manuscripta math. 34, 175 - 197 (1981)

manuscripta
mathematica

EINE KONSTRUKTION VON LIE-ALGEBREN AUS JORDAN-TRIPEL-SYSTEMEN

Gerd Rhinow

We describe a construction of Lie-algebras $L(W,J)$ from Jordan-triples W and J, as it was first mentioned by U.Hirzebruch in [5]. $L(W,J)$ comprises Meyberg's construction $L(J)$ and gives in real case compact forms and Cartan-decompositions, where all components are written in terms of Jordan-triples. It turns out, that in the real simple case each $L(W,J)$ is characterized by the existence of elements $u \neq 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}^*$ with $(\mathrm{ad}\, u)^3 = \alpha \mathrm{ad}\, u$. This paper gives a summary of the main part of the author's dissertation.

0. Einleitung

Jede einfache Koecher-Tits-Konstruktion einer Lie-Algebra aus einem endlichdimensionalen komplexen Jordan-Tripelsystem (JTS) läßt sich bekanntlich charakterisieren durch die Existenz eines nichttrivialen Elementes u mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = \mathrm{ad}\, u$. Reelle Formen solcher Lie-Algebren sind jedoch nicht in jedem Fall wieder Koecher-Tits -Konstruktionen, da beispielsweise kompakte einfache reelle Lie-Algebren kein nichttriviales Element u mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = \mathrm{ad}\, u$ enthalten können, wohl aber Elemente $w \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, w)^3 = -\mathrm{ad}\, w$. Von daher liegt die Frage nahe, ob im reellen Fall ein Konstruktionsverfahren für Lie-Algebren entwickelbar ist, welches durch die Existenz eines Elementes $u \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = \pm \mathrm{ad}\, u$ charakterisiert werden kann.

0025-2611/81/0034/0175/$04.60

In §1 stellen wir einige für die Lie-Algebra $L(W,J)$ wichtige Hilfsmittel zusammen; insbesondere diskutieren wir die Konstruktion eines JTS $W \otimes J$ aus JTS W und J.

In §2 geben wir das Konstruktionsverfahren der Lie-Algebra $L(W,J)$ an. Den verhältnismäßig großen Schreibaufwand (vgl. [5]) machen wir bei späteren Rechnungen wieder wett. Ein direkter Beweis für die Tatsache, daß die bekannten Koecher-Tits-Konstruktionen von Lie-Algebren aus Jordan-Algebren bzw. Jordan-Tripelsystemen durch Lie-Algebren der Gestalt $L(W,J)$ beschrieben werden können, fällt dabei mit ab.

In den §§3,4 entwickeln wir neben einem für unsere Zwecke "schönen" Radikalbegriff die Killingform von $L(W,J)$ in Termen der JTS W und J. Aus dieser Form lesen wir unter anderem die folgenden Resultate direkt ab:

Ist das reelle JTS J kompakt, so ist die Lie-Algebra $L(W,J)$ genau dann kompakt, wenn die Spurform des JTS W negativ definit ist. Ist die Spurform auf W positiv definit, so erhält man mit kompaktem JTS J eine Cartaninvolution auf $L(W,J)$ mit der (-1)-Komponente $W \otimes J$.

Die folgenden §§ behandeln das noch offene Problem:

$\mathfrak{g}$ sei endlichdimensionale reelle einfache Liealgebra, $u \neq 0$ habe in $\mathfrak{g}$ die Eigenschaft $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$. In $\mathfrak{g}$ konstruiere man ein reelles JTS J so, daß $\mathfrak{g} \cong L(W,J)$ gilt mit geeignetem W.

Eine allgemeine Lösung können wir für die folgenden Typen angeben: Typ I: Es gibt eine Cartan'sche Teilalgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ und eine Cartanzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$.

Typ II: $\mathfrak{g}$ ist eine normale reelle Form von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Drei verbleibende mögliche Fälle für $\mathfrak{g}$ werden im einzelnen behandelt. Abschließend erhalten wir den folgenden Satz:

Eine endlichdimensionale einfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über $\mathbb{R}$ ist genau dann von der Konstruktion $L(W,J)$, wenn Elemente $u \in \mathfrak{g}\setminus\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ existieren mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = \alpha \mathrm{ad}\, u$.

1. Das Jordan-Tripelsystem W⊛J

K sei ein kommutativer Körper mit von 2,3 verschiedener Charakteristik und W ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Vermöge $[xyz] := \sigma(x,y)Tz$ erhält man auf W genau dann ein einfaches Lie-Tripel-System (LTS), wenn σ eine nichttriviale schiefsymmetrische Bilinearform auf W ist und $T \in \mathrm{End}_K W$, $\det T \neq 0$, der Identität $\sigma(Tx,y) + \sigma(x,Ty) = 0$ genügt. Das Lie-Tripel wird durch σ und T eindeutig bestimmt, wir wollen daher die Schreibweise (W,σ,T) benutzen.

Die Form $\langle x,y\rangle_{\sigma,T} := \sigma(Tx,y)$ auf W ist symmetrisch und nicht ausgeartet. Wegen $\sigma(x,y)z + \sigma(y,z)x + \sigma(z,x)y = 0$ für alle x,y,z aus W erhält man $[x\ y\ z] = \langle y,z\rangle_{\sigma,T}x - \langle z,x\rangle_{\sigma,T}y$, wodurch das LTS (W,σ,T) durch $\langle\ ,\ \rangle_{\sigma,T}$ festgelegt ist.

Sei andererseits $\langle\ \rangle : W\times W \longrightarrow K$ irgendeine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Bekanntlich erhält man auf W vermöge $\{xyz\} := \langle x,y\rangle z + \langle y,z\rangle x - \langle z,x\rangle y$ ein einfaches JTS, das wir mit $(W,\langle\ \rangle)$ bezeichnen und dessen Spurform λ sich mit $\lambda(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(l(x,y) + l(y,x)) = 2\langle x,y\rangle$ berechnet.

Definiert man dazu $[xyz] := \frac{1}{2}(\{xyz\}-\{yxz\})$ für x,y,z aus W, so ist $[\ \ ]$ wiederum ein LTS , für das wie oben beschrieben ein Paar σ,T existiert mit $[xyz] = \sigma(x,y)Tz$.

