

Werk

Titel: Une généralisation du théorème d'extension de Radó.

Autor: Aupetit, Bernard

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0023|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

UNE GENERALISATION DU THEOREME D'EXTENSION DE RADÓ

Bernard AUPETIT*

Using subharmonic functions we give an
easy proof of E.L. Stout's generaliza-
tion of Radó's extension theorem.

Mis sous une forme un peu plus générale que la forme originale [8] par H. Cartan [2], le célèbre théorème d'extension de Radó affirme que si f est continue sur $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ et holomorphe sur $\Delta \setminus f^{-1}(\{0\})$ alors f est holomorphe sur Δ . D'autres démonstrations de ce résultat ont été données dans [4,5], une des plus jolies est celle de I. Glicksberg qui utilise le théorème de maximalité de Wermer (voir par exemple [10], chapitre 10). I. Glicksberg a aussi montré que le résultat reste vrai si on remplace $\Delta \setminus f^{-1}(\{0\})$ par $\Delta \setminus f^{-1}(E)$, où E est un ensemble dénombrable de $\mathbb{C}$. S. Kakutani s'est posé la question de savoir si ce même résultat reste vrai pour E de capacité nulle. En fait, d'une façon compliquée, E.L. Stout [9] a pu obtenir une très légère généralisation de cette conjecture. L'objet de cette petite note est de montrer comment elle s'obtient très facilement à partir du théorème de H. Cartan. L'idée de cette

* Travail partiellement subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada (A 7668).

méthode m'a été inspirée par la construction, à l'aide du théorème d'Evans, de l'exemple de [1].

PROPOSITION. (H. Cartan). *Si u est sous-harmonique sur un domaine D de $\mathbb{C}$, non identique à $-\infty$, alors $\{z | u(z) = -\infty\}$ est un G_δ localement de capacité zéro. Réciproquement, si G est un ensemble compact de $\mathbb{C}$ il existe u sous-harmonique sur $\mathbb{C}$, non identique à $-\infty$, telle que $u(x) = -\infty$ sur G .*

Voir [3], p. 274-276.

Rappelons qu'une fonction est dite holomorphe sur un ensemble si elle est holomorphe sur un ouvert contenant cet ensemble.

THEOREME. *Soient V une variété analytique complexe, f une fonction continue sur V , E un sous-ensemble de capacité intérieure nulle de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe sur $V \setminus f^{-1}(E)$ elle est holomorphe sur V .*

Démonstration. Comme le résultat est purement local on peut supposer que V est le polydisque $\{z | |z_i| < 1, i = 1, \dots, k\}$. La fonction f étant continue, d'après le lemme d'Osgood, il suffit de montrer qu'elle est séparément holomorphe, autrement dit on peut supposer que $k = 1$, c'est-à-dire que $V = \Delta$. Comme f est holomorphe sur $\Delta \setminus f^{-1}(E)$ il existe un ouvert U contenant $\Delta \setminus f^{-1}(E)$ sur lequel f est holomorphe.

Posons $F = \Delta \setminus U$, $\Delta_n = \{z | |z| < 1 - \frac{1}{n}\}$ pour $n \geq 1$ et $F_n = F \cap \overline{\Delta_n}$. Alors $E_n = f(F_n)$ est un compact contenu dans E , donc de capacité nulle. D'après le théorème de Cartan il existe u_n sous-harmonique telle que $u_n(z) = -\infty$ sur E_n . Posons $\phi_n(z) =$

