manuscripta mathematica 30, 53 - 88 (1979)

manuscripta mathematica

REGULARITÄTSUNTERSUCHUNGEN VON LÖSUNGEN ELLIPTISCHER SYSTEME VON QUASILINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Per-Anders Ivert

Solutions of general, uniformly elliptic systems of quasilinear second order partial differential equations in divergence form are studied under the assumption that the right hand side of the system grows at most quadratically with respect to the gradient of the solution. A partial regularity result is obtained, asserting that in the general case, any weak solution with sufficiently small modulus (an explicit bound is given) has hölder continuous first order derivatives in a neighbourhood of almost every point of the domain of definition. For diagonal systems where the coefficients depend on the modulus, but in no other way, of the gradient of the unknown function, it is shown that regularity in fact holds throughout the domain.

INHALTSVERZEICHNIS

0. EINLEITUNG

In der folgenden Arbeit werden wir Differentialgleichungssysteme folgender Art studieren:

0025-2611/79/0030/0053/$07.20

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a^{i,\alpha}(x, u(x), \nabla u(x)) = f^i(x, u(x), \nabla u(x)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Der Form nach ist dies das allgemeinste System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Divergenzform. Das gesuchte u ist eine auf ein Teilgebiet des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ erklärte $\mathbb{R}^N$-wertige Funktion. Wir betrachten hier nun den Fall $n \geq 3$.

Unser Hauptergebnis, Satz II. 1, sagt aus, daß unter gewissen Strukturbedingungen der Gradient einer Lösung hölderstetig ist, wenn er sich durch einen konstanten Vektor hinreichend gut im L^2-Sinn approximieren läßt, und wenn die L^∞-Norm der Lösung kleiner als eine Zahl ist, die von den Parametern des Systems abhängt. Auch M. Giaquinta und G. Modica haben, in [6], denselben Satz behandelt und dabei auch bewiesen, daß, wenn $f^i = 0$, man nicht vorauszusetzen braucht, daß die Lösung beschränkt ist.

Als Korollar zum Satz II. 1 erhalten wir einen Satz über partielle Regularität, d.h. Regularität außerhalb einer abgeschlossenen Punktmenge mit dem Lebesguemaß Null (Satz II. 2). Satz II.1 wird auch im letzten Kapitel angewandt, hier um einen Regularitätssatz für Systeme in Diagonalform zu beweisen.

Obgleich wir Systeme von ziemlich allgemeiner Form hier studieren, werden wir, um die Darstellung nicht zu überlasten, uns nicht bemühen, die Voraussetzungen an ihrer Struktur, z.B. der Regularität der Funktionen $a^{i,\alpha}$, möglichst weit abschwächen. Wir beschränken uns stets auf gleichmäßig elliptische Systeme (vgl. (0.4)), doch werden wir für die rechte Seite das sogenannte quadratische Wachstum (0.5) zulassen. Ferner werden wir uns nur mit der Regularität im Innern des Definitionsbereiches beschäftigen, und sehen also von Randverhältnissen ab.

Die Resultate dieser Arbeit sind in meiner Dissertation [10] enthalten. Das Thema ist mir von meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. Kjell - Ove Widman, vorgeschlagen worden, und ich bin ihm großen Dank schuldig für sein förderliches Interesse und für viele anregende Diskussionen, die für die Arbeit von unschätzbarem Wert gewesen sind.

Bezeichnungen: Ω bezeichne stets eine offene Punktmenge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. $\Omega^1 \subset\subset \Omega^2$ bedeutet, daß Ω^2 die abgeschlossene Hülle des Gebietes Ω^1 enthält.

$\mathfrak{M}(N, n)$ sei der Raum der reellen Matrizen der Größe $N \times n$, auf dieselbe Weise wie $\mathbb{R}^{Nn}$ normiert.

Ist E ein Teilgebiet eines euklidischen Raumes, bezeichne $C^1(E;\mathbb{R}^\nu)$ den Raum der auf E erklärten, stetig differenzierbaren, $\mathbb{R}^\nu$-wertigen Funktionen. Die Räume $L^p(E;\mathbb{R}^\nu)$, $H^{k,p}(E;\mathbb{R}^\nu)$, $H^{k,p}_{loc}(E;\mathbb{R}^\nu)$, $H^{1,2}_o(E;\mathbb{R}^\nu)$ usw., bestehen aus $\mathbb{R}^\nu$-wertigen Funktionen, deren Komponenten den gewöhnlichen Lebesgue- bzw. Sobolevräumen $L^p(E)$, $H^{k,p}(E)$, $H^{k,p}_{loc}(E)$, $H^{1,2}_o(E)$ usw. zugehören. Wir sehen von der Tatsache ab, daß die Elemente dieser Klassen eigentlich keine Funktionen, sondern vielmehr Äquivalenzklassen von fast überall übereinstimmenden Funktionen sind. Wenn es sich um Multiplikation handelt, fassen wir die Elemente dieser Räume als Spaltenvektoren auf (d.h. wir identifizieren $\mathbb{R}^\nu$ mit $\mathfrak{M}(\nu, 1)$). Den Gradienten einer skalarwertigen Funktion fassen wir dagegen als einen Zeilenvektor auf; also wenn z.B. $u \in H^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, gilt $\nabla u \in L^2(\Omega;\mathfrak{M}(N, n))$.

Ist $A = (a^{i,\alpha})^{1\leq i\leq N}_{1\leq\alpha\leq n}$ eine $\mathfrak{M}(N,n)$-wertige Funktion auf Ω bezeichnet $\operatorname{div} A$ die $\mathbb{R}^N$-wertige Funktion $\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial a^{i,\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)^{1\leq i\leq N}$, die nach Divergenzbildung jeder Zeile entsteht.

$\operatorname{osc}(u, E)$ bezeichne die Oszillation der Funktion u im Gebiet E, d.h. $\operatorname{osc}(u, E) = \sup_{x,y\in E} |u(x) - u(y)|$. Für Mittelwerte benutzen wir das Symbol $⨍$: $⨍_E u(x)dx := (\operatorname{mes} E)^{-1} \int_E u(x)dx$.

Im Folgenden wird die Summationskonvention verwendet, d.h. über wiederholte Indizes wird summiert, von 1 bis n für griechische Buchstaben, von 1 bis N für lateinische.

Statt $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ und $\frac{\partial}{\partial x_\beta}$ schreiben wir D_α bzw. D_β. Ableitungen werden auch durch Indizes bezeichnet: $u_\alpha = D_\alpha u$, $a_{\xi^i_\alpha}(x,u,\xi) = \frac{\partial a}{\partial \xi^i_\alpha}(x,u,\xi)$ usw.

Ist $x_o \in \mathbb{R}^n$, bezeichnen wir mit $B(x_o, R)$ (oder mit $B(R)$, wenn kein Mißverständnis vorliegen kann) die Kugel $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_o| < R\}$.

Die "Abschneidefunktion" $\eta_{x_o, R}$ erklären wir folgendermaßen:

$$\eta_{x_o,R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |x-x_o| < R \\ 2 - \frac{1}{R}|x-x_o| & \text{wenn } R \le |x-x_o| < 2R \\ 0 & \text{wenn } 2R \le |x-x_o| \end{cases} \tag{0.1}$$

<u>Schwache Lösungen</u>: Sei $A = (a^{j,\beta})_{1 \le \beta \le n}^{1 \le j \le N}$ eine Borelfunktion $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n) \to \mathfrak{M}(N,n)$ und f eine Borelfunktion $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n) \to \mathbb{R}^N$. Wir sagen dann, daß $u \in H^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des Differentialgleichungssystems

$$-\operatorname{div} A(x, u(x), \nabla u(x)) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \tag{0.2}$$

ist, falls für jedes $\varphi \in L^\infty \cap H_o^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\int_\Omega a^{j,\beta}(x,u,\nabla u)\, D_\beta \varphi^j(x)\, dx = \int_\Omega \varphi(x) \cdot f(x,u,\nabla u)\, dx. \tag{0.3}$$

Wenn $g \in L^1(\Omega; \mathfrak{M}(N,n))$ können wir auch das System

$$-\operatorname{div} A(x,u(x), \nabla u(x)) = f(x,u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div} g(x) \tag{0.2'}$$

betrachten, und wir erklären hier eine schwache Lösung mit der Bedingung

$$\int_\Omega a^{j,\beta}(x,u,\nabla u) D_\beta \varphi^j dx = \int_\Omega \varphi \cdot f(x,u,\nabla u) dx + \int_\Omega g^{j,\beta} D_\beta \varphi^j\, dx \tag{0.3'}$$

für jede Lipschitzstetige Funktion $\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ mit $\varphi(x) = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir nehmen stets an, daß die Systeme (0.2) und (0.2') gleichmäßig elliptisch sind, und außerdem, daß A gewisse Regulaitätsbedingungen erfüllt:

$$|A(x,u,\xi)| + |\nabla_x A(x,u,\xi)| + |\nabla_u A(x,u,\xi)| \leq \mu(1+|\xi|)$$

(0.4)
$$|\nabla_\xi A(x,u,\xi)| \leq \mu$$

$$a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x,u,\xi)\,\eta^i_\alpha \eta^j_\beta \geq \lambda|\eta|^2$$

für gewisse positive Zahlen λ und μ und für alle $(x,u,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n) \times \mathfrak{M}(N,n)$

Für f nehmen wir stets die "quadratische Wachstumsbedingung" an:

(0.5)
$$|f(x,u,\xi)| \leq a|\xi|^2 + b \qquad (a,b \geq 0)$$

Unter den Voraussetzungen (0.4) und (0.5) werden (0.3) und (0.3') sinnvoll. Wenn $g \in L^2(\Omega;\mathfrak{M}(N,n))$, können wir offensichtlich, nach einem Approximationsverfahren, zulassen, daß die Testfunktion φ auch in (0.3') eine beliebige beschränkte Funktion aus $H^{1,2}_o(\Omega;\mathbb{R}^N)$ sein kann.

I. INTEGRALABSCHÄTZUNGEN

Wir betrachten das System (0.2) und die Voraussetzungen (0.4) und (0.5). Hieraus erhalten wir

(1.1)
$$a^{j,\beta}(x,u,\xi)\xi^j_\beta = a^{j,\beta}(x,u,0)\xi^j_\beta + \int_0^1 \frac{d}{dt}\, a^{j,\beta}(x,u,t\xi)dt\,\xi^j_\beta =$$
$$= a^{j,\beta}(x,u,0)\xi^j_\beta + \int_0^1 a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x,u,t\xi)\xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta\,dt \geq \lambda|\xi|^2 - \mu|\xi| \geq$$
$$\geq (\lambda - \varepsilon)\,|\xi|^2 - \frac{\mu^2}{4\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Sei nun u eine beschränkte schwache Lösung des betrachteten Systems mit $\sup|u(x)| = M$ und

(1.2) $$2aM < \lambda$$

Wir wählen in (0.3) die Testfunktion $\varphi = \eta^2(u - \bar{u})$, wo $\bar{u} = \fint_{B(x_o, 2R)} u(x)dx$ nach η die in (0.1) erklärte Funktion $\eta_{x_o, R}$ ist. Hier ist $x_o \in \Omega$ und $0 < R < \frac{1}{6}$ Dist $(x_o, \partial\Omega)$:

$$\int a^{j,\beta}(x, u, \nabla u)[\eta^2 u^j_\beta + 2\eta\eta_\beta(u^j - \bar{u}^j)]\,dx = \int \eta^2(u-\bar{u})\cdot f(x, u, \nabla u)dx.$$

$$(\lambda - 2aM - \epsilon)\int \eta^2 |\nabla u|^2 dx \le (\frac{\mu^2}{4\epsilon} + 2bM)\int \eta^2 dx + 2\mu\int \eta|\nabla\eta|\,|u-\bar{u}|(1+|\nabla u|)dx.$$

Wegen (1.2) ergibt sich

(1.3) $$\int \eta^2 |\nabla u|^2 dx \le c_1 \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2\,|u - \bar{u}|^2)dx$$

worauf die Poincaré-Sobolev-Ungleichung

$$\fint_{B(R)} (1 + |\nabla u|^2)dx \le c_2 \Big(\fint_{B(2R)} (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n}{n+2}}\, dx\Big)^{\frac{n+2}{n}}$$

liefert. Wir können nun mit Hilfe von Prop. 5.1 in [5] schließen, daß es Zahlen $p = p(n, \lambda, \mu, a, b, M) > 1$ und $c_3 = c(n, \lambda, \mu, a, b, M)$ gibt, mit $|\nabla u| \in L^{2p}_{loc}(\Omega)$ und

(1.4) $$\fint_{B(x_o, R)} (1 + |\nabla u|^2)^p dx \le c_3 \Big(\fint_{B(x_o, 2R)} (1 + |\nabla u|^2)dx\Big)^p$$

für jede Kugel $B(x_o, R)$ mit $R < \mathrm{Min}(1, \frac{1}{2}\mathrm{Dist}\,(x_o, \partial\Omega))$.