Sind jetzt $\langle\ ,\ \rangle_1, \langle\ ,\ \rangle_2$ zwei nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen auf W, so ist $A \in \mathrm{End}_K W$ genau dann ein JT-Isomorphismus von $(W,\langle\ \rangle_1)$ nach $(W,\langle\ \rangle_2)$, wenn $\langle x,y\rangle_1 = \langle Ax,Ay\rangle_2$ gilt; die Isomorphieklassen der einfachen JTS $(W,\langle\ \rangle)$ stehen also in 1-1-Beziehung zu den Äquivalenzklassen der nichtausgearteten quadratischen Formen auf W.

Im Falle $K = \mathbb{C}$ gibt es bekanntlich nur eine, im Falle $K = \mathbb{R}$ jedoch drei solcher Äquivalenzklassen, etwa vertreten durch

$$(1.1) \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Rechnet man danach die zugehörigen LTS auf W aus, so kann man bzgl. einer geeigneten Basis $\{e_1, e_2\}$ von W jeweils $\sigma_i(e_1, e_2) = 1$ $(i=1,2,3)$ und

$$(1.2) \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \; T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \; T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ setzen.}$$

Zusammenfassend erhalten wir das folgende Ergebnis:

<u>(1.3) LEMMA</u>. (1) <u>Jedes zweidimensionale LTS (W,σ,T) erhält man wie beschrieben durch Alternierung aus einem JTS auf W, das durch eine symmetrische Bilinearform erklärt ist.</u>

(2) <u>Die Isomorphieklassen der einfachen LTS (W,σ,T) entsprechen den Isomorphieklassen der einfachen JTS $(W,\langle\ \rangle)$.</u>

Auf $(W,\langle\ \rangle)$ bestätigt man leicht die folgenden Idenditäten:

$$(1.4) \quad \{xy\{uvw\}\} = \{\{xyu\}vw\} = \{u\{yxv\}w\} = \{uv\{xyw\}\}.$$

Das Paar $(W,\langle\ \rangle)$ ist also ein assoziatives Tripelsystem erster und zweiter Art, symmetrisch im ersten und dritten Argument (ATS).

Mit ein wenig Rechenaufwand lassen sich ATS durch das folgende bemerkenswerte Ergebnis charakterisieren:

(1.5) LEMMA. Ein Tripelsystem A über K ist genau dann ein ATS, wenn für jedes JTS B über K auf dem Vektorraum $A\otimes B$ vermöge

$$\{a\otimes x, b\otimes y, c\otimes z\}_{A\otimes B} = (a,b,c)_A \otimes \{x,y,z\}_B$$

ein JTS erklärt wird.

Im Falle $A = (W,\langle\ \rangle)$ haben wir also für jedes JTS J über K in $W\otimes J$ vermöge $\{a\otimes x, b\otimes y, c\otimes z\} := \{a,b,c\}_W \otimes \{x,y,z\}_J$ für a,b,c aus aus W und x,y,z aus J ein JTS. Durch Alternieren in den ersten beiden Argumenten erhalten wir bis auf skalare Vielfache ein LTS auf $W\otimes J$ mit der Gestalt

$$(1.4)\quad [a\otimes x, b\otimes y, c\otimes z]_{W\otimes J} = \langle a,b\rangle c\otimes (l(x,y)-l(y,x))z + [a,b,c]_W \otimes (l(x,y)+l(y,x))z$$

wobei l die Linksmultiplikation des JTS J bedeute.

Wir bemerken noch, daß die Hermitefizierung (vgl [8]) eines reellen JTS J stets durch eine Konstruktion $W\otimes J$ realisiert werden kann. Ist nämlich $(W,\langle\ \rangle)$ ein zweidimensionales kompaktes JTS, so ist die Fortsetzung Φ der Zuordnung $x \longmapsto -e_1\otimes x$, $ix \longmapsto e_2\otimes x$ mit geeigneter Basis $\{e_1,e_2\}$ von W (vgl. (1.1)) ein Tripelisomorphismus der Hermitefizierung H(J) nach $W\otimes J$, wobei $W\otimes J$ vermöge $(\alpha+i\beta)a\otimes x := \Phi((\alpha+i\beta)\Phi^{-1}(a\otimes x))$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefaßt wird. Insbesondere erhalten wir daraus, daß $W\otimes J$, aufgefaßt als komplexer Vektorraum, genau dann ein Hermitesches JTS (vgl.Prop.3.15 in [8]) ist, wenn J kompakt ist.

2. Die Lie-Algebra $L(W,J)$

Zunächst interessieren wir uns für Einbettungen des LTS $W\otimes J$ in Lie-Algebren. (W,σ,T) sei einfaches zweidimensionales LTS über K, J ein JTS über K. Mit $D(J)$ bezeichnen wir die

Lie-Algebra der inneren Derivationen von J, mit $\mathcal{M}(J)$ den von der Menge $\{l(x,y)+l(y,x);\ x,y\in J\}$ erzeugten Unterraum von $\mathrm{End}_K J$ und verifizieren sofort mit $m(x,y):=l(x,y)+l(y,x)$; $d(x,y):=l(x,y)-l(y,x)$

$$
(2.1)\quad
\begin{aligned}
[D,d(x,y)] &= d(Dx,y)+d(x,Dy) && \text{mit } D\in\mathcal{D}(J)\\
[D,m(x,y)] &= m(Dx,y)+m(x,Dy) && \text{mit } D\in\mathcal{D}(J)\\
[M,d(x,y)] &= m(Mx,y)-m(x,My) && \text{mit } M\in\mathcal{M}(J)\\
[M,m(x,y)] &= d(Mx,y)-d(x,My) && \text{mit } M\in\mathcal{M}(J)
\end{aligned}
$$

Auf der äußeren direkten Summe $L(W,J) := \mathcal{D}(J)\oplus\mathcal{M}(J)\oplus W\otimes J$ läßt sich damit in naheliegender Weise eine Lie-Algebra definieren durch (vgl. [5])

$$
(2.2)\quad
\begin{aligned}
[D_1\oplus M_1\oplus a\otimes x, D_2\oplus M_2\oplus b\otimes y] := {} & [D_1,D_2]-\det T[M_1,M_2]+\langle a,b\rangle_{\sigma,T}d(x,y)\\
&\oplus[D_1,M_2]-[D_2,M_1]+\sigma(a,b)m(x,y)\\
&\oplus b\otimes D_1y-a\otimes D_2x+Tb\otimes M_1y-Ta\otimes M_2x.
\end{aligned}
$$

Als erstes bemerken wir, daß jede Tits-Konstruktion einer Lie-Algebra aus einer Jordan-Algebra mit Einselement isomorph ist zu einer Konstruktion $L(W,J)$:

Ist nämlich J eine Jordan-Algebra über K mit Einselement e, so läßt sich J vermöge $\{x,y,z\} := \frac{1}{2}((xy)z+(yz)x-(zx)y)$ als JTS über K auffassen. Man erhält $m(x,y) = L(x\cdot y)$ und $d(x,y) = [L(x),L(y)]$. (L sei dabei die Linksmultiplikation der Jordan-Algebra J.) In jeder einfachen dreidimensionalen K-Lie-Algebra $\mathcal{Y}$ gibt es bekanntlich eine K-Basis $\{a_1,a_2,a_3\}$ von $\mathcal{Y}$ und Elemente $\alpha,\beta\in K/\{0\}$ mit

$$[a_1,a_2] = a_3;\quad [a_2,a_3] = \alpha a_1;\quad [a_3,a_1] = \beta a_2.$$

Für $y := \lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3 \in \mathcal{Y}$ hat man $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}_y y)^2 = -2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\alpha\beta)$. Wir setzen $W:= Ka_2\oplus Ka_3$, $\sigma: W\times W\longmapsto K$ als schiefsymmetrische Bilinearform mit $\sigma(a_2,a_3) = \alpha$ und $T\in\mathrm{End}_K W$ sei erklärt durch $Ta_2 = a_3$, $Ta_3 = -\beta a_2$. Wir haben $\det T \neq 0$ und wegen $\mathrm{Sp}\ T = 0$

gilt die Identität $\sigma(Ta,b)+\sigma(a,Tb) = 0$ in W (vgl. §1).
Daher ist (W,σ,T) einfaches LTS über K und die K-lineare Fortsetzung von $D\oplus a_1\otimes x\oplus a_2\otimes y\oplus a_3\otimes z \longmapsto D\oplus m(x,e)\oplus a_2\otimes y\oplus a_3\otimes z$ von $\mathcal{L}(\mathcal{V},J)$ nach $\mathcal{L}(W,J)$ ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren, wenn wir in $\mathcal{L}(\mathcal{V},J)$ nur innere Derivationen von J zulassen.

(2.3) LEMMA. Für jedes endlichdimensionale JTS J über K ist die Meyberg-Konstruktion L(J) eine Lie-Algebra von der Gestalt $\mathcal{L}(W,J)$.

Beweis. (W,σ,T) sei das einfache zweidimensionale LTS über K, in dem eine Basis $\{e_1,e_2\}$ mit $\sigma(e_1,e_2) = 1$ existiert und T bzgl. $\{e_1,e_2\}$ die Matrixgestalt $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, besitzt. Dann ist die Abbildung $e_1\otimes x+e_2\otimes y \longmapsto x+y\oplus\alpha\overline{(y-x)}$ von $W\otimes J$ nach $J\oplus\bar{J}$ (vgl.CH.XI[9]) ein Isomorphismus von LTS.Damit sind $\mathcal{L}(W,J)$ und L(J) als Standardeinbettungen isomorpher LTS ebenfalls isomorph.

3. Entwicklung eines Radikalbegriffs auf JTS

Die Konstruktion des LTS $W\otimes J$ gibt Anlaß zur Definition eines für unsere Zwecke besonders handlichen Radikalbegriffs für JTS (vgl. dazu auch S. 118 ff in[9]). Der Schreibweise von W.G.Lister in [7] folgend definieren wir für einen K-linearen Teilraum V von $W\otimes J$ die Kette $V^0 := V$, $V^{k+1} := [W\otimes J, V^k, V^k]$ und finden in II Lemmata 2.1,2.2ff in[7]:

$V \underset{LTS}{\trianglelefteq} W\otimes J \Longrightarrow V^k \underset{LTS}{\trianglelefteq} W\otimes J;\ V^{k+i} = (V^k)^i;\ V^{k+1} \subset V^k$ für $k\in\mathbb{N}_0$.

V heißt auflösbar, wenn $V^k = \{0\}$ für ein k aus $\mathbb{N}$ und $W\otimes J$ enthält genau ein maximal auflösbares LT-Ideal $Rad_{LT}W\otimes J$.

Ist nun U ein JT-Ideal in J, so ist $W\otimes U$ ein LT-Ideal

in $W\otimes J$ und ein Induktionsbeweis zeigt mit den Definitionen
$U^{(o)} := U,\ U^{(k+1)} := \{J,U^{(k)},U^{(k)}\}+\{U^{(k)},J,U^{(k)}\}$

$$(3.1) \qquad (W\otimes U)^{k} = W\otimes U^{(k)}$$

Damit wird man das JT-Ideal U auflösbar nennen, wenn $U^{(k)} = \{0\}$ für ein k aus $\mathbb{N}$ gilt. Ist nun in J jede aufsteigende Kette von JT-Idealen stationär, so ist mit der obigen Konstruktion ein (eindeutig bestimmtes) maximal auflösbares JT-Ideal $\mathrm{Rad}_{JT}J$ gegeben und mit wohlbekannter Schlußweise (vgl. Lemma 2.6 II in [7] und Th.2.9 in [9]) erhält man die zu erwartenden Ergebnisse:

(3.2) SATZ. (') $\mathrm{Rad}_{LT}(W\otimes J) = W\otimes \mathrm{Rad}_{JT}J$

('') char K = 0, $\dim_K J < \infty$, dann ist J genau dann halbeinfach, wenn es direkte Summe einfacher JT-Ideale ist.

Nach (3.1) ist J genau dann halbeinfaches JTS, wenn $W\otimes J$ halbeinfaches LTS ist. Mit Hilfe entsprechender Aussagen über Standardeinbettungen von LTS in Lie-Algebren (vgl. Kor.1 zu I Satz 2.10 in [10]) erhalten wir daher sofort:

(3.3) SATZ. $L(W,J)$ ist für jedes einfache LTS W als Standardeinbettung des LTS $W\otimes J$ genau dann halbeinfach, wenn J halbeinfaches JTS ist.

4. Die Killingform der Lie-Algebra $L(W,J)$

Wir übernehmen die Voraussetzungen des letzten Abschnittes: char $K \neq 2,3$; (W,σ,T) einfaches LTS und J endlichdimensionales JTS mit nicht ausgearteter Spurform über K.

