Werk

Titel: Über geschlossene affine Zwangläufe in der Ebene.

Autor: Lübbert, Christoph

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?365956996_0021|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

manuscripta math. 21, 101 - 115 (1977)
© by Springer-Verlag 1977

ÜBER GESCHLOSSENE AFFINE ZWANGLÄUFE IN DER EBENE

Christoph Lübbert

We consider integral coverings $\gamma: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \{1,2,..,\infty\}$ of an affine plane $\mathbb{A}^2$ which occur when $\mathbb{A}^2$ is moved under a continuous periodic affine motion $\alpha(t): \mathbb{A}^2 \to \hat{\mathbb{A}}^2$. One can distinguish normal points $x \in \mathbb{A}^2$, i.e. γ is constant in a certain neighborhood of x, and singular points. If $\gamma(x)$ is the number of times x passes through its orbit $\alpha(t)x$ all normal points x have $\gamma(x)=1$, and the set of all singular points consists of a number of isolated points and lines. If $\gamma(x)$ is the tangent rotation number of the orbit of x all singular points lie on the moving pole curve.

Den Punkten einer Ebene können in mannigfacher Weise ganzzahlige Werte zugeordnet werden, denen eine geometrische Bedeutung zukommt. Bekanntlich wird z.B. die Ebene durch eine stückweise glatte geschlossene orientierte Kurve C in Komponenten zerlegt, auf denen jeweils die "Ordnung" eines Punktes bzgl. C konstant ist (vgl. etwa Krasnoselski u.a. [6], p. 32). Hayashi, [5], p. 98, beschreibt, wie die Evolute eines Ovals O die Ebene in Bereiche zerlegt, in denen die Zahl der Normalen auf O durch einen Punkt konstant ist. Hammer und Sobczyk, [4], betrachten die Überdeckung der Ebene durch bestimmte Geradenfamilien. In Verallgemeinerung hierzu haben wir, [3], geschlossene (nur) stetige ebene Geradenscharen untersucht. Die Bereiche konstanter Überdeckungszahl (Anzahl der Schargeraden durch einen Punkt) werden hier durch eine abgeschlossene zusammenhängende Menge getrennt, welche als verallgemeinerte Enveloppe der Geradenschar aufgefaßt

werden kann. Weitere Beispiele sind ebenfalls in [3] angegeben. In dieser Note werden ganzzahlige Überdeckungen einer affinen "Gangebene" $\mathbb{A}^2$ betrachtet, die bei einem affinen geschlossenen "Zwanglauf" von $\mathbb{A}^2$ gegenüber einer "Rastebene" $\hat{\mathbb{A}}^2$ auftreten können: Den Punkten der Gangebene werden zum einen die Durchlaufzahlen, zum anderen die Tangentendrehzahlen ihrer Bahnen in der Rastebene zugeordnet.

1. Zur Untersuchung einer ganzzahligen Überdeckung

$$\gamma: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{N}^* = \{1,2,..,\infty\}$$

ist es nützlich, "singuläre" Punkte in $\mathbb{A}^2$ zu erklären: $x \in \mathbb{A}^2$ heiße singulärer Punkt, wenn es in jeder Umgebung von x Punkte y mit $\gamma(y) \neq \gamma(x)$ gibt. Ist $\mathcal{E}(\gamma)$ die Menge der singulären Punkte, so nennen wir die Punkte des Komplements $\mathcal{N}(\gamma)=\mathbb{A}^2 - \mathcal{E}(\gamma)$ "normal". Offenbar gilt: $\mathcal{E}(\gamma)$ ist abgeschlossen, $\mathcal{N}(\gamma)$ offen, und auf den Wegkomponenten von $\mathcal{N}(\gamma)$ ist die Überdeckungszahl $\gamma(x)$ jeweils konstant (vgl. [3], p.3).

2. Wir betrachten eine stetige geschlossene Jordankurve

$$\alpha: t \in \mathbb{R} \to \alpha(t) \in \mathcal{A}(2)$$

in der Gruppe $\mathcal{A}(2) \approx \mathbb{R}^2 \otimes GL(2,\mathbb{R})$ der reellen affinen Ebene $\mathbb{A}^2$. α habe die t-Periode 1, d.h. es gilt

$$\alpha(t + 1) = \alpha(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \tag{1a}$$

und aus $0 < \tau < 1$ folgt: es gibt ein $t_o(\tau) \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha(t_o + \tau) \neq \alpha(t_o). \tag{1b}$$