Wir erstreben nun eine Abschätzung für den L^2-Stetigkeitsmodul des Gradienten: Sei $x_o \in \Omega$, $0 < R < \frac{1}{6}\mathrm{Dist}(x_o, \partial\Omega)$ und $\eta = \eta_{x_o, R}$. Man untersuche (0.3) mit $\varphi = \Delta_{-h}[\eta^2(\Delta_h u - \xi h)]$, wo $\xi \in \mathfrak{M}(N, n)$, und Δ_h für $h \in \mathbb{R}^n$ ein Differenzenoperator ist: $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Für diesen gelten die Rechenregeln:

$$\Delta_h(fg)(x) = f(x+h)\,\Delta_h g(x) + g(x)\,\Delta_h f(x)$$

$$\int f(x)\,\Delta_h g(x)dx = \int g(x)\,\Delta_{-h} f(x)\,dx$$

Wir setzen $|h| \leq R$ voraus.

$$(1.5)\qquad \int \Delta_h[a^{j,\beta}(x,u,\nabla u)]\,[\eta^2\Delta_h u^j_\beta + 2\eta\eta_\beta(\Delta_h u - \xi h)]dx =$$

$$= \int \Delta_{-h}[\eta^2(\Delta_h u - \xi h)]\cdot f(x,u,\nabla u)\,dx.$$

Man findet leicht

$$(1.6)\qquad \Delta_h[a^{j,\beta}(x,u(x),\nabla u(x)] =$$

$$= \int_0^1 a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x+h,\, u(x+h),\, (1-t)\nabla u(x) + t\nabla u(x+h))dt\ \Delta_h u^i_\alpha(x) +$$

$$+ \int_0^1 a^{j,\beta}_{u^i}(x+h,\, (1-t)u(x) + tu(x+h), \nabla u(x))dt\ \Delta_h u^i(x) +$$

$$+ \int_0^1 a^{j,\beta}_{x_\alpha}(x+th,\, u(x), \nabla u(x))dt\ h_\alpha =: \tilde{a}^{\alpha\beta}_{ij}\Delta_h u^i_\alpha + \tilde{a}^{j,\beta}$$

wo $\tilde{a}^{\alpha\beta}_{ij}\eta^i_\alpha\eta^j_\beta \geq \lambda|\eta|^2$ und $|\tilde{a}^{j,\beta}| \leq \mu(1+|\nabla u|)(|h|+|\Delta_h u|)$.

Übliches Abschätzen ergibt aus (1.5) und (1.6):

$$(1.7)\qquad \int\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2 dx \leq c_4\int\{|\Delta_{-h}(\eta^2(\Delta_h u-\xi h))|(1+|\nabla u|^2) +$$

$$+ \eta^2(1+|\nabla u|^2)(|h|^2+|\Delta_h u|^2) + |\nabla\eta|^2|\Delta_h u - \xi h|^2\}\,dx$$

Sei p der in (1.4) angegebene Exponent, und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$:

$$\int_{B(2R)}\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2 dx \leq c_5\Big(\int_{B(3R)}|\Delta_{-h}(\eta^2(\Delta_h u-\xi h))|^q dx\Big)^{1/q}\Big(\int_{B(3R)}(1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ c_4\Big(\int_{B(2R)}(|h|^2+|\Delta_h u|^2)^q dx\Big)^{1/q}\Big(\int_{B(2R)}(1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} + \frac{c_4}{R^2}\int_{B(2R)}|\Delta_h u-\xi h|^2 dx$$

Wir können $2p < q$, d.h. $p < \frac{3}{2}$, annehmen. Dann gilt, da $|u| \leq M$:

$$\Big(\int_{B(3R)}|\Delta_{-h}(\eta^2(\Delta_h u-\xi h))|^q dx\Big)^{1/q} \leq 2\Big(\int_{B(2R)}|\eta^2(\Delta_h u-\xi h)|^q dx\Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq 2\Big(\int_{B(2R)} |\Delta_h u|^q dx\Big)^{1/q} + 2|\xi|\,|h| \leq c_6\Big(\int_{B(2R)} |\Delta_h u|^{2p} dx\Big)^{1/q} + 2|\xi|\,|h|.$$

Ferner gilt für fast alle $x \in B(3R)$ und fast alle h mit $|h| \leq R$:

$$\Delta_h u(x) = \int \nabla u(x+th)\,dt\cdot h\,,\quad \Delta_h u(x) - \xi h = \int_0^1 (\nabla u(x+th) - \xi)\,dt\cdot h$$

Also gilt

$$\int_{B(2R)} |\Delta_h u(x)|^{2p} dx \leq |h|^{2p} \int_0^1 \int_{B(2R)} |\nabla u(x+th)|^{2p}\,dx\,dt \leq |h|^{2p} \int_{B(3R)} |\nabla u(x)|^{2p} dx$$

und

$$\int_{B(2R)} |\Delta_h u(x) - \xi h|^2\,dx \leq |h|^2 \int_{B(3R)} |\nabla u(x) - \xi|^2\,dx$$

Folglich erhalten wir

$$\int_{B(2R)} \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx \leq c_7 |h|^{\frac{2p}{q}} \Big(\int_{B(3R)} (1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/q} \Big(\int_{B(3R)} (1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ c_7 |h|\,|\xi|\Big(\int_{B(3R)} (1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} + c_7 \frac{|h|^2}{R^2} \int_{B(3R)} |\nabla u - \xi|^2 dx \leq$$

$$\leq c_8 |h|^{2(p-1)} \Big(\int_{B(6R)} (1+|\nabla u|^2) dx\Big)^p + c_8 |h|^{\frac{2-p}{p-1}} |\xi|^{\frac{p}{p-1}} + c_7 \frac{|h|^2}{R^2} \int_{B(3R)} |\nabla u - \xi|^2 dx.$$

Wir schätzen auch den L^2-Stetigkeitsmodul der Funktion $\eta(\nabla u - \xi)$ ab:

$$|\Delta(\eta(\nabla u - \xi))|^2 \leq 2\eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 + 2\frac{|h|^2}{R^2} |\nabla u(x+h) - \xi|^2\ ;$$

$$\int |\Delta_h(\eta(\nabla u - \xi))|^2 dx \leq A^2 |h|^{2(p-1)}$$

wo $A^2 = c_9 R^n \Big\{\Big(\int_{B(6R)} (1+|\nabla u|^2) dx\Big)^p + (R^{3-2p}|\xi|)^{\frac{p}{p-1}}\Big\} + c_9 \int_{B(3R)} |\nabla u - \xi|^2 dx$

(man bemerke, daß $|h| \leq R$).

Jetzt können wir das Integral $\int_{B(R)} |\nabla u - \xi|^s dx$ für einen Exponent $s > 2$ abschätzen. Dazu brauchen wir das folgende Lemma vom Sobolev-Typ:

LEMMA I. 1: Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ und $0 < \alpha < 2$. Ferner habe der L^2-Stetigkeitsmodul für f:

$$\omega(h) := \left(\int |f(x+h)-f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

die Eigenschaft $\omega(h) \leq A|h|^{\alpha}$ für $|h| \leq R$.
Dann ist $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$, für $s = \frac{2n}{n-\alpha}$, und

$$\left(\int |f(x)|^s dx\right)^{2/s} \leq C(n,\alpha)\left(A^2 R^{\alpha} + \left(\int |f(x)|^2 dx\right) R^{-\alpha}\right)$$

Beweis: Wir übernehmen die Beweistechnik von [13], Kap V, §3.5. Sei $\hat{f}$ die durch Fourier-Transformation aus f entstehende Funktion, und $\hat{g}(x) = (2\pi|x|)^{\alpha/2}\hat{f}(x)$. Die Fourier-Transformation erklären wir für integrables f durch $\hat{f}(x) = \int e^{-2\pi i x\cdot y} f(y)dy$. Nun gilt

$$(2\pi|x|)^{\alpha} = C(\pi,\alpha) \int \frac{|e^{-2\pi i x\cdot h} - 1|^2}{|h|^{n+\alpha}} \, dh \quad ,$$

da das Integral offensichtlich für jedes x konvergiert und eine mit dem Exponent α homogene Funktion darstellt.
Der Plancherel'sche Satz liefert

$$\int |\hat{g}(x)|^2 dx = C(n,\alpha) \iint |h|^{-n-\alpha} |e^{-2\pi i x\cdot h}\hat{f}(x) - \hat{f}(x)|^2 \, dx\, dh =$$

$$= C(n,\alpha)\left(\int_{|h|<R} |h|^{-n-\alpha} \omega(h)^2 dh + \int_{|h|>R} |h|^{-n-\alpha} \omega(h)^2 dh\right) \leq$$

$$\leq C'(n,\alpha)\left(A^2 R^{\alpha} + \|f\|_{L^2}^2 R^{-\alpha}\right).$$

$\hat{g}$ ist also L^2 zugehörig und entsteht damit durch Fourier-Transformation einer L^2-Funktion g mit $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{L^2}$.
f ist das Riesz'sche $\frac{\alpha}{2}$ - Potential von g:

$$f(x) = I_{\alpha/2}(g)(x) = \frac{\Gamma(\frac{2n-\alpha}{4})}{\pi^{n/2} 2^{\alpha/2} \Gamma(\frac{\alpha}{4})} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\frac{\alpha}{2}-n} g(y)\, dy$$

Das Lemma von Hardy-Littlewood-Sobolev liefert nun die Behauptung (vgl. [13], Kap. 5, §1).

Wenn wir dieses Lemma auf die Funktion $\eta(\nabla u-\xi)$ anwenden, erhalten wir, mit $s = \frac{2n}{n-(p-1)}$:

$$\Big(\int_{B(R)}|\nabla u-\xi|^s dx\Big)^{2/s} \leq c_{10}\, R^{n+p-1}\Big(\int_{B(6R)}(1+|\nabla u|^2)dx\Big)^p +$$

$$+\; c_{10}\, R^{n-1}(R^{2-p}|\xi|)^{\frac{p}{p-1}} + c_{10}\, R^{1-p}\int_{B(3R)}|\nabla u-\xi|^2 dx.$$

$$(1.8)\quad \Big(\fint_{B(R)}|\nabla u-\xi|^s dx\Big)^{2/s} \leq c_{11}\Big(\fint_{B(3R)}|\nabla u-\xi|^2 dx + R^{2p-2}\Big(\fint_{B(6R)}(1+|\nabla u|^2)dx\Big)^p +$$

$$+\; (R^{2-p}|\xi|^p)^{\frac{1}{p-1}}\Big).$$

Diese Abschätzung ist also unter den Voraussetzungen (0.4), (0.5) und (1.2) erzielt worden, und die Konstante c_{11} hängt nur von n, λ, μ, a, b und M ab.