Θ: $D\oplus M\oplus a\otimes x \longmapsto D\oplus M\oplus(-a\otimes x)$ ist ein involutorischer Automorphismus von $L(W,J)$. Bezeichnen wir mit $\langle -,-\rangle_{L(W,J)}$ die Killingform von $L(W,J)$, so ist zunächst folgendes ersichtlich:

(4.1) $\langle X,X\rangle_{L(W,J)} = \langle D\oplus M,D\oplus M\rangle_{L(W,J)} + \langle a\otimes x,a\otimes x\rangle_{L(W,J)}$ mit $X := D\oplus M\oplus a\otimes x \in L(W,J)$. Bei der weiteren Berechnung der rechten Seite von (4.1) bedienen wir uns der von Standardeinbettungen her bekannten Technik (vgl. Seite 57ff in [9]). Mit ein wenig rechnerischem Aufwand erhalten wir:

$$(4.2)\qquad \langle D\oplus M,D\oplus M\rangle_{L(W,J)} = \langle D\oplus M,D\oplus M\rangle_{\mathcal{D}(J)\oplus \mathcal{M}(J)} + 2\operatorname{Sp}D^2 - 2\det T\cdot \operatorname{Sp}M^2$$

$$(4.3)\qquad \langle a\otimes x,a\otimes x\rangle_{L(W,J)} = 4\langle a,a\rangle_W\cdot\lambda_J(x,x).$$

Diese beiden Ergebnisse werden uns insbesondere im Falle $K = \mathbb{R}$ interessieren: Unter den obigen Voraussetzungen ist das reelle LTS $W\otimes J$ halbeinfach, das bedeutet, daß jede LT-Derivation von $W\otimes J$ eine innere Derivation ist (vgl. S.57, Th.10 in [9]) Wegen (2.3) kann man daher $\mathcal{D}(J)\oplus\mathcal{M}(J)$ als Teilalgebra von $L(W,J)$ auch als Derivationsalgebra von $W\otimes J$ auffassen. Unter Ausnutzung der mit Induktion leicht zu beweisenden Leibnizformel

$$D^n[XYZ] = \sum_{\substack{i+j+k=n\\ i,j,k\geq 0}} \frac{n!}{i!j!k!}\,[D^iX,D^jY,D^kZ]$$

für Derivationen auf LTS erhält man durch wörtliches Übertragen entsprechender Beweise für Lie-Algebren (vgl. §5 Ch.II in [2]) auf LTS, daß die zu Aut($W\otimes J$) gehörende Lie-Algebra bis auf Isomorphie mit Der($W\otimes J$)$\cong\mathcal{D}(J)\oplus\mathcal{M}(J)$ (letzteres als Teilalgebra von $L(W,J)$) identifiziert werden kann. Jeder Automorphismus des LTS $W\otimes J$ ist bzgl. der nicht ausgearteten Form $(X,Y)\longmapsto\langle X,Y\rangle_{L(W,J)} = 2\,\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}X\cdot\mathrm{ad}Y)$ auf $W\otimes J$ eine Isometrie. Falls nun diese Form auf $W\otimes J$ definit ist, so ist Aut($W\otimes J$) als abgeschlossene Untergruppe der Isometriengruppe bzgl. $\langle\ \rangle_{L(W,J)}$ eine kompakte Lie-Gruppe. $\mathcal{D}(J)\oplus\mathcal{M}(J)$ ist dann also eine kompakte reelle Liealgebra. Jetzt ist das folgende Ergebnis leicht zu beweisen:

(4.5) SATZ. <u>J sei endlichdimensionales reelles JTS mit positiv definiter Spurform (J ist kompakt) und (W,σ,T) ein zweidimensionales einfaches LTS über $\mathbb{R}$.</u>

(') <u>$L(W,J)$ ist genau dann kompakt, wenn $\langle\ \rangle_W$ negativ definite Form auf W ist.</u>

('') <u>Die direkte Zerlegung $L(W,J) = (\mathcal{D}(J)\oplus\mathcal{M}(J))\oplus W\otimes J$ ist genau dann eine Cartan-Zerlegung, wenn $\langle\ \rangle_W$ positiv definite Form auf W ist.</u>

<u>Beweis.</u> Beachtet man $\det T = \langle e_1,e_1\rangle_W\langle e_2,e_2\rangle_W$ für geeignete Elemente e_1,e_2 aus W, so ist mit den obigen Ausführungen und mit (4.2),(4.3) die Behauptung des Satzes bewiesen, wenn $\mathrm{Sp}D^2<0$ und $\mathrm{Sp}M^2>0$ für $D\in\mathcal{D}(J)$ und $M\in\mathcal{M}(J)$ gilt. Dies erhellt sich aber aus der Tatsache, daß D schief und M selbstadjungiert bzgl. der positiv definiten Spurform von J ist.

Bei geeigneter Wahl einer Basis $\{e_1, e_2\}$ von W kann die zu T gehörende Matrix genau einer der Matrizen aus (1.2) zugeordnet werden. (4.5) zusammen mit (2.4) zeigt nun (in der Schreibweise von (1.2)):

$T = T_1$: $L(W,J)$ ist Meyberg-Konstruktion des JTS J

$T = T_2$: Die Zerlegung $(\mathcal{D}(J) \oplus \mathcal{M}(J)) \oplus (W \otimes J)$ ist eine Cartan-Zerlegung von $L(W,J)$.

$T = T_3$: $L(W,J)$ ist eine kompakte Lie-Algebra.

5. Klassifizierung der Lie-Algebren $L(W,J)$

K sei kommutativer Körper mit von 2,3 verschiedener Charakteristik. (W, σ, T) sei einfaches zweidimensionales LTS und J endlichdimensionales JTS über K.

Ist $K \subseteq K'$ eine Körpererweiterung, so zeigen elementare Rechnungen

$$L(K' \otimes W, K' \otimes J) \cong K' \otimes L(W,J) \quad \text{und}$$

$$L(K' \otimes J) \cong K' \otimes L(J)$$

Hierbei bezeichnen $K' \otimes W$ bzw, $K' \otimes J$ LTS bzw. JTS über K', welche man in naheliegender Weise aus (W, σ, T) und J erhält. Beachten wir noch, daß die Spurform von $K' \otimes J$ nicht ausgeartet ist, wenn die von J selbst nicht ausgeartet ist, so läßt sich leicht nachrechnen: (vgl. dazu auch [5])

<u>(5.1) SATZ.</u> <u>Mit den obigen Voraussetzungen gilt für die Körpererweiterung</u> $K' := K((-\det T)^{\frac{1}{2}})$:

$$K' \otimes L(W,J) \cong L(K' \otimes W, K' \otimes J) \cong L(K' \otimes J) \cong K' \otimes L(J).$$

Über $\mathbb{C}$ erhält man also für einfache Lie-Algebren $L(W,J)$ genau die Möglichkeiten, die für die Koecher-Tits-Konstruktion $L(J)$ gegeben sind. [11] folgend, kommen einfache komplexe Lie-Algebren der Typen G_2, F_4 und E_8 nicht vor, alle anderen Typen kommen vor. Über $\mathbb{R}$ liegen die Dinge wie in (4.5) bewiesen vollkommen anders. Wir werden unter anderem bald beweisen, daß kompakte reelle Formen aller möglicher einfacher Koecher-Tits-Konstruktionen über $\mathbb{C}$ stets von der Konstruktion $L(W,J)$ sind.