α ist somit nicht die Identität; weiterhin soll α i. allg. keine 1-parametrige Untergruppe von $\mathcal{A}(2)$ durchlaufen. α bewirkt einen geschlossenen affinen "Zwanglauf"

$$x \in \mathbb{A}^2 \mapsto \alpha(t)x = \hat{x}(t,x) \in \hat{\mathbb{A}}^2, \; t \in [0,1],$$

bei dem jeder Punkt x der "Gangebene" $\mathbb{A}^2$ eine geschlossene

Bahn $\hat{x}(t,x)$ in der "Rastebene" $\hat{\mathbb{A}}^2$ durchläuft.
$x_o \in \mathbb{A}^2$ heißt ein Fixpunkt von α, wenn $\hat{x}(t,x_o)$ zu einem Punkt von $\hat{\mathbb{A}}^2$ entartet. Entsprechend heiße w_o eine Fixrichtung von α, wenn $\alpha(t)\, w_o = \lambda(t)\, \hat{w}_o$ $(\lambda(t) > 0)$ und $\hat{w}_o$ ein konstanter Vektor ist. Unter der Periode einer Bahn $\hat{x}(t,x)$ (x kein Fixpunkt) wollen wir analog (1) die Zahl $p(x)$ verstehen mit der Eigenschaft:

$$\hat{x}(t + p(x),x) = \hat{x}(t,x) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\,, \tag{2a}$$

und aus $0 < \tau < p(x)$ folgt: es gibt ein $t_o(\tau,x)$ mit

$$\hat{x}(t_o + \tau,x) \neq \hat{x}(t_o,x)\,. \tag{2b}$$

Wegen (1) ist $p(x)$ von der Form

$$p(x) = \frac{1}{m(x)}\,, \quad m(x) \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Wenn x ein Fixpunkt von α ist, sei $m(x) = \infty$ gesetzt. $m(x)$ heiße die Durchlaufzahl des Gangebenenpunktes x auf seiner Bahn während der Periode 1 des Zwanglaufs α. Eine Bahn kann eine Durchlaufzahl $m(x) > 1$ haben. Rollt z.B. ein Kreis K mit Radius 1/3 auf einem festen Kreis $\hat{K}$ mit Radius 1/2, so entsteht hierdurch ein geschlossener euklidischer Zwanglauf mit der t-Periode 1, wenn man $t = s/2\pi$ setzt, wobei s die Bogenlänge auf K bzw. $\hat{K}$ ist. Der Mittelpunkt x_o von K hat die Durchlaufzahl $m(x_o)=2$, während alle anderen mit der Ebene von K fest verbundenen Punkte ihre Bahn nur einmal durchlaufen. Bei affinen Zwangläufen können jedoch mehrere Durchlaufzahlen > 1 auftreten. Beispiele hierfür werden in Nr. 3 gegeben.

Wir setzen noch von α voraus, daß, wenn x kein Fixpunkt ist, die Bahn $C(x)$: $\hat{x}(t,x)$ sich aus endlich vielen Jordanbögen zusammensetzt. Weiter soll x normaler Punkt der Überdeckung

$$m_\alpha\colon\ y \in \mathbb{A}^2 \to m(y) \in \mathbb{N}^* = \{1,2,\ldots,\infty\}$$

sein, wenn seine Bahn zu einem mehrfach durchlaufenen Jordanbogen entartet ist; das ist genau dann der Fall, wenn jeder Punkt

$\hat{x}_o \notin C(x)$ der Rastebene bezüglich $C(x)$ die Ordnung [1] 0 hat. (Hiermit wird z.B. auch die Papierstreifenkonstruktion für Ellipsen zugelassen, bei der doppelt durchlaufene Strecken als Bahnen auftreten.) Um eine Vorstellung von der Überdeckung m_α zu bekommen, definieren wir in der Gangebene folgende Punktmengen $X(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$X(1) := \{x \in \mathbb{A}^2 / m(x)=1\},\quad X(\infty) := \{x \in \mathbb{A}^2 / \text{ x Fixpunkt von } \alpha\} \tag{3a}$$

und für $1 < n < \infty$:

$$X(n) := \begin{cases} \emptyset, \text{ wenn es keinen Punkt } x \in \mathbb{A}^2 \text{ mit } m(x)=n \text{ gibt} \\ \{x \in \mathbb{A}^2 / \, n \mid m(x)\ \} \text{ sonst } [2] \end{cases} \tag{3b}$$

SATZ 1: X(1) ist die Menge $\mathcal{N}(m_\alpha)$ der normalen Punkte der Überdeckung der Gangebene mit den Durchlaufzahlen bei einem affinen geschlossenen Zwanglauf α .

