sind schwach Lindelöf.

(1.4.) Räume mit einer abzählbaren Basis sind schwach Lindelöf.

Wegen (1.2.) müssen schwache Lindelöf Räume nicht Lindelöf sein, und es stellt sich das Problem, ob (1.5.) vom Auswahlaxiom abhängt.

(1.5.) Jeder σ-kompakte Raum ist schwach Lindelöf.

Im Abschnitt 2 untersuchen wir Varianten von (1.5.), im 3. Abschnitt (1.1.) für Räume ohne isolierte Punkte. Der Verfasser möchte dem Referee für einige Verbesserungsvorschläge danken.

0025-2611/82/0038/0375/$01.00

2. Äquivalenz zum abzählbaren Auswahlaxiom

Wir arbeiten im folgenden in ZF^o, der Zermelo Fraenkel'schen Mengentheorie ohne Fundierungsaxiom oder Auswahlaxiom (abgekürzt: AC). AC^{ω}_{fin} ist das Auswahlaxiom für abzählbare Familien endlicher Mengen.

2.1. LEMMA. AC^{ω}_{fin} ist in ZF^o äquivalent zu: σ-kompakte, parakompakte T_2 Räume sind schwach Lindelöf.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei X parakompakt und T_2 und $(K_n)_{n\in\omega}$ eine Folge kompakter Mengen mit $X = \cup\{K_n : n\in\omega\}$. O sei eine offene Überdeckung von X und P eine lokal-endliche Verfeinerung von O durch offene Mengen. Wir zeigen, daß P abzählbar ist. Dazu genügt es zu bemerken (wegen AC^{ω}_{fin}), daß $P_n = \{V\in P : V\cap K_n \neq \emptyset\}$ endlich ist. Q sei die Menge der offenen Mengen, die nur endlich viele Elemente von P treffen. Weil P lokal-endlich ist, überdeckt Q K_n und weil K_n kompakt ist, gibt es eine endliche Teilfamilie Q' von Q, die K_n überdeckt. $\{V\in P : V\cap\cup Q' \neq \emptyset\}$ ist endlich und enthält P_n.

"$\Leftarrow$": Sei $(F_n)_{n\in\omega}$ eine Folge nicht leerer, endlicher Mengen. Wir konstruieren eine Auswahlfunktion. $X=\cup\{F_n : n\in\omega\}$ mit der diskreten Topologie ist selbstverständlich para-kompakt, T_2 und σ-kompakt. Ist O die offene Überdeckung von X durch Singletons $\{x\}$, $x\in X$, und P eine abzählbare Verfeinerung, so ist O=P und $X=\cup P$ ist abzählbar. Eine Auswahlfunktion definiert man mit einer Abzählung von X. QUED

2.2. SATZ. In ZF^o ist AC^{ω} äquivalent zu: Jeder σ-kompakte, lokal-kompakte T_2 Raum ist schwach Lindelöf.

Beweis: Wegen 2.1. gilt AC^{ω}_{fin} (diskrete Räume sind lokalkompakt). Es genügt, folgendes abzählbare multiple Auswahlaxiom MC^{ω} zu beweisen: Ist $(F_n)_{n\in\omega}$ eine Folge nicht-leerer Mengen, so gibt es eine Folge $(E_n)_{n\in\omega}$ nicht-leerer endlicher Mengen mit $E_n \subseteq F_n$. In der Definition von MC^{ω} kann man voraussetzen, daß alle F_n paarweise disjunkt und unendlich sind.

$F_n^+ = F_n \cup \{p_n\}$, $p_n = F_n$, ist die Alexandroff'sche Einpunktkompaktifizierung der diskreten Topologie auf F_n. $X = \cup\{F_n^+ : n\in\omega\}$ ist die topologische Summe. X ist σ-kompakt, T_2 und lokal-kompakt. $O = \{F_n^+ \setminus \{p\} : p\in F_n,\ n\in\omega\}$ ist eine offene Überdeckung von X und P sei eine abzählbare Verfeinerung; $P = \{V_n : n\in\omega\}$. $k(n)$ sei die kleinste Zahl $k\in\omega$ mit $p_n \in V_k$. Wir setzen $E_n = F_n \setminus V_{k(n)}$. Weil $V_{k(n)}$ offen ist und $p_n \in V_{k(n)}$, ist E_n endlich. Weil P eine Verfeinerung von O ist, gibt es m und $p\in F_m$ mit $p_n \in V_{k(n)} \subseteq F_m^+ \setminus \{p\}$. Daraus folgt n=m und $p\in E_n$. $(E_n)_{n\in\omega}$ ist die gesuchte MC^ω Funktion.