6. $id_J \in M(J)$

K sei kommutativer Körper mit von 2,3 verschiedener Charakteristik und J ein endlichdimensionales JTS über K mit nichtausgearteter Spurform λ_J. Wir identifizieren $J \otimes J$ mit $End_K J$ vermöge $a \otimes b \longmapsto ab^*$, wobei $(ab^*)c := \lambda_J(c,b)a$ gelten möge. Ist $\{x_1,\dots x_n\}$ eine Orthogonalbasis von J bzgl. λ_J, so ist die Menge $\{x_i x_j^* \; ; \; 1 \leq i,j \leq n\}$ eine K-Basis von $End_K J$ und die K-lineare Fortsetzung $S: Hom\ J \longrightarrow Hom\ J$ von $x_i x_j^* \longmapsto l(x_i,x_j)$ hat folgende sämtlich auf den Seiten 55-57 in [10] nachgerechnete Eigenschaften:

$$(6.1)\quad \begin{cases} (S(ab^*))^* = S((ab^*)^*),\ \text{also}\ S(A)^* = S(A^*) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für}\ A \in End_K J \\ Sp\ ab^* = \lambda_J(a,b) \\ S(id_J) = id_J;\ (\text{alle} * \text{-Bildungen bzgl.}\ \lambda_J) \end{cases}$$

<u>(6.2) LEMMA.</u> <u>Es sei</u> $M := \{ A \in End_K J$ <u>mit</u> $S(A) = S(A)^* \}$. <u>Dann gilt</u> $S(M) = M(J)$.

<u>Beweis.</u> $l(a,b)^* = l(b,a)$ für $a,b \in J$ bedingt $S(ab^* + ba^*) = S(ab^* + ba^*)^*$, also $M(J) \subseteq S(M)$.

Genügt andererseits $A = \sum ab^*$ der Gleichung $S(A) = S(A)^*$, so folgt aus (6.1)

$$\sum{}' S(ab^*) = \sum{}' S(ab^*)^* = \sum{}' S(ba^*), \text{ also}$$

$$S(A) = \frac{1}{2}\sum{}'(S(ab^*)+S(ba^*))$$

$$= \frac{1}{2}\sum{}'(l(a,b)+l(b,a)) \in M(J).$$

Aus (6.2) schließen wir insbesondere

(6.3) $\qquad id_J \in M(J).$

In einer Lie-Algebra der Konstruktion $L(W,J)$ erhält man $(ad_{L(W,J)}\ id_J)^3 = -\det T\cdot ad_{L(W,J)}\ id_J$. Dies beweist

<u>(6.4) SATZ.</u> char K = 0, <u>dann existiert in jeder halbeinfachen endlichdimensionalen Lie-Algebra der Konstruktion</u> $L(W,J)$ <u>ein</u> $X \neq 0$ <u>mit</u> $(ad\ X)^3 = \alpha\cdot ad\ X$ <u>mit</u> $\alpha \neq 0$.

Der Schreibweise von (1.2) folgend, läßt sich die Aussage von (6.4) bei Wahl einer geeigneten Basis $\{e_1,e_2\}$ des zweidimensionalen einfachen LTS (W,σ,T) im Falle $K = \mathbb{R}$ wie folgt präzisieren:

(6.5) Die halbeinfache reelle Lie-Algebra $L(W,J)$ enthält in id_J ein Element $\neq 0$ mit $(ad_{L(W,J)} id_J)^3 = \pm ad_{L(W,J)} id_J$:

$T = T_1$, dann $(ad_{L(W,J)} id_J)^3 = ad_{L(W,J)} id_J$ und $L(W,J)$ ist nach (2.4) isomorph zu $L(J)$.

$\left.\begin{array}{l} T = T_2 \\ T = T_3 \end{array}\right\}\ (ad_{L(W,J)} id_J)^3 = -ad_{L(W,J)} id_J.$

Umgekehrt wissen wir schon aus der Einleitung und aus (2.4), daß jede endlichdimensionale einfache Lie-Algebra über $\mathbb{R}$ mit einem Element $X \neq 0$ mit $(ad\ X)^3 = ad\ X$ von der

Konstruktion $L(W,J)$ ist. Im folgenden wird uns daher der Beweis der Behauptung beschäftigen, daß endlichdimensionale einfache reelle Lie-Algebren mit einem Element $u \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\ u)^3 = -\mathrm{ad}\ u$ auch stets von der Konstruktion $L(W,J)$ sind. Es ist klar, daß man dabei von der Einfachheit der Komplexifizierung solcher Algebren ausgehen kann, weil andernfalls die Reellifizierung einer einfachen komplexen Lie-Algebra vorläge, die mit u auch iu ($(\mathrm{ad}\ iu)^3 = \mathrm{ad}\ iu$) enthielte. Der Autor dankt dem Referenten der Erstfassung dieser Arbeit für Hinweise, welche im folgenden Paragraphen zu einer Verallgemeinerung der im ursprünglichen Text angegebenen Konstruktion eines JTS führen.

7. Über die Konstruktion eines reellen JTS

$\mathfrak{g}$ sei endlichdimensionale einfache Lie-Algebra mit einfacher Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Der Schreibweise in [4] folgend definieren wir für $u \in \mathfrak{g}/\{0\}$ mit $(\mathrm{ad}\ u)^3 = -\mathrm{ad}\ u$

$$I_u := \{x \in \mathfrak{g}\,;\ [u,x] = 0\} \text{ und } T_u := \{y \in \mathfrak{g}\,;\ [u[u,y]] = -y\}.$$

T_u ist als (-1)-Komponente des involutorischen Automorphismus' $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + 2(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} u)^2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ vermöge $[xyz] := [[xy]z]$ ein LTS. Elementare Rechenregeln zeigen:

<u>(7.1) LEMMA.</u> (') <u>Die Abbildung</u> $-: T_u \longrightarrow T_u$, <u>definiert durch</u> $x \longmapsto \bar{x} := [u,x]$ <u>ist Derivation und Automorphismus des LTS</u> T_u <u>und es gilt</u>

$[\bar{x}\bar{y}z] = [xyz]$ <u>und</u> $[\overline{xyz}] = [xy\bar{z}]$.