Beweis: Zunächst gilt $\mathcal{N}(m_\alpha) \subset X(1)$, denn nach Definition von $\mathcal{N}$ in Nr. 1 gibt es zu $x \in \mathcal{N}(m_\alpha)$ eine Umgebung U, in der alle Punkte die Durchlaufzahl $m(x)$ haben. Jedes $y \in U$ ist daher Fixpunkt der affinen Abbildung $\beta(t;m(x)) := \alpha^{-1}(t)\alpha(t+\frac{1}{m(x)})$ für alle t. β ist also für alle t die Identität, woraus wegen (1) folgt: $m(x) = 1$. Sei umgekehrt $x \in X(1)$, also $m(x) = 1$. Die Bahn $C(x):\hat{x}(1,x)$ zerlegt die Rastebene $\hat{\mathbb{A}}^2$ in Bereiche, auf denen die Ordnung bezüglich $C(x)$ konstant ist. Mit den Voraussetzungen über den Zwanglauf α können wir annehmen, daß $C(x)$ nicht zu einem Kurvenstück entartet ist. Dann gibt es einen Punkt $\hat{x}_o$

---

1) Die Ordnung eines Punktes $\hat{x}_o \notin C$ bezüglich der Kurve C: $\hat{x}(t)$ sei die durch 2π geteilte Gesamtdrehung des Vektors $w(t) = \hat{x}(t) - \hat{x}_o$. (Vgl. [6], p. 32).

2) $n \mid m(x)$ heiße: n ist Teiler von $m(x)$.

von $\hat{\mathbb{A}}^2 - C(x)$ mit der Ordnung 1 bzgl. C(x) [3]. Ist in der Gangebene der Punkt y hinreichend nahe bei x, so kann die Bahn C(y) als hinreichend kleine Störung der Bahn C(x) aufgefaßt werden, so daß - nach einem Satz aus der Theorie der ebenen Vektorfelder [4] - $\hat{x}_o$ bezüglich der Bahn C(y) ebenfalls die Ordnung 1 hat. Daher ist die Durchlaufzahl von y ebenfalls =1. Da dies für alle Gangebenenpunkte y einer hinreichend kleinen Umgebung von x gilt, folgt $x \in \mathcal{N}(m_\alpha)$ und damit $X(1) \subset \mathcal{N}(m_\alpha)$.

Für die Menge $\mathcal{E}(m_\alpha) = \bigcup_{n>1} X(n)$ der singulären Punkte der Gangebene gilt noch

SATZ 2: (a) X(n) (n > 1) ist entweder leer oder ein isolierter Punkt x (m(x)=n) oder eine Gerade, auf der m(x)=n gilt für alle Punkte bis auf höchstens abzählbar viele Ausnahmepunkte, wobei für zwei Ausnahmepunkte $x_1, x_2 \in X(n)$ gilt: $GGT(m(x_1), m(x_2)) = n$. [5]
(b) Aus $\emptyset \neq X(n_1) \subset X(n)$ folgt entweder $n_1 = n$ oder $X(n_1)$ ist ein Punkt. Aus $X(n_1) \not\subset X(n) \neq \emptyset$ folgt $GGT(n_1, n) = 1$, und falls beide Mengen Geraden sind, besitzt ihr Schnittpunkt (oder ihre gemeinsame Richtung) eine Durchlaufzahl, die von $n_1 n$ geteilt wird.

Beweis: (a) Da die affine Abbildungsschar $\alpha(t)$ nicht konstant ist, hat sie keine 3 Fixpunkte in allgemeiner Lage. Wenn α zwei verschiedene Fixpunkte $x_1, x_2 \in \mathbb{A}^2$ hat, so sind alle Punkte auf der

---

3) Zur geschlossenen Kurve C(x) gibt es ein Gebiet $G_o \subset \hat{\mathbb{A}}^2$, dessen Punkte die Ordnung 0 bzgl. C(x) haben. Ist $z_o \in G_o$, so hat x_o die Ordnung 1, wenn es einen Weg zwischen z_o und x_o gibt, der C(x) genau einmal trifft. Nach den Voraussetzungen über C(x) ist dies möglich.

4) Vgl. [6], p. 33, Satz 5.3.

5) Mit $GGT(m_1, .., m_k)$ sei der größte gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen $m_1, \ldots, m_k$ gemeint.