Ladyzhenskaya und Ural'ceva ([11], Kap. 4, §5) folgend, werden wir nun eine Untersuchung über die Existenz und die Integrabilität schwacher Ableitungen zweiter Ordnung durchführen. Zuerst formulieren wir die folgende

<u>Behauptung</u>: Wenn außer (0.4) und (0.5) auch die zusätzlichen Bedingungen

$$f \in C^1(\Omega\times\mathbb{R}^N\times \mathfrak{M}(N,n);\mathbb{R}^N)$$

$$(1.9)\qquad |\nabla_x f(x,u,\xi)| + |\nabla_u f(x,u,\xi)| \leq a'(1+|\xi|^2)$$

$$|\nabla_\xi f(x,u,\xi)| \leq a'(1+|\xi|)$$

gelten, dann gibt es eine positive Zahl $\delta = \delta(n,\lambda,\mu,a,a')$, so daß, wenn u eine schwache Lösung des Systems (0.2) ist, und $\operatorname{osc}(u,B) < \delta$ für jede Kugel $B \subset \Omega$, deren Radius kleiner als eine gewisse Zahl R_o ist, so ist u den Klassen $H^{2,2}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ und $H^{1,4}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ zugehörig, und die Integrale $\int_{\Omega'}|D^2u|^2 dx$ und $\int_{\Omega'}|\nabla u|^4 dx$ sind für jedes Teilgebiet $\Omega' \subset\subset \Omega$ durch $n, \lambda, \mu, a, b, R_o$, $\operatorname{diam}(\Omega')$ und $\operatorname{Dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abschätzbar.

Bemerkung: Die Abschätzung ist also von a' nicht abhängig, und gilt auch, wenn man die Bedingungen (1.9) durch die Annahme der Zugehörigkeit zu $H^{2,2}_{loc}$ oder zu $H^{1,4}_{loc}$ ersetzt. In diesem Fall hängt δ nur von n, λ, μ und a ab.

Beweis: Man betrachte einen Punkt $x_o \in \Omega$. Seien

$$0 < R < \frac{1}{3}\operatorname{Min}(R_o; \operatorname{Dist}(x_o, \partial\Omega)), \quad \bar{u} = \fint_{B(2R)} u(x)dx \quad \text{und} \quad \eta = \eta_{x_o, R} \ .$$

Man untersuche zunächst (0.3) mit $\varphi = \eta^2 |\Delta_h u|^2 (u-\bar{u})$:

$$\int a^{j,\beta}(x,u,\nabla u)[\eta^2 |\Delta_h u|^2 u^j_\beta + 2\eta^2 \Delta_h u^i \Delta_h u^i_\beta (u-\bar{u}) + 2\eta\eta_\beta |\Delta_h u|^2 (u-\bar{u})]dx =$$

$$= \int \eta^2 |\Delta_h u|^2 (u-\bar{u}) \cdot f(x,u,\nabla u)dx$$

Wegen (0.4) und (1.1) ergibt sich hier

$$\begin{aligned}(\lambda - a\operatorname{osc}(u, B(2R)) - \epsilon) \int \eta^2 |\Delta_h u|^2 |\nabla u|^2 dx \quad &\leq \\ \leq \left(\frac{\mu^2}{4\epsilon} + b\operatorname{osc}(u, B(2R))\right) \int \eta^2 |\Delta_h u|^2 dx \quad &+ \\ + 2\mu \int |u-\bar{u}|\, (1+|\nabla u|)(\eta^2 |\Delta_h u|\, |\Delta_h \nabla u| + \eta |\nabla\eta|\, |\Delta_h u|^2)dx.\end{aligned}$$

Wir setzen $2a\delta \leq \lambda$ voraus und erhalten:

$$(1.10) \quad \int \eta^2 |\Delta_h u|^2 |\nabla u|^2 dx \leq c_{12} \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) |\Delta_h u|^2 dx + c_{12}\delta^2 \int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx.$$

Um das letzte Glied abzuschätzen, betrachten wir (1.5) und (1.7) mit $\xi = 0$:

$$\int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx \leq c_{13} \int |\Delta_h [f(x,u,\nabla u)]| \cdot \eta^2 |\Delta_h u| dx \ +$$

$$+ \ c_4 \int [\eta^2 (1+|\nabla u|^2)(|h|^2 + |\Delta_h u|^2) + |\nabla\eta|^2 |\Delta_h u|^2] dx \ .$$

Analog zu (1.6) finden wir

$$|\Delta_h [f(x,u,\nabla u)]| \leq a'(1+|\nabla u(x)| + |\nabla u(x-h)|)|\Delta_h \nabla u| + a'(1+|\nabla u|^2)(|h| + |\Delta_h u|).$$

$$(1.11)\quad \int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx \le c_{14} \int [\eta^2 (1+|\nabla u|^2)(|h|^2 + |\Delta_h u|^2) + |\nabla\eta|^2 |\Delta_h u|^2 +$$
$$+ \eta^2 |\nabla u(x+h)|^2 \, |\Delta_h u|^2 \,]\, dx.$$

Nun gilt $\int \eta(x)^2 |\nabla u(x+h)|^2 \, |\Delta_h u(x)|^2 dx = \int \eta(x-h)^2 |\nabla u(x)|^2 |\Delta_{-h} u(x)|^2 dx.$

Wenn man in (1.10) h durch -h und $\eta(x)$ durch $\eta(x-h)$ ersetzt, erhält man:

$$(1.12)\qquad \int \eta(x-h)^2 |\Delta_{-h} u|^2 \, |\nabla u|^2 dx \le$$
$$\le c_{12} \int (\eta(x-h)^2 + |\nabla\eta(x-h)|^2) \, |\Delta_{-h} u|^2 dx \, +$$
$$+ \, c_{12} \delta^2 \int \eta(x-h)^2 \, |\Delta_{-h} \nabla u|^2 \, dx =$$
$$= c_{12} \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) \, |\Delta_h u|^2 dx + c_{12} \delta^2 \int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx$$

Einsetzung von (1.10) und (1.12) in (1.11) ergibt

$$\int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx \le c_{15} \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2)(|h|^2 + |h|^2 |\nabla u|^2 + |\Delta_h u|^2) dx \, +$$
$$+ \, c_{15} \delta^2 \int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx.$$

Sei nun δ so klein, daß $c_{15} \delta^2 \le \frac{1}{2}$:

$$\int \eta^2 \, \frac{|\nabla u(x+h) - \nabla u(x)|^2}{|h|^2} \, dx \le 2\, c_{15} \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2)(1 + |\nabla u|^2 + \frac{|u(x+h) - u(x)|^2}{|h|^2}) dx$$

Da $\limsup\limits_{h \to 0} \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) \, \frac{|u(x+h) - u(x)|^2}{|h|^2} = \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2) |\nabla u|^2 dx < \infty$,

erhalten wir $\nabla u \in H^{1,2}_{loc}$, d.h. $u \in H^{2,2}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Sehen wir nun von (1.9) ab, und nehmen wir stattdessen an, daß $u \in H^{2,2}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Aus (1.10) ergibt sich mit Hilfe des Fatou'schen Lemmas

(1.13) $\int\eta^2|\nabla u|^4 dx \le c_{12}\int(\eta^2+|\nabla\eta|^2)\ |\nabla u|^2 dx + c_{12}\delta^2\int\eta^2|D^2u|^2 dx < \infty$,

und aus (1.7) mit $\xi = 0$:

$$\int\eta^2|D^2u|^2 dx \le c_4\int[(\eta^2|D^2u| + 2\eta|\nabla\eta|\,|\nabla u|)(1+|\nabla u|^2) + \eta^2(1+|\nabla u|^2)^2 +$$

$$+|\nabla\eta|^2|\nabla u|^2]dx \le \frac{1}{2}\int\eta^2|D^2u|^2 dx + c_{16}\int[\eta^2(1+|\nabla u|^4) + |\nabla\eta|^2|\nabla u|^2]dx;$$

(1.14) $\int\eta^2|D^2u|^2 dx \le 2c_{16}\int[\eta^2(1+|\nabla u|^4)+|\nabla\eta|^2|\nabla u|^2]\ dx.$

Man kombiniere (1.13) und (1,14):

$$\int\eta^2|D^2u|^2 dx \le c_{17}\int(\eta^2+|\nabla\eta|^2)(1+|\nabla u|^2)dx + c_{17}\delta^2\int\eta^2|D^2u|^2 dx$$

Wenn $c_{17}\delta^2 \le \frac{1}{2}$, erhalten wir

$$\int\eta^2|D^2u|^2 \le 2\,c_{17}\int(\eta^2+|\nabla\eta|^2)\,(1+|\nabla u|^2)\,dx$$

worauf (wenn auch $2a\delta < \lambda$) (1.3) die Abschätzung

$$\int_{B(R)}|D^2u|^2 dx \le c_{18}R^{n-4} \quad \text{liefert.}$$

Auch wenn wir vorziehen, $u \in H^{1,4}_{loc}$ statt $u \in H^{2,2}_{loc}$ anzunehmen, können wir dasselbe Ergebnis erhalten. Zu diesem Zweck kehren wir zu (1.7) zurück.

Da

$$\int|\Delta_{-h}(\eta^2\Delta_h u)|^2 dx = \int\Big|\int_0^1\nabla(\eta^2\Delta_h u)(x-th)dt\cdot h\Big|^2 dx \le$$

$$\le |h|^2\int_0^1\int|\nabla(\eta^2\Delta_h u)(x-th)|^2 dx\,dt = |h|^2\int|\nabla(\eta^2\Delta_h u)|^2\,dx \le$$

$$\le 2|h|^2\int\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2 dx + 4|h|^2\int\eta^2|\nabla\eta|^2\,|\Delta_h u|^2\,dx$$

erhalten wir

$$\int \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 dx \leq c_{19} \int_{B(3R)} [\,|\nabla\eta|^2 |\Delta_h u|^2 + |h|^2 (1+|\nabla u|^2)^2 +$$

$$+ (1+|\nabla u|^2)(|h|^2 + |\Delta_h u|^2)]\, dx$$

worauf

$$\limsup_{h \to 0} \int \eta(x)^2 \frac{|\nabla u(x+h) - \nabla u(x)|^2}{|h|^2} dx \leq$$

$$\leq 2\, c_{19} \int_{B(3R)} [\,|\nabla\eta|^2 |\nabla u|^2 + (1+|\nabla u|^2)^2]\, dx < \infty ,$$

und wir erhalten wieder (1. 13) und (1. 14). Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Zum Schluß werden wir unter geeigneten Voraussetzungen ein Differentialgleichungssystem herleiten, das der Gradient ∇u erfüllt. Vom formalen Standpunkt aus handelt es sich um Ableiten des gegebenen Systems.