('') $\{xyz\} := \frac{1}{2}([xyz] - [\bar{x}y\bar{z}])$ <u>definiert ein JTS auf</u> T_u <u>mit</u>

$$[xyz] = \{xyz\} - \{yxz\}$$
$$-[\bar{x}y\bar{z}] = \{xyz\} + \{yxz\}.$$

Ebenso einfach zu beweisen ist

(7.2) LEMMA. Es sei τ ein involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{g}$ mit $\tau u = -u$.

Für $J := \{x \in T_u;\ \tau x = x\}$ erhalten wir:

(') J ist Untertripelsystem des JTS T_u.

('') $T_u = J \oplus \bar{J}$

(''') Auf $W := Ke_1 \oplus Ke_2$ werde durch die symmetrische Fortsetzung von $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf W definiert. Dann wird durch $x \longmapsto e_1 \otimes x$, $\bar{y} \longmapsto e_2 \otimes y$ ein Isomorphismus der LTS T_u und $(W, \langle\ \rangle) \otimes J$ erklärt.

Unter den Voraussetzungen von (7.2) ist daher $\mathfrak{g}$ als Standardeinbettung des LTS T_u isomorph zur Standardeinbettung $L((W,\langle\ \rangle), J)$ des LTS $(W,\langle\ \rangle)\otimes J$. Wir fassen zusammen:

(7.3): SATZ: $\tau: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ sei involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{g}$ mit $\tau u = -u$. Dann ist $\mathfrak{g}$ von der Konstruktion $L(W,J)$.

Wir haben nun zu beweisen, daß die Voraussetzungen von (7.3) in der endlichdimensionalen einfachen reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit einfacher Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und einem Element $u \neq 0$ mit $(\operatorname{ad} u)^3 = -\operatorname{ad} u$ stets erfüllt sind.

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist bis auf Isomorphie genau eine der Lie-Algebren $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7$ (vgl. Satz 9§9 in[10]). Der Bezeichnungsweise von Cartan's Liste aller reellen Formen der aufge- Typen folgend (vgl. S. 348-354 in[2]) unterscheiden wir $\mathfrak{g}$

in drei Typen:

(7.7) DEFINITION. $\mathfrak{g}$ sei vom Typ I, wenn für eine Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartan'sche Teilalgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ existiert.

$\mathfrak{g}$ sei vom Typ II, wenn $\mathfrak{g}$ eine der reellen Formen $A_n I$ $(n \geq 2)$ oder E I ist.

$\mathfrak{g}$ sei vom Typ III, wenn $\mathfrak{g}$ eine der reellen Formen $A_n II, D_n I(b)$ $(n \geq 3)$ oder E IV ist.

Nach Theorem 8 auf Seite 430 und der Vorbemerkung zu §4 in [14] ist jede reelle Form einem der in (7.7) definierten Typen zuzurechnen. Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{g}$ genau dann vom Typ I ist, wenn der von der Konjugierung von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bzgl. $\mathfrak{g}$ induzierte involutorische Automorphismus $\tau : \check{\mathfrak{m}} \longrightarrow \check{\mathfrak{m}}$ der kompakten reellen Form $\check{\mathfrak{m}} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ ein innerer Automorphismus ist.

8. Lie-Algebren vom Typ I

Sei $\mathfrak{g}$ vom Typ I, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanzerlegung von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Cartan'sche Teilalgebra mit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$; $u \neq 0$ habe in $\mathfrak{g}$ die Eigenschaft $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$. Mit Δ bezeichnen wir die Menge der nichttrivialen Wurzeln von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bzgl. $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Zu $\alpha \in \Delta$ gibt es genau ein $H_\alpha \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ mit $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ für $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Setzt man $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}-} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_\alpha$, so induziert die Konjugierung ϕ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bzgl. $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi^* : (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}-})^* \longrightarrow (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}-})^*$, erklärt durch $\phi^*(\lambda)(H) := \lambda(\phi(H))$ für $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}-}$, die Δ auf sich abbildet. Zu $\alpha \in \Delta$ existiert daher ein $\kappa_\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\phi X_\alpha = \kappa_\alpha X_{\phi^*\alpha}$, $X_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^\alpha$, und man kann eine Weylbasis $\{H_j, E_\alpha ; 1 \leq j \leq \mathrm{rank}\, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \alpha \in \Delta\}$ in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit den folgenden Eigenschaften wählen (Details in [12]):

$$(8.1)\begin{cases} E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^\alpha \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha, \quad H_j \in \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha \\ [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} \text{ mit } N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} \in \mathbb{R} \\ \qquad N_{\alpha,\beta} = 0, \text{ falls } \alpha+\beta \notin \Delta \\ |\kappa_\alpha| = 1 \end{cases}$$

<u>(8.2) LEMMA.</u> (') $E_\alpha \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ <u>oder</u> $E_\alpha \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ <u>für jedes</u> $\alpha \in \Delta$.

('') E_α <u>und</u> $E_{-\alpha}$ <u>liegen in derselben Komponente.</u>

<u>Beweis.</u> Wegen $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ folgt $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$

Für $E_\alpha = E_\alpha^{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}} \oplus E_\alpha^{\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}}$ hat man für $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$:

$\alpha(H)E_\alpha = [H, E_\alpha^{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}] + [H, E_\alpha^{\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}}]$, also $E_\alpha^{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}, E_\alpha^{\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}} \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^\alpha$.

Wegen $\dim(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^\alpha = 1$ folgt (') und aus $E_\alpha \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$,

$E_{-\alpha} \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ erhielte man $-H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \{0\}$.

Mit ähnlicher Argumentation schließt man

<u>(8.3) LEMMA.</u> (') $\mathfrak{h} = \sum i\mathbb{R}H_\alpha$

('') <u>Für</u> $E_\alpha \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ <u>gilt</u> $\kappa_\alpha = 1$

(''') <u>Für</u> $E_\alpha \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ <u>gilt</u> $\kappa_\alpha = -1$.