QUED

AC_ω^ω ist das Auswahlaxiom für abzählbare Familien höchstens abzählbarer, nicht-leerer Mengen. Sind alle Mengen F_n von 2.2. abzählbar, so folgt 2.3.2.

2.3. KOROLLAR. *In* ZF^0 *gilt:*

(1) AC^ω *ist äquivalent zu (1.1.).*

(2) Sind σ*-kompakte, lokal-kompakte Räume mit abzählbaren Umgebungsbasen Lindelöf, so gilt* A_ω^ω.

Die Umkehrung von 2.3.2. gilt nicht, da das Cohen Modell nach Mathias das Auswahlaxiom für Familien wohlordenbarer Mengen erfüllt, aber $\mathbb{R}$ nach (1.2.) nicht Lindelöf ist (vgl. [3]). Andererseits sind nach [2] im Fraenkel-Halpern-Modell, wo AC^ω und das Auswahlaxiom AC_{fin} für Familien endlicher Mengen falsch sind, σ-kompakte T_2 Räume mit abzählbaren Umgebungsbasen wohlordenbar und daher Lindelöf. Man kann daher 2.3.2. nicht verbessern.

3. Räume ohne isolierte Punkte

(1.1.) kann man abschwächen, indem man die Voraussetzungen an den σ-kompakten Raum verschärft. Analysiert man die Beweise vom vorigen Abschnitt, wo es genügte, (1.1.) für Räume vorauszusetzen, die eine Vereinigung zweier diskreter Teilmengen waren, so gewinnt das Problem Interesse, die Klasse der Räume ohne isolierte Punkte zu untersuchen.

3.1. SATZ. In ZF^{o} wird AC^{ω}_{fin} impliziert von: Jede σ-kompakte, ultrametrische abelsche Gruppe ohne isolierte Punkte ist Lindelöf.

Beweis: Verzichtet man auf die Voraussetzung, daß die Gruppe nicht diskret ist, folgt AC^{ω}_{fin} analog wie in 2.1. durch die Konstruktion einer diskreten Gruppe. Eine Metrik d ist eine Ultrametrik, wenn $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$. Aus dieser Ungleichung folgt die Dreiecksgleichung. Wie in [1] bewiesen wurde, ist AC^{ω}_{fin} zum partiellen Auswahlaxiom PAC^{ω}_{fin} äquivalent, welches aussagt: Ist $(F_n)_{n\in\omega}$ eine Folge disjunkter endlicher Mengen, dann ist $F = \cup\{F_n : n\in\omega\}$ Dedekind-unendlich.

Auf $X = [F]^{<\omega}$, dem System der endlichen Teilmengen von F, definieren wir eine Baire-Metrik: $d(x,x)=0$ und $d(x,y) = \frac{1}{n+1}$, wenn $(x\Delta y)\cap F_n \neq \emptyset$ und $(x\Delta y)\cap F_m = \emptyset$ für alle $m\in n$, wobei Δ die symmetrische Differenz ist. Wie man leicht verifiziert gilt: d ist eine Ultrametrik ohne isolierte Punkte, (X,Δ) ist eine abel'sche Gruppe mit $x^{-1}=x$, $d(x\Delta y, x'\Delta y') \leq \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$ und $d(z\Delta x, z\Delta y) = d(x,y)$. Da $X = \cup\{P(\cup\{F_m : m\in n\}) : n\in\omega\}$ σ-finit ist, ist 3.1. bewiesen, sobald wir zeigen: Ist X Lindelöf, dann ist F D-unendlich.