Wir nehmen außer (0. 4) und (0. 5) an, daß $u \in H^{2,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Es sei $\zeta \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω. Wir untersuchen das System (0. 2) mit der Testfunktion $\varphi(x) = D_\gamma \zeta(x)$ $(\gamma \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\int a^{j,\beta}(x,u,\nabla u)\, D_\gamma \zeta^j_\beta\, dx = \int D_\gamma \zeta \cdot f(x,u,\nabla u) dx.$$

Nach (0. 4) gilt, daß die Funktionen $\tilde{a}^{j,\beta}(x) := a^{j,\beta}(x,u(x),\nabla u(x))$ in $H^{1,1}(\Omega)$ sind, und daß

$$D_\gamma \tilde{a}^{j,\beta}(x) = a^{j,\beta}_{x_\gamma}(x,u,\nabla u) + a^{j,\beta}_{u^i}(x,u,\nabla u) D_\gamma u^i + a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x,u,\nabla u) D_\alpha u^i_\gamma .$$

Also erhalten wir

$$(1.15)\quad \int a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x,u,\nabla u) D_\alpha u^i_\gamma D_\beta \zeta^j dx = \int D_\beta \zeta^i [-\delta^\beta_\gamma f^j(x,u,\nabla u) -$$

$$- a^{j,\beta}_{u^i}(x,u,\nabla u) u^i_\gamma - a^{j,\beta}_{x_\gamma}(x,u,\nabla u)]\, dx = \int D_\beta \zeta^j \tilde{f}^{j,\gamma,\beta}(x,u,\nabla u) dx$$

wo $|\tilde{f}(x,u,\xi)| \leq c_{20}(1+|\xi|^2)$.

Die bedeutet aber, daß $v := u_\gamma$ eine schwache Lösung des Systems

$$D_\beta[a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x,u,\nabla u)\, D_\alpha v^i] = \operatorname{div} \tilde{f}^{j,\gamma}, \qquad 1 \leq j \leq N,$$

ist. Da nach den vorherigen Überlegungen $|\nabla u| \in L^4_{loc}$, können wir in (1.15) als Testfunktion eine beliebige Funktion aus $H^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger zulassen.

II. PARTIELLE REGULARITÄT

Unter dem Begriff partieller Regularität einer auf Ω erklärten Funktion u verstehen wir die Existenz eines offenen Teilgebietes $\Omega_o \subset \Omega$, dessen Komlementärmenge das Lebesguemaß Null hat, so daß u eine gewisse Regularität in Ω_o besitzt. Frühere Resultate über die partielle Regularität für Lösungen quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme sind von u. a. C. B. Morrey Jr., E. Giusti und M. Miranda erzielt worden (vgl. [12], [8], [9]). Das "quadratische Wachstum" ist hier doch nicht zulässig. Voriges Jahr ist ein Artikel [4] von M. Giaquinta und E. Giusti erschienen, wo partielle Regularität unter der quadratischen Wachstumsbedingung bewiesen worden ist. Man betrachtet hier gleichmäßig elliptische Systeme der Form

$$D_\beta(A^{\alpha\beta}(x,u)\, D_\alpha u) = f(x,u,\nabla u),$$

wo die $A^{\alpha\beta}$ stetige $\mathfrak{M}(N,N)$-wertige Funktionen auf $\Omega \times \mathbb{R}^N$ sind. Es wird dann bewiesen, daß es für jede schwache Lösung u, die (1.2) erfüllt, eine offene Punktmenge $\Omega_o \subset \Omega$ gibt, deren Komplement von Hausdorffdimension kleiner als $n-2$ ist, so daß u mit beliebigem Exponent auf Ω_o hölderstetig ist.

Wir werden in diesem Kapitel einen Satz über partielle Regularität beweisen, die auf Systeme von ganz allgemeiner Form anwendbar ist. Wir lassen auch das quadratische Wachstum zu, jedoch mit der Einschränkung (1.2). Dieser Satz (Satz II.2) ist ein einfaches Korollar zu dem grundlegenden Satz II.1, für welchen die verwendete Beweistechnik von ähnlichen, von S. Campanato [2], F.J Almgren, Jr. [1] und C.B. Morrey, Jr. [12] verwendeten Methoden herstammt. K. Uhlenbeck hat in [14] dieselbe Technik benutzt, und ein ähnlicher Beweis befindet sich in [6].

SATZ II.1: Man betrachte das Differentialgleichungssystem

$$-\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u).$$

Hier ist $A = (a^{j,\beta})_{1\le\beta\le n}^{1\le j\le N} \in C^1(\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathfrak{M}(N,n);\mathfrak{M}(N,n))$, und f ist eine auf $\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathfrak{M}(N,n)$ erklärte, $\mathbb{R}^N$-wertige Borelfunktion. A und f sollen die Strukturbedingungen (0.4) und (0.5) erfüllen, und außerdem fordern wir, daß für ein $\sigma > 0$ es gelte

$$|\nabla_\xi A(x,u,\xi_1) - \nabla_\xi A(x,u,\xi_2)| \le \mu|\xi_1-\xi_2|^\sigma \tag{2.1}$$

$$\text{für } (x,u,\xi_1,\xi_2) \in \Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathfrak{M}(N,n)\times\mathfrak{M}(N,n).$$

Sei M eine positive Zahl mit $2aM < \lambda$.
Dann gibt es positive Zahlen $\varepsilon = \varepsilon(N,n,\lambda,\mu,a,b,M,\sigma)$ und $\tau = \tau(N,n,\lambda,\mu,a,b,M,\sigma)$, so daß Folgendes gilt:
Ist $u \in H^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung des betrachteten Systems mit $\sup|u(x)| \le M$, ist $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathfrak{M}(N,n)$, $0 < R < \min(\operatorname{Dist}(x_0,\partial\Omega);(1+|\xi_0|^4)^{-1/\tau})$, und gilt $\int_{B(x_0,R)} |\nabla u-\xi_0|^2 dx<\varepsilon$, dann ist ∇u auf $B(x_0,\frac{R}{2})$ hölderstetig; es gibt eine Konstante $C(R)$ mit $|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \le C(R)\,|x-y|^{\tau/2}$ für $x,y \in B(x_0,\frac{R}{2})$

Beweis: u erfüllt also das System

$$-D_\beta[a^{j,\beta}(x,u,\nabla u)] = f^j(x,u,\nabla u), \quad j = 1,2,\dots,N.$$

Man setze $\bar{u} = \displaystyle\fint_{B(R/6)} u(x)dx$ und $u_o(x) = \bar{u} + \xi_o(x-x_o)$, wobei

$\nabla u_o(x) = \xi_o$ und $\displaystyle\int_{B(R/6)} (u(x)-u_o(x))\, dx = 0$.

Die Kugeln $B(\rho)$ haben alle den Mittelpunkt x_o).

Wir erklären den Differentialoperator $\tilde{L} = (\tilde{L}_{ij})_{1\leq i,\, j\leq N}$ durch

$$(\tilde{L}\, v)_j = \tilde{L}_{ij} v^i = a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x_o, \bar{u}, \xi_o) \frac{\partial^2 v^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} .$$

Er hat also konstante Koeffizienten.

Das gegebene System kann folgenderweise geschrieben werden:

$$-D_\beta[a^{j,\beta}(x,u,\nabla u)-a^{j,\beta}(x_o,\bar{u},\nabla u)+a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x_o,\bar{u},\xi_o)(u^i_\alpha-\xi^i_{o\alpha})+R^{j,\beta}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o)]$$

$$= f^j(x,u,\nabla u), \qquad j = 1,2,\dots,N,$$

oder

$$-\tilde{L}(u-u_o) = f(x,u,\nabla u)+\mathrm{div}[A(x,u,\nabla u)-A(x_o,\bar{u},\nabla u)]-\mathrm{div}\mathbf{R}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o)$$

Hier ist $\mathbf{R} = (R^{j,\beta})^{1\leq j\leq N}_{1\leq \beta\leq n}$,

$$R^{j,\beta}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o) = a^{j,\beta}(x_o,\bar{u},\nabla u)-a^{j,\beta}(x_o,\bar{u},\xi_o)-a^{j,\beta}_{\xi^i_\alpha}(x_o,\bar{u},\xi_o)(u^i_\alpha-\xi^i_{o\alpha}),$$

und unsere Voraussetzungen ergeben die Abschätzung

$$|\mathbf{R}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o)| \leq c_{21}|\nabla u - \xi_o|^{1+k} \quad \text{für beliebiges } k\in[0,\sigma].$$

Wir erklären nun $\tilde{u} \in H^{1,2}(B(\frac{R}{6});\mathbb{R}^N)$ durch

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{u} = 0 & \text{in } B(\frac{R}{6}) \\ \tilde{u} - (u-u_o) \in H^{1,2}_o(B(\frac{R}{6});\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Dann ist

$$\tilde{L}(\tilde{u}-(u-u_o)) = f(x,u,\nabla u)+\mathrm{div}[A(x,u,\nabla u)-A(x_o,\bar{u},\nabla u)]-\mathrm{div}\mathbf{R}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o).$$

Diese Gleichung untersuchen wir mit der Testfunktion $\tilde{u}-(u-u_o)$:

$$\lambda \int_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx \le \int_{B(R/6)} |\tilde{u}-(u-u_o)|\,(a|\nabla u|^2+b)dx \ +$$

$$+ \int_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|\ (|A(x,u,\nabla u)-A(x_o,\bar{u},\nabla u)| + |\mathfrak{R}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o)|)dx\,;$$

$$(2.2)\quad \fint_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx \le c_{22}\Big(\fint_{B(R/6)} |\tilde{u}-(u-u_o)|^q dx\Big)^{1/q}\Big(\fint_{B(R/6)}(1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ \ c_{22}\fint_{B(R/6)}(|A(x,u,\nabla u)-A(x_o,\bar{u},\nabla u)|^2 + |\mathfrak{R}(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o)|^2)\,dx.$$

Hier ist p wieder der Exponent aus (1.4), und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Nach dem Beschränkungsprinzip für elliptische Systeme mit konstanten Koeffizienten (vgl. [4], Lemma 1.3, für den Beweis [3], Satz 7.1) gilt

$$\sup_{B(R/6)} |\tilde{u}(x)| \le c_{23} \sup_{B(R/6)} |u-u_o| \le c_{24}(1+R|\xi_o|),$$

weshalb

$$c_{22}\Big(\fint_{B(R/6)} |\tilde{u}-(u-u_o)|^q dx\Big)^{1/q}\Big(\fint_{B(R/6)}(1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} \le$$

$$\le c_{25}(1+R|\xi_o|)^{1-\frac{2n}{q(n-2)}}\Big(\fint_{B(R/6)} |\tilde{u}-(u-u_o)|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{1/q}\fint_{B(R/3)}(1+|\nabla u|^2)dx \le$$

$$\le c_{26}(1+R|\xi_o|)^{\frac{1-k}{1+k}}\Big(R^2\int_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx\Big)^{\frac{k}{1+k}}\fint_{B(R/3)}(1+|\nabla u|^2)dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\fint_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx + c_{27}(1+R|\xi_o|^{1-k} R^{2k}\Big(\fint_{B(R/3)}(1+|\nabla u|^2)dx\Big)^{1+k}.$$

Hier ist $k = \dfrac{n}{q(n-2)-n}$.