Dies legt eine disjunkte Zerlegung von Δ nahe. Wir definieren

$\Delta_{\mathfrak{k}} := \{\alpha \in \Delta; E_\alpha \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}\}$

$\Delta_{\mathfrak{p}} := \{\alpha \in \Delta; E_\alpha \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\}$ und erhalten

<u>(8.4) SATZ.</u>
$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{k}}} \mathbb{R}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{k}}} \mathbb{R}i(E_\alpha - E_{-\alpha})$$
$$\mathfrak{p} = \sum_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{p}}} \mathbb{R}i(E_\beta + E_{-\beta}) \oplus \sum_{\beta\in\Delta_{\mathfrak{p}}} \mathbb{R}(E_\beta - E_{-\beta}).$$

<u>Beweis.</u> Man wende die Konjugierung ϕ auf die Elemente $E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha})$ mit $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}$ bzw. auf $i(E_\beta + E_{-\beta})$, $(E_\beta - E_{-\beta})$ mit $\beta \in \Delta_{\mathfrak{p}}$ an, benutze (8.2) und $\phi E_\alpha = \kappa_\alpha E_{-\alpha}$ für $\alpha \in \Delta$.

In $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ existiert eine Cartan'sche Teilalgebra $\mathfrak{h}'$, welche $iu \neq 0$ mit $((\mathrm{ad}\, iu)^3 = \mathrm{ad}\, iu)$ enthält. Bezeichnet τ einen inneren Automorphismus von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit $\tau(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, so hat man in $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ mit $v := \tau(iu)$ ein nichttriviales Element gefunden mit $(\mathrm{ad}\, v)^3 = \mathrm{ad}\, v$. Für $\alpha \in \Delta$ bedeutet dies $\alpha(v) \in \{0,1,-1\}$ und da die Einschränkung der Killingform von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ auf $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ nicht ausgeartet ist, erhält man wegen $\langle v,H\rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} = \sum_{\alpha(v)=1} \langle 2H_\alpha, H\rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ (vgl. [13]):

(8.5) $\quad v = \sum_{\alpha(v)=1} 2H_\alpha$, womit aus (8.2) sofort

(8.6) $\quad iv \in \mathfrak{h}$ folgt.

<u>(8.7) SATZ.</u> <u>$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ sei eine Lie-Algebra vom Typ I und $\mathfrak{h}$ sei Cartan'sche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$. Existiert in $\mathfrak{g}$ ein $u \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$, so gibt es solch ein Element auch in $\mathfrak{h}$.</u>

<u>(8.8) SATZ.</u> <u>$\mathfrak{g}$ sei endlichdimensionale einfache reelle Lie-Algebra vom Typ I. Gibt es in $\mathfrak{g}$ ein $u \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$, dann ist $\mathfrak{g}$ von der Konstruktion $L(W,J)$.</u>

<u>Beweis.</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ sei Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ Cartan'sche Teilalgebra mit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$. Nach (8.7) gibt es in $\mathfrak{h}$ ein $w \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, w)^3 = -\mathrm{ad}\, w$. Wir bezeichnen mit Δ wieder die Menge der nichttrivialen Wurzeln von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bzgl. $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Wählt man mit $\{H_j, E_\alpha;\ 1 \leq j \leq \mathrm{rank}\, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \alpha \in \Delta\}$ eine Weylbasis, die (8.1) genügt, so folgt aus (8.3) $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \Delta} i\mathbb{R}H_\alpha$ und aus (8.5) $w = -\sum_{\alpha(iw)=1} 2iH_\alpha$.
Die Abbildung $H + \sum_{\alpha \in \Delta} \nu_\alpha E_\alpha \longmapsto -H + \sum_{\alpha \in \Delta} \nu_\alpha E_{-\alpha}$

von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ in sich ist ein involutorischer Automorphismus, der w auf -w abbildet und dessen Einschränkung auf $\mathfrak{g}$ wegen (8.4) ein involutorischer Automorphismus der reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist. Die Bedingungen von Satz (7.3) sind erfüllt, die Behauptung ist damit bewiesen.

Unter Hinweis auf die Schlußbemerkung von §5 machen wir uns jetzt leicht klar, daß jede kompakte reelle Form einer einfachen komplexen Koecher-Tits-Konstruktion L von der Gestalt $L(W,J)$ mit geeigneten W, J sein muß.

Hat $X \neq 0$ in L die Eigenschaft $(\mathrm{ad}\,X)^3 = \mathrm{ad}\,X$, so gibt es eine Cartan'sche Teilalgebra $\mathfrak{h}$ von L, die X enthält und wir haben $X = \sum_{\alpha(X)=1} 2H_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, $\Delta = \{\mu \neq 0; \mu \text{ Wurzel von L bzgl. } \mathfrak{h}\}$.
Wie oben beschrieben wählen wir eine Weylbasis von L und erhalten in

$$\check{\mathfrak{m}} = \sum_{\alpha \in \Delta} i\mathbb{R}H_\alpha \oplus \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \oplus \sum_{\alpha\in\Delta} i\mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha})$$

bekanntlich eine kompakte reelle Form von L. Dies bedeutet $iX \in \check{\mathfrak{m}}$ mit $(\mathrm{ad}\,iX)^3 = -\mathrm{ad}\,iX$. Die Bedingungen von (8.8) sind für $\check{\mathfrak{m}}$ erfüllt, $\check{\mathfrak{m}}$ ist also von der Konstruktion $L(W,J)$.
Da alle kompakten reellen Formen von L unter der Automorphismengruppe von L paarweise konjugiert sind, folgt unsere Behauptung.

9. Lie-Algebren vom Typ II

Die in (7.7) aufgeführten Lie-Algebren vom Typ II sind sämtlich normale reelle Formen (vgl. S. 348-354 in [2] und S. 414 in [14]).

(9.1) SATZ. Ist $\mathfrak{g}$ normale reelle Form einer einfachen komplexen Koecher-Tits-Konstruktion $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, so ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra von der Gestalt $L(\mathbf{W},\mathbf{J})$.

<u>Beweis.</u> $X \neq 0$ habe in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ die Eigenschaft $(\operatorname{ad} X)^3 = \operatorname{ad} X$. $\mathfrak{h}$ sei Cartan'sche Teilalgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, die X enthält und Δ sei wieder die Menge der nichttrivialen Wurzeln von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bzgl. $\mathfrak{h}$. Wir haben $X = \sum_{\alpha(X)=1} 2H_\alpha$. Ist $\{H_j, E_\alpha; 1 \leq j \leq \operatorname{rank} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \alpha \in \Delta\}$ eine Weylbasis von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ gemäß (8.1), so erhält man bekanntlich mit $\mathfrak{g} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}E_\alpha$ eine normale reelle Form von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Da alle normalen reellen Formen von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ paarweise isomorph sind (Th. 3.5 Ch.IX in [2]), folgt die Behauptung des Satzes.

