Werk

Titel: Bemerkung zu einem Satz von W. Rupp.

Autor: Binzer, Hans-Wiegand; Mammitzsch, V.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0030|log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

manuscripta math. 30, 383 - 386 (1980)

manuscripta mathematica
© by Springer-Verlag 1980

BEMERKUNG ZU EINEM SATZ VON W.RUPP

Hans-Wiegand Binzer und Volker Mammitzsch

Dem Andenken an Hans RICHTER gewidmet

A theorem of W.RUPP [4] on integration of correspondences (set-valued functions) is slightly generalized and a new short proof is given by means of a measurability concept for correspondences which was introduced by H.RICHTER [3].

Wir wollen für einen Satz von W.RUPP [4] über die Integrale außenmeßbarer Korrespondenzen einen neuen, wesentlich kürzeren Beweis geben und den Satz gleichzeitig etwas verallgemeinern, indem wir ein auf H. RICHTER [3] zurückgehendes Meßbarkeitskonzept für Korrespondenzen verwenden.

Zunächst einige Bezeichnungen und einfache Bemerkungen: Zu einer Menge $Y \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die Stützfunktion $g(\cdot;Y): \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ gemäß $g(z;Y)=\inf\{z'y : y \in Y\}$. Dabei bedeute $z'y$ das Skalarprodukt der (als Spaltenvektoren aufgefaßten) Elemente $y,z \in \mathbb{R}^n$. Bekanntlich sind zwei kompakte und konvexe Mengen $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{R}^n$ genau dann gleich, wenn $g(\cdot;Y_1) = g(\cdot;Y_2)$ gilt. Für jedes $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich

$$|y| \leq \sum_{j=1}^{n} (|g(e_j;Y)| + |g(-e_j;Y)|),$$

wobei e_j den j-ten Grundvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Daher ist $Y = \{o\}$ gleichbedeutend mit $g(e_j;Y) = g(-e_j;Y) = 0$ für alle $j=1,\dots,n$. Schließlich ist $g(\cdot;Y)$ genau dann beschränkt, wenn Y beschränkt ist.

<u>Definition 1:</u> Seien $(M, \mathfrak{A}, m)$ ein Maßraum und F eine Korrespondenz von M nach $\mathbb{R}^n$, d.h. eine Abbildung $F : M \to \{T \subset \mathbb{R}^n : T \neq \emptyset\}$. Dann heißt F

(a) außen-meßbar (bei RUPP: M4-meßbar) bezüglich $\mathfrak{A}$, wenn

0025-2611/80/0030/0383/$01.00

für jede offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ gilt
$\{x \in M : F(x) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathfrak{A}$;

(b) RICHTER-meßbar bezüglich $\mathfrak{A}$, wenn $g(z;F(\cdot)):M \to \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ $\mathfrak{A}$-meßbar ist;

(c) m-integrierbar beschränkt, wenn eine m-integrable Funktion $h:M \to \mathbb{R}$ existiert derart, daß für alle $x \in M$ und alle $y \in F(x)$ gilt $|y| \leq h(x)$.

Aus der Außen-Meßbarkeit folgt die RICHTER-Meßbarkeit [1], die Umkehrung gilt nicht allgemein; vgl.[5], §2. Ist F RICHTER-meßbar, so ist F entsprechend der eingangs gemachten Bemerkung genau dann m-integrierbar beschränkt, wenn $g(\pm e_j;F(\cdot))$ für alle $j=1,\dots,n$ endlich und m-integrabel ist. Ferner ist bei m-integrierbar beschränktem F die Menge F(x) für alle x beschränkt; ist zusätzlich F abgeschlossenwertig, so ist F(x) sogar kompakt und somit eckenabgeschlossen, d.h. jeder Extremalpunkt der abgeschlossenen konvexen Hülle von F(x) gehört zu F(x).

Schließlich definieren wir das Integral $I(F,m;A)$ der Korrespondenz F bezüglich m über die Menge $A \in \mathfrak{A}$ als Menge der (vektorwertigen) Integrale der über A integrierbaren Auswahlfunktionen gemäß

<u>Definition 2:</u> $I(F,m;A) = \left\{ \int_A f(x)\, dm(x) : f:A \to \mathbb{R}^n \text{ ist m-integrabel mit } f(x) \in F(x) \text{ für alle } x \in A \right\}.$

$I(F,m;\cdot)$ für m-integrierbar beschränktes F ist ein mengenwertiges Maß auf $\mathfrak{A}$, wobei die Addition von Mengen elementweise erklärt wird.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir folgenden

<u>SATZ:</u> <u>Seien $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ σ-Algebren über M mit $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, m_i σ-finite Maße auf $\mathfrak{A}_i$ für i=1,2 und F eine bezüglich $\mathfrak{A}_1$ RICHTER-meßbare</u>

---

[1] Man ersieht dies direkt aus der für alle $c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$ gültigen Beziehung $\{x \in M : g(z;F(x)) < c\} = \{x \in M : \{y \in \mathbb{R}^n : z'y < c\} \cap F(x) \neq \emptyset\}$.