$u_n(f(z))$ pour $z \in \Delta_n$. Il est évident que ϕ_n est semi-continue supérieurement, elle est localement sous-harmonique en tout point de $U \cap \Delta_n$, puisque f est holomorphe sur cet ensemble et localement sous-harmonique de façon triviale sur $F_n \cap \Delta_n$, donc ϕ_n est sous-harmonique sur Δ_n . Si f est constante sur Δ le théorème est évident, supposons donc f non constante sur Δ_n pour n assez grand. Si $\phi_{n+1} \equiv -\infty$ pour n assez grand, $f(\overline{\Delta}_n)$ est un compact connexe contenu dans $\{z | u_{n+1}(z) = -\infty\}$ qui est de capacité nulle, d'où $f(\overline{\Delta}_n)$ est un compact connexe de capacité nulle, autrement dit $f(\overline{\Delta}_n)$ est réduit à un seul point, c'est-à-dire f est constante sur $\overline{\Delta}_n$. D'après ce qui précède il résulte que pour n assez grand ϕ_{n+1} n'est pas identique à $-\infty$. Aussi, à nouveau d'après le théorème de Cartan, comme $F_n \subset \{z | \phi_{n+1}(z) = -\infty\}$, F_n est de capacité nulle pour n assez grand. Soit T un triangle contenu dans Δ et n assez grand de façon que $T \subset \Delta_n$ et que F_n soit de capacité nulle. Comme F_n est de mesure linéaire de Hausdorff nulle (voir [3], p. 225), pour $\varepsilon > 0$ il existe des disques $D_1, \dots, D_\ell$ qui recouvrent F_n , de rayons $r_1, \dots, r_\ell$ tels que $r_1 + \dots + r_\ell < \varepsilon$. Soit T_ε le nouveau chemin orienté obtenu en supprimant les segments de T contenus dans les D_i et en ajoutant les bords orientés des D_i , contenus dans l'intérieur de T . D'après le théorème de Cauchy on a $\int_{T_\varepsilon} f(z) dz = 0$, mais

$$\left| \int_T f(z) dz - \int_{T_\varepsilon} f(z) dz \right| \text{ est inférieur ou égal à } \sup_{z \in \overline{\Delta}_n} |f(z)| \cdot \sum_{i=1}^{\ell} r_i \leq 2\pi\varepsilon \sup_{z \in \overline{\Delta}_n} |f(z)|$$

donc $\int_T f(z) dz = 0$ ce qui, d'après le théorème de Morera, implique que f est holomorphe sur Δ . $\square$

Remarque 1. Au lieu de terminer en utilisant le théorème de Morera on aurait pu raisonner comme dans la fin de la démonstration du théorème

1 de [6], p. 54. J. Wermer m'a signalé qu'on aurait aussi pu terminer en utilisant le fait qu'une fonction bornée, harmonique en dehors d'un ensemble de capacité nulle, se prolonge en une fonction harmonique sur tout Δ . En appliquant cela à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sur $U \cap \Delta_n$ on déduit que $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ s'étend en une fonction holomorphe sur Δ_n , donc que f est holomorphe sur Δ .

Remarque 2. Contrairement à ce qu'avait conjecturé E.L. Stout, le théorème est aussi vrai pour certains ensembles de capacité positive (voir [7]).

BIBLIOGRAPHIE

1. AUPETIT, B., WERMER J., Capacity and uniform algebras, *J. Functional Analysis*, à paraître.
2. CARTAN, H.: Sur une extension d'un théorème de Radó, *Math. Ann.* 125(1952), 49-50.
3. HAYMAN, W.K., KENNEDY, P.B.: *Subharmonic functions, Volume 1*, Academic Press, London, 1976.
4. HEINZ, E.: Ein elementarer Beweis des Satzes von Radó - Behnke - Stein - Cartan über analytische Funktionen, *Math. Ann.* 131 (1956), 258-259.
5. KAUFMAN, R.: A theorem of Radó, *Math. Ann.* 169 (1967), 282.
6. NARASIMHAN, R.: *Several Complex variables*, The University of Chicago Press, Chicago, 1971.
7. OSADA, M.: On a problem of E.L. Stout, *Proc. Japan Acad.* 51 (1975), 234-236.

8. RADÓ, T.: Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, *Math. Z.* 20 (1924), 1-6.
9. STOUT, E.L.: A generalization of a theorem of Radó, *Math. Ann.* 177 (1968), 339-340.
10. WERMER, J.: *Banach algebras and several complex variables*, 2nd edition, Springer - Verlag, New York, 1976.

B. Aupetit,
Département de Mathématiques,
Université Laval,
Québec, P.Q. Canada
G1K 7P4

(Reçu le 12. septembre 1977)