Dazu definieren wir für $a\in F$ $O(a) = \{x\in X : a\notin x\}$. Jeder $x\in X$ liegt in einem $O(a)$ und ist $a\neq b$, so ist $O(a)\neq O(b)$. $O(a)$ ist offen. Ist nämlich $x\in O(a)$ und $a\in F_n$, so impliziert $d(x,y) < \frac{1}{n+1}$ $y\in O(a)$. Denn wegen $d(x,y) < \frac{1}{n+1}$ ist $(x\Delta y)\cap F_n = \emptyset$ und wegen $a\notin x\cap F_n$ auch $a\notin y\cap F_n$. Wegen Lindelöf gibt es eine abzählbare Familie $A \subseteq F$ mit $X = \cup\{O(a) : a\in A\}$. A ist unendlich. Andernfalls wäre $A\in X$ in einem $O(a)$, $a\in A$, eine Unmöglichkeit. QUED

3.2. SATZ. Wenn jeder σ-kompakte, reguläre Raum ohne isolierte Punkte Lindelöf ist, folgt in ZF^{o}: Jede unendliche Menge hat eine unendliche, abzählbare Teilmenge.

Beweis: Wie allgemein bekannt ist, folgt AC^{ω}_{fin} aus der Conclusio von 3.2. Sei A eine unendliche Menge, $X = [A]^{<\omega}$.

Die Intervalle $[E,F^c] = \{x\in X : E \subseteq x \subseteq F^c\}$, $F^c = A\setminus F$, $E\cap F=\emptyset$, sind eine Basis für die Topologie. X ist T_2 und nulldimensional und daher regulär ([5]) und X hat keine isolierten Punkte. Wenn X Lindelöf ist, hat die offene Überdeckung $\{[\emptyset, \{a\}^c]: a\in A\}$ eine unendliche, abzählbare Teilüberdeckung und A daher eine unendliche, abzählbare Teilmenge (vgl. 3.1.). Es genügt daher zu zeigen, daß X σ-kompakt ist.

Wir zeigen mit Induktion, daß $X_n = [A]^{\leq n}$, die Menge der höchstens n-elementigen Teilmengen von A, in der Spurtopologie kompakt ist. Für n=0, $X_0 = \{\emptyset\}$, ist das trivial. Sei X_n kompakt und O eine offene Überdeckung von X_{n+1}. $Q \subseteq O$ sei eine endliche Überdeckung von X_n, $V = \cup Q$. Wegen $\emptyset \in V$ gibt es eine endliche Menge $F \subseteq A$ mit $X_{n+1}\cap[\emptyset, F^c] \subseteq V$ (V ist offen in X_{n+1}). Jedes $x\in X_{n+1}\setminus V$ enthält somit Elemente von F. Die Abbildung $f_a(x) = x\cup\{a\}$, $a\in A$, ist stetig, weil das Urbild von $[f_a(x), E^c] \neq \emptyset$ das Intervall $[x,E^c]$ enthält. Da stetige Bilder und endliche Vereinigungen kompakter Mengen kompakt sind, ist es auch
$K = \cup\{f_a{}''X_n : a\in F\} \subseteq X_{n+1}$. Es gibt somit eine endliche Überdeckung $P \subseteq O$ von K. Weil $X_{n+1}\setminus V$ in K enthalten ist, ist $P \cup Q$ eine endliche Überdeckung von X_{n+1}. QUED

Literatur

[1] BRUNNER, N.: Sequential compactness. Notre Dame J.F. Logic (to appear)
[2] BRUNNER, N.: Dedekind-Endlichkeit. Monatshefte Math. (in print)
[3] FELGNER, U.: Models of ZF. Springer 1971
[4] JECH, T.: Bemerkungen zu AC. Casopis p.p.M. 93 (1968), 30-31
[5] LUTZER, D.J.: Pixley-Roy topology. Top. Proc. 3 (1978), 139-158

Dr. Norbert Brunner
Kaiser Franz Ring 22
A-2500 Baden

(Eingegangen am 8. März 1982)