Korrespondenz von M nach $\mathbb{R}^n$ mit eckenabgeschlossenen $F(x)$ für alle $x \in M$.

(1) Falls m_1 auf $\mathfrak{A}_1$ atomfrei und F m_1-integrierbar beschränkt ist, gilt: Ist m_2 Fortsetzung von m_1, so ist auch $I(F,m_2;\cdot)$ Fortsetzung von $I(F,m_1;\cdot)$.

(2) Falls F m_i-integrierbar beschränkt mit $m_i(\{x \in M : F(x) = \{o\}\}) = 0$ für $i=1,2$ ist, gilt:
Ist $I(F,m_2;\cdot)$ Fortsetzung von $I(F,m_1;\cdot)$, so ist auch m_2 Fortsetzung von m_1.

Bemerkung: Gemäß unseren Ausführungen zur Def. 1 ist dieser Satz tatsächlich eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes von W. RUPP[4]. Eine weitergehende Verallgemeinerung auf Vektormaße findet sich in [1].

Beweis des Satzes: (1) m_2 ist als Fortsetzung von m_1 ebenfalls atomfrei. Nach dem Satz von RICHTER (vgl.[2]) sind für $A \in \mathfrak{A}_1$ sowohl $I(F,m_1;A)$ wie $I(F,m_2;A)$ kompakt und konvex mit Stützfunktionen in $z \in \mathbb{R}^n$

$$g(z;I(F,m_1;A)) = \int_A g(z;F(x))dm_1(x)$$

$$= \int_A g(z;F(x))dm_2(x) = g(z;I(F,m_2;A)).$$

Folglich gilt $I(F,m_1;A) = I(F,m_2;A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}_1$.

(2) Setze $m = m_1 + m_2$ auf $\mathfrak{A}_1$. Dann sind m_1 und m_2 totalstetig bezüglich m mit festen Versionen $f_i = dm_i/dm$ für $i=1,2$.
Es ist zu zeigen, daß $f_1 = f_2$ m-fast gilt.
Wie in (1) erhalten wir aus dem Satz von RICHTER für alle $A \in \mathfrak{A}_1$ und alle $j=1,\dots,n$

$$\int_A g(\pm e_j;F(x))f_1(x)\, dm(x) = \int_A g(\pm e_j;F(x))dm_1(x)$$

$$= g(\pm e_j;I(F,m_1;A)) \qquad = g(\pm e_j;I(F,m_2;A))$$

$$= \int_A g(\pm e_j;F(x))dm_2(x) \qquad = \int_A g(\pm e_j;F(x))f_2(x)dm(x).$$

Evtl. mit Ausnahme einer m-Nullmenge ist daher $f_1=f_2$ außerhalb der Menge $\{x \in M : g(e_j;F(x)) = g(-e_j;F(x))=0$ für alle $j=1,\dots,n\}$, die ihrerseits gleich $\{x \in M : F(x) = \{o\}\}$ und damit nach Voraussetzung ebenfalls eine m-Nullmenge ist.

Literaturverzeichnis

[1] Binzer, H.-W. : Fortsetzung mengenwertiger Maße. Diplomarbeit Marburg (1979)

[2] Kellerer, H.G. : Bemerkung zu einem Satz von H. RICHTER. Arch.Math. 15, 204-207 (1964)

[3] Richter, H. : Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Maßtheorie. Math. Annalen 150, 85-90 (1963)

[4] Rupp, W. : Mengenwertige Maße und Fortsetzungen. manuscripta math. 22, 137-150 (1977)

[5] Seifert, H.-G. : Korrespondenzen: Ihre Anwendung auf ein Gleichgewichtsproblem der Ökonomie. Dissertation München (1974)

Dipl. Math. Hans-Wiegand B i n z e r
Prof. Dr. Volker M a m m i t z s c h
Fachbereich Mathematik
Lahnberge
D-3550 Marburg

(Eingegangen am 26. Oktober 1979)