<u>10. Lie-Algebren vom Typ III</u>

Die Lie-Algebren AII und $D_n I(b)$ $(n \geq 3)$ enthalten jeweils eine dreidimensionale einfache Teilalgebra mit einem Element $u \neq 0$, das $(\operatorname{ad} u)^3 = -\operatorname{ad} u$ genügt. Dies komplettiert die Voraussetzungen von Satz3 in [3], nach dem $\mathfrak{g}$ als Tits-Konstruktion $L(V, C)$ einer reellen Lie-Algebra aus einer Jordan-Algebra C mit Einselement und einer dreidimensionalen einfachen Lie-Algebra V aufgefaßt werden kann. Nach den Ausführungen in §2 ist eine solche Lie-Algebra aber stets von der Konstruktion $L(W, J)$.

Bevor wir die noch verbleibende Lie-Algebra E IV untersuchen, bereiten wir einen Satz vor, der in gewisser Weise eine Verallgemeinerung von (8.7) darstellt.

$\mathfrak{g}$ sei endlichdimensionale halbeinfache reelle Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ Cartan'sche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. Definiert man

$\mathfrak{h}^+ := \{X \in \mathfrak{h};$ alle Eigenwerte von ad X liegen in $i\mathbb{R}\}$ und

$\mathfrak{h}^- := \{Y \in \mathfrak{h};$ alle Eigenwerte von ad Y liegen in $\mathbb{R}\}$, so

gilt bekanntlich $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^+ \oplus \mathfrak{h}^-$. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartanzerlegung, so beweist darüber hinaus Theorem 2 §1 in [14] die Existenz einer unter der adjungierten Gruppe Int $\mathfrak{g}$ zu $\mathfrak{h}$ konjugierten Cartan'schen Teilalgebra $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}'^{+} \subset \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{h}'^{-} \subset \mathfrak{p}$.

(10.1) SATZ. $\mathfrak{g}$ sei endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{R}$ und $u \neq 0$ habe in $\mathfrak{g}$ die Eigenschaft $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$. Dann gibt es eine Cartanzerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ mit $u \in \mathfrak{k}$.

Beweis. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ sei irgendeine Cartanzerlegung und $\mathfrak{h}$ sei Cartan'sche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$, die u enthält. Nach dem oben zitierten Satz existiert eine Cartan'sche Teilalgebra $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}'^{+} \subset \mathfrak{k}'$, $\mathfrak{h}'^{-} \subset \mathfrak{p}'$ und für ein $\tau \in \mathrm{Int}\, \mathfrak{g}$ gilt $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Bezeichnet man mit Δ wieder die Menge der nichttrivialen Wurzeln von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bzgl. $\mathfrak{h}'^{\mathbb{C}}$, so gilt für $w := \tau(u)$ nach (8.5)

$iw = \sum_{\alpha(iw)=1} 2H_\alpha \in (\mathfrak{h}'^{\mathbb{C}})^{-}$, also

$w \in (\mathfrak{h}'^{\mathbb{C}})^{+} \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}'^{+} \subset \mathfrak{k}'$

Mit $\mathfrak{k} := \tau^{-1}(\mathfrak{k}')$, $\mathfrak{p} := \tau^{-1}(\mathfrak{p}')$ folgt die Behauptung.

Sei nun $\mathfrak{g}$ vom Typ E IV. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ eine Cartanzerlegung, so ist $\mathfrak{k}$ isomorph zu der kompakten reellen Form $\mathfrak{f}_4$ der einfachen komplexen Lie-Algebra F_4. Ein Element $u \neq 0$ in $\mathfrak{g}$ mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$ kann nach (10.1) in $\mathfrak{f}_4$ angenommen werden, was aber bekanntlich nicht möglich ist.

(10.2) SATZ. Die reelle Form E IV besitzt kein Element $u \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = -\mathrm{ad}\, u$.

Eine Zusammenfassung der §§6-10 beweist nunmehr

(10.3) SATZ. Eine endlichdimensionale einfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über $\mathbb{R}$ ist genau dann von der Gestalt $L(W,J)$, wenn es Elemente $X \neq 0$ in $\mathfrak{g}$ und $\alpha \neq 0$ in $\mathbb{R}$ gibt mit $(\mathrm{ad}\ X)^3 = \alpha \mathrm{ad}\ X$.

Literatur

1. BRAUN,H. und KOECHER,M.: Jordanalgebren,Die Grundlehren der math. Wissenschaften,Bd. 128, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.
2. HELGASON,S. : Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York/London, 1962.
3. HIRZEBRUCH,U. : Über eine Klasse von Lie-Algebren, Journal of Algebra, Bd. 11, S. 461-467 (1969)
4. HIRZEBRUCH,U. : Über eine Realisierung der Hermiteschen symmetrischen Räume, Math.Zeitschrift,115,S.371-382,1970
5. HIRZEBRUCH,U. : A Generalisation of Tits' Construction of Lie-Algebras to Jordan Triple Systems, Proc. of the Kon. Nederl.Akad.v.Wetensch.,Amsterdam S. 456-459, Vol 81, 1978
6. JACOBSON,N. : Lie-Algebras,Interscience,N.Y.1962
7. Lister,W.,G. : A structure theory of Lie-triple-sytems,Trans AMS,72,S.217-242 (1952)

8. LOOS,O. : Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Lecture notes, Univ.of Calif. at Irvine ,1977

9. MEYBERG,K. : Lectures on algebras and triple systems, Lecture notes, Univ. of Virgin.,Charlottes-ville, 1972.

10. MEYBERG,K. : Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren,Habil.-Schr.,München,1969

11. MEYBERG,K. : Zur Konstruktion von Lie-Algebren aus Jordan-Tripelsystemen,Manuscr.Math.,3,S.115-132 (1970)

12. MOSTOW,G.,D. : A new proof of E.Cartan's theorem on the topologie of semisimple groups, Bull.Amer.Math.Soc., Bd.55,S.969-980,(1949)

13. RHINOW,G. : Über Automorphismenbahnen von Elementen $u \neq 0$ mit $(\mathrm{ad}\, u)^3 = \alpha \mathrm{ad}\, u$ in endlichdim. einf.kompl. Lie-Algebren,Manuscr.Math.,27,S.253-258,1979.

14. SUGIURA,M. : Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie-algebras,Journal of the Math.Soc.of Japan,Vol.11, S. 374-434, (1959)

15. TITS,J. : Une classe d'Algebres de Lie en Relation avec les Algebres de Jordan, Indag.Math. Bd.24,S.530-535 (1962)

Gerd Rhinow
Fachbereich 6 - Mathematik
der Gesamthochschule Siegen
Hölderlinstr. 3
D-5900 Siegen 21

(Eingegangen am 9. Oktober 1980)