Es gilt $|A(x,u,\nabla u)-A(x_o,\bar{u},\nabla u)| \le \mu(1+|\nabla u|)(R+|u-\bar{u}|)$ wenn $|x-x_o| \le R$, d.h.

$$\fint_{B(R/6)} |A(x,u,\nabla u) - A(x_o,\bar{u},\nabla u)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq c_{28}\Big(\fint_{B(R/6)} (1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} \Big(\fint_{B(R/6)} (R^2+|u-\bar{u}|^2)^q dx\Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq c_{29}\Big(\fint_{B(R/6)} (1+|\nabla u|^2)^p dx\Big)^{1/p} \Big(\fint_{B(R/6)} (R^{2p} + |u-\bar{u}|^{2p}) dx\Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq c_{30} R^{\frac{2p}{q}} \fint_{B(R/6)} (1+|\nabla u|^2)^p dx \leq c_{31} R^{2(p-1)} \Big(\fint_{B(R/3)} (1+|\nabla u|^2) dx\Big)^p$$

(Es wurde ja angenommen, daß $R \leq 1$).
Es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, daß $s \leq 2(1+\sigma)$, wo s der in (1.8) angegebene Exponent ist:

$$\fint_{B(R/6)} |R(x_o,\bar{u},\nabla u,\xi_o)|^2 dx \leq c_{21}^2 \fint_{B(R/6)} |\nabla u - \xi_o|^s dx \leq$$

$$\leq c_{32}\Big(\fint_{B(R/2)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\Big)^{s/2} + c_{32}\Big[R^{2p-2}\Big(\fint_{B(R)} (1+|\nabla u|^2) dx\Big)^p + (R^{2-p}|\xi|^p)^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{s/2}.$$

Aus (2.2) ergibt sich also

$$\fint_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx \leq c_{33}(1+R|\xi_o|)^{1-k} R^{2k}\Big(\fint_{B(R)} (1+|\nabla u|^2) dx\Big)^{1+k} +$$

$$+ c_{33} R^{2(p-1)}\Big(\fint_{B(R)} (1+|\nabla u|^2 dx\Big)^p + c_{33}\Big(\fint_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 \, dx\Big)^{s/2} +$$

$$+ c_{33}\Big[R^{2p-2}\Big(\fint_{B(R)} (1+|\nabla u|^2) dx\Big)^p + (R^{2-p}|\xi|^p)^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{s/2}.$$

Wir schließen, daß es eine positive Zahl $\tau = \tau(N, n, \lambda, \mu, a, b, M, \sigma)$ gibt, so daß

$$\fint_{B(R/6)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx \leq c_{34}\Big(\fint_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\Big)^{1+\tau} + c_{34} R^{2\tau}\Big(1+\fint_{B(R)} |\nabla u|^2 dx + R|\xi_o|^{4/\tau}\Big)^2.$$

Nach den Lemmata 7.1 und 7.2 aus [2] gilt, wenn $r \leq \frac{1}{6}R$ und $\eta_1 = \xi_o + \fint_{B(r)} \nabla\tilde{u}(x) dx$:

$$|\eta_1 - \xi_o|^2 \le c_{35} \int_{B(R)} |\nabla u - \xi_o|^2 \, dx$$

und

$$\int_{B(r)} |\nabla\tilde{u}-(\eta_1-\xi_o)|^2 dx \le c_{35} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \int_{B(R)} |\nabla\tilde{u} - \xi_o|^2 \, dx$$

Die Konstante c_{35} hängt nur von n, N, λ und μ ab. Wir erhalten:

$$\int_{B(r)} |\nabla u-\eta_1|^2 dx \le 2 \int_{B(r)} |\nabla\tilde{u}-(\eta_1-\xi_o)|^2 dx + 2 \int_{B(r)} |\nabla\tilde{u}-(\nabla u-\xi_o)|^2 dx \le$$

$$\le 2c_{35}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \int_{B(R)} |\nabla\tilde{u}-\xi_o|^2 dx + 2c_{34}\left(\frac{R}{6r}\right)^n \left(\int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\right)^{1+\tau} +$$

$$+ 2c_{34}\left(\frac{R}{6r}\right)^n R^{2\tau}\left(1+ \int_{B(R)} |\nabla u|^2 dx + R|\xi_o|^{4/\tau}\right)^2 \le$$

$$\le c_{36}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{R}{r}\right)^n\left(\int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\right)^\tau + \left(\frac{R}{r}\right)^n \int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\right] \cdot \int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx +$$

$$+ \quad c_{36} \left(\frac{R}{r}\right)^n R^{2\tau} \left(1 + |\xi_o|^2 + R|\xi_o|^{4/\tau}\right)^2 .$$

Man setze $r = \theta R$ und bestimme θ so, daß $\theta \le \frac{1}{6}$, $c_{36}\theta^{2-\tau} \le \frac{1}{4}$ und $8\theta^\tau \le 1$. Damit erhält man, da θ nunmehr fest ist:

$$\int_{B(\theta R)} |\nabla u-\eta_1|^2 dx \le \left[\frac{1}{4}+ c_{37}\left(\int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\right)^\tau + c_{37} \int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx\right]\theta^\tau \int_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx +$$

$$+ \quad c_{37} \, R^\tau\left(1 + |\xi_o|^4 + R^2|\xi_o|^{8/\tau}\right) (\theta R)^\tau.$$

Man setze $\xi_1 = \eta_1$ falls $\int_{B(r)} |\nabla u-\eta_1|^2 dx \le \int_{B(r)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx$, $\xi_1 = \xi_o$ andernfalls, wobei

i) $$\fint_{B(\theta R)} |\nabla u-\xi_1|^2 dx \le [\tfrac{1}{4}+c_{37}(\fint_{B(R)}|\nabla u-\xi_o|^2dx)^\tau + c_{37}\fint_{B(R)}|\nabla u-\xi_o|^2]\theta^\tau \fint_{B(R)}|\nabla u-\xi_o|^2dx +$$

$$+ c_{37} R^\tau(1+|\xi_o|^4+R^2|\xi_o|^{8/\tau})(\theta R)^\tau.$$

ii) $$\fint_{B(\theta R)} |\nabla u-\xi_1|^2 dx \le \theta^{-n} \fint_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx$$

iii) $$|\xi_1-\xi_o|^2 \le c_{35} \fint_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx.$$

Es werde ein $\delta > 0$ bestimmt mit $c_{37}(\delta^\tau + \delta) \le \frac{1}{4}$ und $c_{35}^2\,\delta^2 \le \frac{7}{8}$.

Man setze $A = \max(1;4\,c_{37})$

Wenn $\fint_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx \le \delta$ und $R^\tau(1+|\xi_o|^4) \le 1$ gilt also

$$\fint_{B(\theta R)}|\nabla u-\xi_1|^2dx \le \frac{1}{2}\theta^\tau \fint_{B(R)}|\nabla u-\xi_o|^2dx + \frac{1}{2}A(\theta R)^\tau \le \max(\delta;A(\theta R)^\tau).$$

Man bestimme eine ganze Zahl k mit $A\theta^{k\tau} \le \delta$ und setze $\tilde{\varepsilon} = \theta^{nk}\delta$.

Wir nehmen an, daß $\fint_{B(R)} |\nabla u-\xi_o|^2 dx \le \tilde{\varepsilon}$.

Durch Wiederholen erhalten wir Folgen $\langle a_j\rangle_{j=0}^\infty$ und $\langle \xi_j\rangle_{j=0}^\infty$ mit

$$a_j = \fint_{B(\theta^j R)} |\nabla u-\xi_j|^2 dx$$

und

(i) $$a_{j+1} \le [\tfrac{1}{4} + c_{37}(a_j^\tau+a_j)]\theta^\tau a_j + \tfrac{1}{4}A(\theta^j R)^\tau(1+|\xi_j|^4+(\theta^j R)^2|\xi_j|^{8/\tau})(\theta^{j+1}R)^\tau$$

(ii) $$a_{j+1} \le \theta^{-n} a_j$$

(iii) $$|\xi_{j+1}-\xi_j|^2 \le c_{35}\, a_j$$

Wir behaupten, daß für jedes j es gelte

1) $$a_j \le [\max(A;\delta R^{-\tau})]\,(\theta^j R)^\tau$$

2) $$a_j \le \delta$$

3) $$(\theta^j R)^\tau (1+|\xi_j|^4) \le 1.$$

Beweis: Für $j = 0$ ist es schon klar, da $a_o \le \tilde{\varepsilon}$.
Es gelten 1) 2) und 3) für $j \le i - 1$.

i) ergibt:

$$a_i \le \frac{1}{2}\theta^\tau a_{i-1} + \frac{1}{2}A(\theta^i R)^\tau \le \frac{1}{2}\theta^\tau[\max(A;\delta R^{-\tau})]\,(\theta^{i-1}R)^\tau + \frac{1}{2}A(\theta^i R)^\tau \le$$

$$\le [\max(A;\delta R^{-\tau})]\,(\theta^i R)^\tau ,$$

d.h. 1) gilt für $j = i$.

Falls $i \le k$ ist, nach ii), $a_i \le \theta^{-ni} a_o \le \theta^{-nk} a_o \le \delta$.
Falls $i > k$ ist $a_i \le a_k \le [\max(A;\delta R^{-\tau})]\theta^{k\tau} R^\tau \le \max(A\theta^{k\tau}, \theta^{k\tau}) \le \delta$,
d.h. 2) gilt für $j = i$.
Schließlich finden wir

$$(\theta^i R)^\tau (1+|\xi_i|^4) \le (\theta^i R)(1+8|\xi_{i-1}|^4 + 8|\xi_i - \xi_{i-1}|^4) =$$

$$= 8\theta^\tau(\theta^{i-1}R)^\tau(1+|\xi_{i-1}|^4) + (\theta^i R)^\tau(8|\xi_i - \xi_{i-1}|^4 - 7) \le$$

$$\le 1 + (\theta^i R)^\tau (8c_{35}^2\delta^2 - 7) \le 1,$$

d.h auch 3) gilt für $j = i$, und die Behauptung ist damit bewiesen.

Wir setzen $C_1(R) = \max(A, \delta R^{-\tau})$ und erhalten

(2.3) $$\int_{B(\theta^j R)} |\nabla u - \xi_j|^2 dx \le C_1(R)(\theta^j R)^\tau$$

(2.4) $$|\xi_{j+1} - \xi_j| \le (c_{35} C_1(R))^{1/2} (\theta^j R)^{\tau/2}$$

Aus (2.4) folgt, daß die Folge $\langle \xi_j \rangle_{j=0}^{\infty}$ konvergiert.

Aus (2.3) folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \int_{B(\theta^j R)} \nabla u(x)dx = \lim\limits_{j\to\infty} \xi_j$, und wir können

$\nabla u(x_o) = \lim\limits_{j\to\infty} \xi_j$ schreiben.

Dann gilt

$$|\nabla u(x_o) - \xi_j| \le \sum_{i=j}^{\infty} |\xi_{i+1} - \xi_i| \le (c_{35} C_1(R))^{1/2} (1-\theta^{\tau/2})^{-1} (\theta^j R)^{\tau/2} = C_2(R)(\theta^j R)^{\tau/2}.$$

Wir setzen nun $\epsilon = 2^{-n}\tilde{\epsilon}$.

Falls $\int_{B(x_o,R)} |\nabla u - \xi_o|^2 dx \le \epsilon$, gilt für jedes $x_1 \in B(x_o, \frac{R}{2})$

$$\int_{B(x_1, R/2)} |\nabla u - \xi_o|^2 dx \le \tilde{\epsilon}.$$

Das obige Verfahren kann für jedes solche x_1 durchgeführt werden. Seien nun $x_1, x_2 \in B(x_o, R/2)$ mit $|x_1 - x_2| = \rho$. Man bestimme j mit $\theta^{j+1}R/2 \le \rho < \theta^j R/2$ und setze $x_3 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Es ergibt sich, mit analogen Bezeichnungen:

$$|\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)| \le |\nabla u(x_1) - \xi_j(x_1)| + |\nabla u(x_2) - \xi_j(x_2)| +$$

$$+ |\xi_j(x_1) - \xi_j(x_2)| \le 2C_2(R/2)(\theta^j R/2)^{\tau/2} + |\xi_j(x_1) - \xi_j(x_2)| \cdot$$

$$|\xi_j(x_1) - \xi_j(x_2)| = \Big(\int_{B(x_3, \theta^{j+1} R/2)} |\xi_j(x_1) - \xi_j(x_2)|^2 dx \Big)^{1/2} \le$$

$$\le \theta^{-n/2} \Big[\Big(\int_{B(x_1, \theta^j R/2)} |\nabla u(x) - \xi_j(x_1)|^2 dx \Big)^{1/2} + \Big(\int_{B(x_2, \theta^j R/2)} |\nabla u(x) - \xi_j(x_2)|^2 dx \Big)^{1/2} \Big] \le$$

$$\leq C_3(R)\ (\theta^j R/2)^{\tau/2}$$

$$|\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)| \leq C(R)|x_1-x_2|^{\tau/2}$$

q. e. d.

Da $\lim\limits_{R\to 0} \fint_{B(x_o, R)} |\nabla u(x)-\nabla u(x_o)|^2 dx = 0$ für fast alle $x_o \in \Omega$, ergibt sich sofort der

SATZ II. 2: Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz II. 1 gibt es eine offene Menge $\Omega_o \subset \Omega$ mit $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_o) = 0$, so daß ∇u auf Ω_o hölderstetig ist.

Zusatz: Wenn das u im Satz II. 2 in $H^{2,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ liegt, ist die Hausdorffdimension der Ausnahmemenge $\Omega \setminus \Omega_o$ nicht größer als n - 2.

Beweis: Es gilt $\fint_{B(y,R)} |\nabla u - \fint_{B(R)} \nabla u|^2 dx \leq c_{38} R^2 \fint_{B(y,R)} |D^2 u|^2 dx$

Die Behauptung folgt damit aus dem potentialtheoretischen Satz, der aussagt, daß für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $0 < q < n$ das (n-q)-dimensionale Hausdorffmaß der Menge

$$\{y \in \Omega;\ \liminf_{R\to 0} R^{q-n} \int_{B(y,R)} |f(x)|\, dx > 0\} \quad \text{gleich Null ist.}$$

(vgl. z. B. [7], Thm. 1).

III. REGULARITÄT VON LÖSUNGEN GEWISSER DIAGONALSYSTEME

In diesem letzten Kapitel beweisen wir einen Regularitätssatz für Systeme der Form

$$(3.1) \quad D_\beta[a^{\alpha\beta}(x, u, |\nabla u|^2) D_\alpha u^j] = f^j(x, u, \nabla u), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Hier sind die $a^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}(x, u, t)$ skalarwertige, für $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ und $t \geq 0$ erklärte Funktionen, und wir nehmen an, daß sie für

$t \geq 0$ nach $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ und für $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ nach $t > 0$ stetig differenzierbar sind. Die Strukturbedingungen (0.4), (2.1) nehmen hier die folgenden Formen an:

(3.2a) $$[a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\delta_{ij} + 2\xi^i_\alpha \xi^j_\gamma a^{\gamma\beta}_t(x,u,|\xi|^2)]\,\eta^i_\alpha \eta^j_\beta > \lambda|\eta|^2$$
für $(x,u,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n) \times \mathfrak{M}(N,n)$

(3.2b) $$|a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\xi^j_\alpha| + |\nabla_x a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\xi^j_\alpha| +$$
$$+ |\nabla_u a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\xi^j_\alpha| \leq \mu(1+|\xi|)$$
für $(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n)$, $1 \leq \beta \leq n$ und $1 \leq j \leq N$

(3.2c) $$|a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\delta_{ij} + 2\xi^i_\alpha \xi^j_\gamma a^{\gamma\beta}_t(x,u,|\xi|^2)| \leq \mu$$
für $(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n)$, $1 \leq i,j \leq N$ und $1 \leq \alpha,\beta \leq n$

(3.2d) $$|(a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2) - a^{\alpha\beta}(x,u,|\eta|^2))\delta_{ij} + 2\xi^i_\alpha \xi^j_\gamma a^{\gamma\beta}_t(x,u,|\xi|^2) -$$
$$- 2\eta^i_\alpha \eta^j_\gamma a^{\gamma\beta}_t(x,u,|\eta|^2)| \leq \mu\,|\xi-\eta|^\sigma$$
für $(x,u,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathfrak{M}(N,n) \times \mathfrak{M}(N,n)$, $1 \leq i,j \leq N$ und $1 \leq \alpha,\beta \leq n$.

Unsere Beweismethode besteht darin, daß wir bestätigen, daß Lösungen des Systems (3.1) die Voraussetzungen des Satzes II.1 erfüllen. Dies ist der Fall, da wir wegen der besonderen Weise, auf welche die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ von ∇u abhängen, eine elliptische Differentialgleichung herleiten können, die von $|\nabla u|^2$ erfüllt ist. K. Uhlenbeck hat in [14] einen ähnlichen Beweis eines Regularitätssatzes für Systeme der Form

$$\operatorname{div}\,[\varrho(|\nabla u|^2)\,\nabla u] = 0$$

gegeben. Der Form nach ist dies ein Sonderfall von (3.1). Der Satz in [14] ist doch unter einer allgemeineren Elliptizitätsbedingung als die unseren bewiesen.

Bevor wir unseren Satz formulieren, wollen wir zeigen, daß man die Bedingungen (3.2) einfacher darstellen kann. Zunächst wählen wir in (3.2b), für feste α und j, $\xi \in \mathfrak{M}(N, n)$ mit $\xi^i_\gamma = \sqrt{t}$ wenn $i = j$, $\gamma = \alpha$, und $\xi^i_\gamma = 0$ andernfalls. Wir erhalten :

$$\text{(3.3)} \qquad \sqrt{t}\,(|a^{\alpha\beta}(x,u,t)| + |\nabla_x a^{\alpha\beta}(x,u,t)| + |\nabla_u a^{\alpha\beta}(x,u,t)|) \le \mu(1+\sqrt{t})$$

Umgekehrt ist es klar, daß (3.2b) aus (3.3) folgt. Man betrachte nun in (3.2c) feste α, β und $i = j$, und wähle $\xi \in \mathfrak{M}(N, n)$ mit $|\xi|^2 = t$, $\xi^i_\alpha = 0$:

$$\text{(3.4)} \qquad |a^{\alpha\beta}(x,u,t)| \le \mu$$

Wir betrachten (3.2c) auch für $i \neq j$ und mit $\xi^i_\alpha = \xi^j_\alpha = \sqrt{\frac{t}{2}}$, $\xi^k_\gamma = 0$ andernfalls:

$$\text{(3.5)} \qquad |t\, a^{\alpha\beta}_t(x,u,t)| \le \mu$$

Es ist auch klar, daß (3.4) und (3.5) die Bedingung (3.2c) ergeben, doch mit einem größeren μ. In (3.2d) wählen wir zuerst $i \neq j$, $\xi^i_\alpha = \xi^j_\alpha = \sqrt{\frac{t}{2}}$, $\eta^i_\alpha = -\eta^j_\alpha = \sqrt{\frac{t}{2}}$, $\xi^k_\gamma = \eta^k_\gamma = 0$ andernfalls, und wir erhalten

$$\text{(3.6)} \qquad |t\, a^{\alpha\beta}_t(x,u,t)| \le \mu\, t^{\sigma/2}$$

Danach wählen wir $i \neq j$, $\xi^i_\alpha = \xi^j_\alpha = \sqrt{\frac{t}{2}}$, $\eta^i_\alpha = \eta^j_\alpha = \sqrt{\frac{s}{2}}$, $\xi^k_\gamma = \eta^k_\gamma = 0$ andernfalls:

$$\text{(3.7)} \qquad |t\, a^{\alpha\beta}_t(x,u,t) - s\, a^{\alpha\beta}_t(x,u,s)| \le \mu|\sqrt{t} - \sqrt{s}|^\sigma \le \mu|t-s|^{\sigma/2}$$

(3.4) und (3.6) liefern nach einer elementaren Berechnung:

$$\text{(3.8)} \qquad |a^{\alpha\beta}(x,u,t) - a^{\alpha\beta}(x,u,s)| \le \mu|t-s|^{\sigma/2} ,$$

möglicherweise mit einer anderen Konstante μ.
Ebenso ergeben elementare und ganz einfache Überlegungen, daß (3.2d) aus (3.5), (3.6), (3.7) und (3.8) folgt, doch mit $\sigma/2$ statt mit σ und einem größeren μ. Offensichtlich folgt (3.6) aus (3.7) und der Zusatzbedingung $\lim_{t\to 0} t\, a_t^{\alpha\beta}(x,u,t) = 0$, und diese Zusatzbedingung ist schwächer als (3.6).

Zusammenfassend machen wir also die folgenden Voraussetzungen:

(3.9a) $$a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\eta_\alpha^i\eta_\beta^i + 2\xi_\alpha^i\xi_\gamma^j a_t^{\gamma\beta}(x,u,|\xi|^2)\eta_\alpha^i\eta_\beta^j \geq \lambda|\eta|^2$$

(3.9b) $$|a^{\alpha\beta}(x,u,t)| \leq \mu$$

(3.9c) $$|\nabla_x a^{\alpha\beta}(x,u,t)| + |\nabla_u a^{\alpha\beta}(x,u,t)| \leq \mu(1+t^{-1/2})$$

(3.9d) $$\lim_{t\to 0} t\, a_t^{\alpha\beta}(x,u,t) = 0$$

(3.9e) $$|t\, a_t^{\alpha\beta}(x,u,t)| \leq \mu$$

(3.9f) $$|t\, a_t^{\alpha\beta}(x,u,t) - s\, a_t^{\alpha\beta}(x,u,s)| \leq \mu|t-s|^\sigma$$

Wir haben gezeigt, daß die Bedingungen (3.2) mit den Bedingungen (3.9) äquivalent sind (doch mit anderen μ und σ). Wir werden nun eine wichtige Konsequenz der Elliptizitätsbedingung (3.9a) herleiten.

LEMMA III.1: Man setze $b^{\alpha\beta}(x,u,\xi) = a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2) + 2\xi_\alpha^i\xi_\gamma^i a_t^{\gamma\beta}(x,u,|\xi|^2)$. Unter der Voraussetzung (3.9a) gilt dann für $(x,u,\xi,\eta) \in \Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathfrak{M}(N,n)\times\mathbb{R}^n$:

$$b^{\alpha\beta}(x,u,\xi)\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda|\eta|^2$$

Beweis: Seien $t \geq 0$, $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^n$, $|\tilde{\eta}| = 1$. Man wähle in (3.9a) $\xi_\alpha^i = 0$ für $i \neq 1$, $\xi_\alpha^1 = \sqrt{t}\,\tilde{\eta}_\alpha$, $\eta_\alpha^i = 0$ für $i \neq 1$ und $\eta_\alpha^1 = \eta_\alpha$:

(3.10) $$a^{\alpha\beta}(x,u,t)\eta_\alpha\eta_\beta + 2t\tilde{\eta}_\alpha\tilde{\eta}_\gamma a_t^{\gamma\beta}(x,u,t)\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda|\eta|^2$$

Man wähle nun beliebige $\xi \in \mathfrak{M}(N,n)$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$, und setze in (3.10) $t = |\xi|^2$.

Wir können $\xi_\alpha^i = t^i\tilde{\eta}_\alpha^i$ schreiben, wobei $t^i \geq 0$ und $\sum_{\alpha=1}^n (\tilde{\eta}_\alpha^i)^2 = 1$:

(3.11) $$[a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2) + 2|\xi|^2\tilde{\eta}_{\underline{\alpha}}^{\underline{i}}\tilde{\eta}_{\underline{\gamma}}^{\underline{i}} a_t^{\gamma\beta}(x,u,|\xi|^2)]\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda|\eta|^2$$

(Unterstreichung von einem Index bedeutet Aufhebung der Summationskonvention bezüglich dieses Index).

Wenn $|\xi| = 0$ folgt nun die Behauptung (in einer offenbaren Interpretation) wegen (3.9d). Wenn $|\xi| > 0$, multiplizieren wir (3.11) mit $\sum_{\delta=1}^n \frac{(\xi_\delta^i)^2}{|\xi|^2}$:

$$\left[\sum_{\delta=1}^n \frac{(\xi_\delta^i)^2}{|\xi|^2} a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2) + 2\xi_{\underline{\alpha}}^{\underline{i}}\xi_{\underline{\gamma}}^{\underline{i}} a_t^{\gamma\beta}(x,u,|\xi|^2)\right]\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda \sum_{\delta=1}^n \frac{(\xi_\delta^i)^2}{|\xi|^2} |\eta|^2$$

Summation über i liefert die Behauptung.

Damit sind wir in der Lage, unseren Regularitätssatz zu formulieren:

<u>SATZ III.1: Es sei</u> $u \in H_{loc}^{2,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ <u>eine schwache Lösung des Systems</u> (3.1) <u>mit</u> $\sup_\Omega |u(x)| = M$, <u>und es sollen gelten</u> (0.5), (3.9) <u>und</u> $aM < \lambda$. <u>Dann hat</u> u <u>hölderstetige Ableitungen erster Ordnung in</u> Ω <u>und für jedes Teilgebiet</u> $\Omega' \subset\subset \Omega$ <u>ist die Höldernorm des Gradienten bezüglich</u> Ω' <u>durch</u> $n, N, \lambda, \mu, a, b, M$, Diam$(\Omega')$ <u>und</u> Dist$(\Omega', \partial\Omega)$ <u>abschätzbar.</u>

<u>Bemerkung:</u> Nach einem Satz von M. Wiegner [16] ist jede $H^{1,2}$-Lösung u mit $a \sup |u(x)| < \lambda$ auf Ω hölderstetig. Die Voraussetzung $u \in H^{2,2}$ ist also erfüllt, wie wir im Kapitel I gezeigt haben, wenn $u \in H^{1,2}$ und die Bedingungen (1.9) gültig sind.

<u>Beweis des Satzes:</u> Als ersten Schritt werden wir Abschätzungen für

die Integrale $\int_{\Omega'} |\nabla u|^{2p} dx$, $p \geq 1$, herleiten. Zu diesem Zweck verwenden wir die in [11] für Skalargleichungen benutzte Technik, die hier, wegen der besonderen Form unseres Systems und wegen des Lemmas III.1 anwendbar ist.

Seien $x_o \in \Omega' \subset\subset \Omega$, $0 < R < \frac{1}{4}\,\mathrm{Dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$, $\eta = \eta_{x_o, R}$. Nach dem Wiegner'schen Satz gilt $|u(x)-u(x_o)| \leq c_{39}|x-x_o|^{\tau}$ für $|x-x_o| < 2R$ und positive Zahlen c_{39} und τ die sich aus n, N, λ, μ, a, b, M und $\mathrm{Dist}(\Omega', \partial\Omega)$ bestimmen lassen.

(1.13) gilt offensichtlich für jedes $\eta \in L^{\infty} \cap H^{1,2}(\Omega)$ mit $\eta(x)=0$ für $|x-x_o| > 2R$. Wir setzen $w(x) = \min(|\nabla u(x)|^2, A^2)$, wo A eine positive Zahl ist, ersetzen in (1.13) η durch $\eta w^{(p-1)/2}$, beachten, daß $|u-\bar{u}| \leq c_{39}(4R)^{\tau}$ und $\delta \leq c_{39}(4R)^{\tau}$, und erhalten:

$$\int \eta^2 w^{p-1}|\nabla u|^4 dx \leq c_{11}\int \eta^2 w^{p-1}|\nabla u|^2 dx + c_{40}R^{2\tau}\int (|\nabla\eta|^2 w^{p-1}|\nabla u|^2 +$$

$$+ (p-1)^2\eta^2 w^{p-3}|\nabla w|^2|\nabla u|^2 + \eta^2 w^{p-1}|D^2 u|^2)dx$$

wenn R so klein ist, daß $a c_{39}(4R)^{\tau} \leq \frac{\lambda}{2}$.

Nun ist $\nabla w = 2u^i_{\gamma}\nabla u^i_{\gamma}$ wenn $|\nabla u| \leq A$, $\nabla w = 0$ wenn $|\nabla u| > A$, und folglich $|\nabla w|^2|\nabla u|^2 \leq 4w^2|D^2 u|^2$. Also gilt

$$(3.12)\quad \int \eta^2 w^{p-1}|\nabla u|^4 dx \leq c_{41}\int(\eta^2 + |\nabla\eta|^2)|\nabla u|^{2p}dx + c_{41}R^{2\tau}\int \eta^2 w^{p-1}|D^2 u|^2 dx.$$

Wir setzen $c^{\alpha\beta}_{ij}(x,u,\xi) = a^{\alpha\beta}(x,u,|\xi|^2)\delta_{ij} + 2\xi^i_{\alpha}\xi^j_{\gamma}a^{\gamma\beta}_t(x,u,|\xi|^2)$ und erhalten nach (1.15) für $\phi \in H^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω:

$$(3.13)\qquad \int c^{\alpha\beta}_{ij}(x,u,\nabla u)D_{\alpha}u^i_{\gamma}D_{\beta}\phi^j dx = \int \tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x,u,\nabla u)D_{\beta}\phi^j dx,$$

wo $\tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x,u,\xi) = -\delta^{\beta\delta}f^j(x,u,\xi) + a^{\alpha\beta}_{u^i}(x,u,|\xi|^2)\xi^j_{\alpha}\xi^i_{\delta} + a^{\alpha\beta}_{x_{\delta}}(x,u,|\xi|^2)\xi^j_{\alpha}$.

Man wähle in (3.13) $\phi = \eta^2 w^{p-1}D_{\delta}u$:

$$\int c_{ij}^{\alpha\beta} u_{\alpha\delta}^{i}[\eta^2 w^{p-1} u_{\beta\delta}^{j} + (p-1)\eta^2 w^{p-2} u_{\delta}^{j} w_{\beta} + 2\eta\eta_{\beta} w^{p-1} u_{\delta}^{j}]dx =$$

$$= \int f^{j,\delta,\beta}[\eta^2 w^{p-1} u_{\beta\delta}^{j} + (p-1)\eta^2 w^{p-2} u_{\delta}^{j} w_{\beta} + 2\eta\eta_{\beta} w^{p-1} u_{\delta}^{j}]dx.$$

Nun gilt, wenn $|\nabla u| \leq A$:

$$c_{ij}^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u) u_{\alpha\delta}^{i} u_{\delta}^{j} = a^{\alpha\beta}(x,u,|\nabla u|^2) u_{\alpha\delta}^{i} u_{\delta}^{i} + 2u_{\alpha}^{i} u_{\alpha\delta}^{i} u_{\gamma}^{j} u_{\delta}^{j} a_{t}^{\gamma\beta}(x,u,|\nabla u|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}(x,u,|\nabla u|^2) w_{\alpha} + w_{\delta} u_{\gamma}^{j} u_{\delta}^{j} a^{\gamma\beta}(x,u,|\nabla u|^2) = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}(x,u,|\nabla u|^2) w_{\alpha} +$$

$$+ w_{\alpha} u_{\gamma}^{i} u_{\alpha}^{i} a_{t}^{\gamma\beta}(x,u,|\nabla u|^2 = \frac{1}{2} b^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u) w_{\alpha}$$

und folglich, nach dem Lemma III. 1:

$$c_{ij}^{\alpha\beta} u_{\alpha\delta}^{i}(p-1)\eta^2 w^{p-2} u_{\delta}^{j} w_{\beta} = \frac{p-1}{2} \eta^2 w^{p-2} b^{\alpha\beta} w_{\alpha} w_{\beta} \geq 0 \quad .$$

Wir erhalten also

$$\text{(3. 14)} \quad \int \eta^2 w^{p-1} |D^2 u|^2 dx \leq c_{42} \int [|\nabla\eta|^2 w^{p-1} |\nabla u|^2 + p^2 \eta^2 w^{p-1} (1+|\nabla u|^2)^2] dx \leq$$

$$\leq c_{43} p^2 \int [(\eta^2 + |\nabla\eta|^2)(1+|\nabla u|^{2p}) + \eta^2 w^{p-1} |\nabla u|^4] dx.$$

Wenn man dieses mit (3. 12) kombiniert, erhält man, falls $c_{41} c_{43} p^2 R^{2\tau} \leq \frac{1}{2}$:

$$\int \eta^2 w^{p-1} |\nabla u|^4 dx \leq c_{44} p^2 \int (\eta^2 + |\nabla\eta|^2)(1+|\nabla u|^{2p}) dx.$$

Das Fatou'sche Lemma liefert, nach dem Grenzübergang $A \to \infty$:

$$\text{(3. 15)} \quad \int_{B(R)} |\nabla u|^{2p+2} dx \leq c_{44}(1+\frac{1}{R^2})\, p^2 \int_{B(2R)} (1+|\nabla u|^{2p}) dx.$$

Da wir schon im Kapitel I lokale Abschätzungen für $\int |\nabla u|^2 dx$ und sogar für $\int |\nabla u|^4 dx$ erhalten haben, schließen wir aus (3. 15), daß man für jedes $p \geq 1$ das Integral $\int_{\Omega'} |\nabla u|^{2p} dx$ abschätzen kann, und zwar mit einer Konstanten, die von n, N, λ, μ, a, b, M, Diam(Ω'), Dist(Ω', $\partial\Omega$) und p abhängt. Aus (3.14) schließen wir, daß dasselbe für die Integrale $\int_{\Omega'} |\nabla u|^{2p} |D^2 u|^2 dx$ gilt. Insbesondere gilt also $|\nabla u|^2 \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

Wir betrachten nun ein Teilgebiet $\Omega' \subset\subset \Omega$ und wollen $\sup_{\Omega'} |\nabla u|$ abschätzen. Seien Ω^2 und Ω^3 Gebiete mit reguären Rändern und $\Omega' \subset\subset \Omega^2 \subset\subset \Omega^3 \subset\subset \Omega$. Man wähle (3.13) $\emptyset = \zeta u^i_\delta$, wo $\zeta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega^3)$:

$$\int c^{\alpha\beta}_{ij} u^i_{\alpha\delta}[u^j_\delta \zeta_\beta + \zeta u^j_{\beta\delta}]dx = \int \tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x,u,\nabla u)[u^j_\delta \zeta_\beta + \zeta u^j_{\beta\delta}]dx$$

Nach den obigen Überlegungen ist $c^{\alpha\beta}_{ij} u^i_{\alpha\delta} u^j_\delta = \frac{1}{2} b^{\alpha\beta} D_\alpha(|\nabla u|^2)$. Wir setzen $v = |\nabla u|^2$ und $g^\beta(x) = 2u^j_\delta(x)\tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x, u(x), \nabla u(x))$. Es gilt also

$$\int (b^{\alpha\beta} D_\alpha v - g^\beta) D_\beta \zeta dx = -\int 2\zeta[c^{\alpha\beta}_{ij} u^i_{\alpha\delta} u^j_{\beta\delta} - u^j_{\beta\delta} \tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x,u,\nabla u)]dx$$

Nun ist

$$2(c^{\alpha\beta}_{ij} u^i_{\alpha\delta} u^j_{\beta\delta} - u^j_{\beta\delta} \tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x,u,\nabla u)) \geq \lambda |D^2 u|^2 - c_{45}(1+|\nabla u|^4).$$

Wir setzen $\bar{f}(x) = \lambda |D^2 u|^2 - 2(c^{\alpha\beta}_{ij} u^i_{\alpha\delta} u^j_{\beta\delta} - u^j_{\beta\delta} \tilde{f}^{j,\delta,\beta}(x,u,\nabla u))$ und erhalten

$$\int_{\Omega^3} (b^{\alpha\beta} D_\alpha v - g^\beta) D_\beta \zeta dx = \int_{\Omega^3} \zeta[\bar{f} - \lambda |D^2 u|^2]dx, \tag{3.16}$$

d.h. v ist in Ω^3 eine Lösung der Gleichung

$$D_\beta(b^{\alpha\beta} D_\alpha v - g^\beta) = \lambda |D^2 u|^2 - \bar{f}(x) .$$

Nach dem Lemma III.1 ist diese Gleichung gleichmäßig elliptisch. Sei G die Green'sche Funktion des Operators $D_\beta(b^{\alpha\beta} D_\alpha)$ in Ω^3 (vgl. [15]). Sei $\eta \in C^1(\Omega)$, $\eta(x) \geq 0$, $\eta(x) = 1$ auf Ω^2, $\eta(x) = 0$ außerhalb Ω^3. Es gilt für fast alle $y \in \Omega'$:

$$|\nabla u(y)|^2 = \eta(y)v(y) = \int b^{\alpha\beta} D_\alpha(\eta v) D_{x_\beta} G(x,y)\,dx =$$

$$= \int v(x) b^{\alpha\beta} D_\alpha \eta D_{x_\beta} G(x,y)dx - \int G(x,y) b^{\alpha\beta} D_\alpha v D_\beta \eta dx +$$

$$+ \int b^{\alpha\beta} D_\alpha v\, D_\beta (G(x,y)\eta(x))\,dx = \int v(x) b^{\alpha\beta} D_\alpha \eta D_\beta G(x,y)dx +$$

$$+ \int g^\beta D_\beta (G(x,y)\eta(x))dx + \int \bar{f}\, G(x,y)\eta(x)\,dx -$$

$$- \lambda \int |D^2 u|^2 G(x,y)\eta dx - \int G(x,y) b^{\alpha\beta} D_\alpha v D_\beta \eta dx \le$$

$$\le C(\Omega^2, \Omega^3)(\|v\|_{L^{n+1}(\Omega^3)} + \|g\|_{L^{n+1}(\Omega^3)}) \cdot$$

$$\cdot \|\nabla_x G(\cdot, y)\|_{L^{(n+1)/n}(\Omega^3)} + C(\Omega^2, \Omega^3)(\|g\|_{L^n(\Omega^3)} + \|\bar{f}\|_{L^n(\Omega^3)}) \cdot$$

$$\cdot \|G(\cdot, y)\|_{L^{n/(n-1)}(\Omega^3)} + 2\mu \int G(x,y) |\nabla u|\, |D^2 u|\, |\nabla \eta|\, dx\,.$$

Da $0 \le G(x,y) \le c_{46}|x-y|^{2-n}$ und $\nabla\eta = 0$ auf Ω^2, ist das letzte Glied durch n, N, λ, μ, a, b, M, $\mathrm{Diam}(\Omega')$ und $\mathrm{Dist}(\Omega', \partial\Omega^2)$ abschätzbar. Die übrigen Glieder können wir auch abschätzen, da

$$\int_{\Omega^3} \{ |\nabla_x G(x,y)|^{\frac{n+1}{n}} + G(x,y)^{\frac{n}{n-1}} \} dx \le c_{47} \quad \text{(vgl. [15])},$$

und da $\int_{\Omega^3} |\nabla u|^{2p} dx$ für beliebiges p abschätzbar ist. (Hier genügt es, dieses Integral für $p \le 4n$ abzuschätzen).

Wir erhalten also $\sup_{\Omega'} |\nabla u(x)| \le c_{48}(n, N, \lambda, \mu, a, b, \mathrm{Diam}(\Omega'), \mathrm{Dist}(\Omega', \partial\Omega))$.

Wir betrachten nun ein Teilgebiet Ω_o mit $\Omega_o \subset\subset \Omega'$ und $a\,\mathrm{osc}(u, \Omega_o) < \lambda$ (die letztere Bedingung gilt, wenn z.B. $\mathrm{Diam}(\Omega_o) < \lambda/(ac_{48})$). Sei $x_o \in \Omega_o$ und ε die im Satz II.1 angegebene Zahl. Wir werden zeigen, daß für $R < R_o$

$$⨍_{B(x_o,R)} |\nabla u - ⨍_{B(R)} \nabla u\, dy|^2\, dx \le \varepsilon$$

gilt, wo R_o eine durch n, N, λ, μ, a, b, M abschätzbare Zahl ist. Die Poincaré-Ungleichung ergibt zunächst

$$\fint_{B(R)} |\nabla u(x) - \fint_{B(R)} \nabla u|^2 dx \le c_{38} R^2 \fint_{B(R)} |D^2 u|^2 \, dx$$

Sei $0 < R < \frac{1}{2}\,\mathrm{Dist}(\Omega_o, \partial\Omega')$, und η die schwache Lösung des Problems

$$D_\alpha(b^{\alpha\beta} D_\beta \eta) = -\frac{1}{R^2} \quad \text{in } B(2R)$$

$$\eta \in H_o^{1,2}(B(2R))$$

d.h. wenn $\tilde{G}$ die Green'sche Funktion des Operators $D_\alpha(b^{\alpha\beta} D_\beta)$ in B(2R) ist, so ist

$$\eta(y) = \frac{1}{R^2} \int_{B(2R)} \tilde{G}(x,y)\, dy$$

Wegen bekannter Eigenschaften der Green'schen Funktion ([15]) gilt:

(3.17) $\qquad \eta(x) \ge \frac{1}{c_{49}}$ auf B(R), $\quad 0 \le \eta(x) \le c_{50}$ auf B(2R).

Ferner gilt

$$\int b^{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta dx = \frac{1}{R^2} \int \eta(x) dx \le c_{51} R^{n-2}, \quad \text{d.h.}$$

$$\fint_{B(2R)} |\nabla\eta|\, dx \le \Big(\fint_{B(2R)} |\nabla\eta|^2 \, dx\Big)^{1/2} \le c_{52} \frac{1}{R}$$

Nach (3.16) und (3.17) ist

$$\int_{B(R)} |D^2 u|^2 \, dx \le c_{49}^2 \int \eta(x)^2 |D^2 u|^2 \, dx =$$

$$= \frac{c_{49}^2}{\lambda} \int \eta(x)^2 f(x) dx + \frac{2c_{51}}{\lambda} \int g^\beta(x) \eta(x) \eta_\beta(x) dx - \frac{2c_{51}}{\lambda} \int b^{\alpha\beta} v_\alpha \eta \eta_\beta dx$$

Wir setzen $M_1(r) = \sup_{B(r)} v$.

$$-\int b^{\alpha\beta} v_\alpha \eta\eta_\beta \, dx = \int b^{\alpha\beta} D_\alpha[\eta(M_1(2R)-v)] D_\beta\eta \, dx - \int (M_1(2R)-v) b^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta \, dx \le$$

$$\le \frac{1}{R^2} \int \eta(M_1(2R) - v) \, dx$$

Zusammenfassend gilt also

$$\fint_{B(R)} |\nabla u(x) - \fint_{B(R)} \nabla u|^2 dx \le c_{52} R + c_{52} \fint_{B(2R)} (M_1(2R) - v) \, dx$$

Wir setzen voraus, daß R_o so klein ist, daß $c_{52} R_o < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$R_o \le \min(\mathrm{Dist}(\Omega_o, \partial\Omega'), \ (1 + c_{48}^4)^{-1/\tau}$$

(τ ist hier die im Satz II. 1 angegebene Zahl).

Wir wollen zeigen, daß für hinreichend kleines R gilt:

(3. 18) $$c_{52} \fint_{B(2R)} (M_1(2R) - v) \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit wird unsere Behauptung aus dem Satz II. 1 folgen.

Für v gilt wegen (3. 16) das Lemma 2. 2 aus dem Kapitel 9 in [11] Wir formulieren es hier als

LEMMA III. 2: Seien δ_2 und δ_3 irgendwelche Zahlen in $(0, 1)$. Dann gilt entweder

(i) $\quad \mathrm{mes}\,\{x \in B(R) \mid M_1(2R) - v(x) \ge \delta_2 \,\mathrm{osc}(v, B(2R))\} \le \delta_3 \,\mathrm{mes}\, B(R)$

oder

(ii) $$\mathrm{osc}(v, B(R)) \le (1 - \delta_1) \,\mathrm{osc}(v, B(2R)) + R \ .$$

Hier ist δ_1 eine positive Zahl, die durch λ, μ, n, a, b, M, δ_2 und δ_3 bestimmt wird.

Wenn (i) gilt, ist

$$\fint_{B(R)} (M_1(R) - v) \, dx \le \delta_3 \mathrm{osc}(v, B(2R)) + \delta_2 \mathrm{osc}(v, B(2R))$$

Wir wählen δ_2 und δ_3 so, daß $(\delta_2 + \delta_3)c_{48}^2 c_{52} < \frac{\varepsilon}{2}$

Wenn (i) gilt, gilt also auch (3.18).

Man betrachte nun die Folge $< B(2^{-\nu} R_o) >_{\nu=1}^{\infty}$ von Kugeln und wende für jede das Lemma III.2 an.

Wenn (ii) stets gilt, ist es offenbar, daß nach $\tilde{N}$ Schritten die Oscillation in $B(R) = B(2^{-\tilde{N}} R_o)$ kleiner als $\varepsilon/(2c_{52})$ sein wird. ($\tilde{N}$ ist hier eine ganze Zahl, die durch δ_1, R_o und c_{48} bestimmt wird).
Andernfalls wird (i) in einem der $\tilde{N}$ ersten Schritte gelten.
Jedenfalls gilt also (3.18) für $R = 2^{-k} R_o$ mit einem $k \leq \tilde{N}$.
Der Beweis des Satzes III.1 ist damit vollendet.

LITERATUR

[1] ALMGREN, F.J., Jr.,: Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure. Ann. of Math. 87, 321 - 391 (1968)

[2] CAMPANATO, S.: Equazioni ellittiche del II° ordine e spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$. Ann. Mat. Pura ed Appl. 69, 321 - 382 (1965)

[3] CANFORA, A.: Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ai sistemi fortemente ellittici. Ricerche di Mat. 15, 249 - 294 (1966)

[4] GIAQUINTA, M., GIUSTI, E.: Nonlinear elliptic systems with quadratic growth. Manuscripta math. 24, 323 - 349 (1978)

[5] GIAQUINTA, M., MODICA, G.: Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems. Erscheint demnächst.

[6] GIAQUINTA, M., MODICA, G.: Almost-Everywhere Regularity Results for Solutions of Non-Linear Elliptic Systems. Manuscripta math. 28, 109 - 158 (1979)

[7] GIUSTI, E.: Precisazione delle funzioni $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli dei sistemi ellittici non lineari. Boll. UMI 2, 71 - 76 (1969)

[8] GIUSTI, E.: Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario. Ann. S.N.S. di

Pisa 23, 115 - 141 (1969)

[9] GIUSTI, E., MIRANDA, M.: Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasi lineari. Arch. Rat. Mech. Anal. 31, 173 - 184 (1968)

[10] IVERT, P.-A.: Regularitätsuntersuchungen von Lösungen elliptischer Systeme von quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 31 (1978)

[11] LADYZHENSKAYA, O.A., URAL'CEVA, N.N.: Linear and Quasilinear Elliptic Equations. New York: Academic Press 1968

[12] MORREY, C.B., Jr.: Partial regularity results for non-linear elliptic systems. J. Math. Mech. 17, 649 - 670 (1967)

[13] STEIN, E.M.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1970

[14] UHLENBECK, K.: Regularity for a class of non-linear elliptic systems. Acta Math. 138, 219 - 240 (1977)

[15] WIDMAN, K.-O.: The singularity of the Green function for non-uniformly elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients. Uppsala University, Dept. Math., Report no 12/1970

[16] WIEGNER, M.: A-priori Schranken für Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Manuscripta math. 18, 279 - 297 (1976)

Per-Anders Ivert
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Beringstraße 4 - 6
D-5300 Bonn 1
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 28. Juni 1979)