Geraden durch x_1, x_2 fix. Daher ist $X(\infty)$ entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade. Analog ist für $1 < n < \infty$ jeder Punkt $x \in X(n)$ Fixpunkt der affinen Abbildungsschar $\beta(t;n) := \alpha^{-1}(t)\alpha(t+\frac{1}{n})$. Wenn $X(n)$ nicht leer ist, gibt es wegen (3b) in $X(n)$ einen Punkt x_o mit $m(x_o)=n$. Hätte $X(n)$ 3 Punkte x_o, x_1, x_2 in allgemeiner Lage, so wären diese wegen $m(x_o)=n \mid m(x_i)$ $(i=1,2)$ Fixpunkte von $\beta(t;n)$, also wäre $\beta(t;n)$ die Identität, d.h. $\alpha(t+\frac{1}{n})=\alpha(t)$ für alle t, woraus entgegen der Voraussetzung $n=1$ folgen würde. Für $1 < n < \infty$ ergibt sich also ebenfalls, daß $X(n)$ entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade ist. Sind schließlich x_1, x_2 zwei Ausnahmepunkte von $X(n)$ mit $m(x_i)=n_i n$, würde die Annahme $GGT(m(x_1), m(x_2)) = n \cdot d$ dazu führen, daß $n \cdot d \mid m(x)$ gilt für alle $x \in X(n)$, woraus wegen (3b) $d = 1$ folgt. (b) beweist man leicht durch ähnliche Schlüsse wie (a).

Hat der affine Zwanglauf Fixpunkte, so ist die Verteilung der singulären Punkte (Durchlaufzahl > 1) besonders einfach:

SATZ 3: Besitzt der affine geschlossene Zwanglauf α eine punktweise Fixgerade $g = X(\infty)$, so sind alle Punkte $x \notin g$ der Gangebene normal (Durchlaufzahl 1). Besitzt α einen einzigen Fixpunkt x_o, so besteht die Menge der singulären Punkte aus einem Büschel von (höchstens abzählbar vielen) Geraden durch x_o.

Beweis: Ist $X(\infty)=g$ eine Gerade und $x \notin g$, so hat die affine Abbildung $\beta(t;m(x))$ neben x noch die Punkte von g als Fixpunkte. β ist also die Identität für alle t, woraus $m(x)=1$ folgt. Besteht $X(\infty)$ nur aus einem Punkt x_o, und ist x irgendein Punkt mit endlicher Durchlaufzahl $m(x) > 1$, so liegen alle Fixpunkte von $\beta(t;m(x))$ auf der Geraden durch x_o und x, also ist $X(m(x))$ eine Gerade durch x_o.

Es fragt sich, ob bei einem geschlossenen affinen Zwanglauf α unendlich viele von 1 verschiedene Durchlaufzahlen auftreten können. Wir beweisen wenigstens den

SATZ 4: Wenn der affine geschlossene Zwanglauf α weder Fixpunkte noch Fixrichtungen hat, treten nur endlich viele Durchlaufzahlen > 1 auf.

Beweis: Nimmt man an, daß die Folge

$$1 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

der Durchlaufzahlen nicht abbricht, so gibt es eine unendliche Punktfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in der Gangebene mit $m(x_k)=m_k$. Diese hat einen Häufungspunkt $\bar{x}$, der entweder in $\mathbb{A}^2$ oder auf der Ferngeraden g_∞ von $\mathbb{A}^2$ liegt. (Wir fassen, wie üblich, $\mathbb{A}^2 \cup g_\infty = \mathbb{P}^2$ als kompakte projektive Ebene auf und können die Richtungen von $\mathbb{A}^2$ mit den Punkten der doppelt gezählten Ferngeraden g_∞ identifizieren, so daß die Wirkung von α auch auf P^2 definiert ist.) Nach Voraussetzung soll der Punkt (oder die Richtung) $\bar{x}$ kein Fixelement von α sein. Wir betrachten einen Bogen b der Bahn $\hat{x}(t,\bar{x})$ in der projektiv abgeschlossenen Rastebene $\hat{\mathbb{P}}^2=\hat{\mathbb{A}}^2 \cup \hat{g}_\infty$. Zu b gehöre das Parameterintervall $I = [t_o - \Delta t,\ t_o + \Delta t]$. Zu jeder Umgebung U von x und zu beliebig kleinem $\Delta t > 0$ gibt es dann einen Punkt x_i der Folge (x_k), so daß $x_i \in U$ und $\frac{1}{m(x_i)} = \frac{1}{m_i} < \Delta t$ ist. Alle Punkte der Bahn $\hat{x}(t,x_i)$ liegen dann ganz in der Umgebung $V_{\Delta t} := \bigcup_{\tau \in I} \alpha(\tau)U$ des Bogens b. Da für jedes t die Abbildungen $\alpha(t)$ topologisch sind und stetig von t abhängen, muß umgekehrt auch die ganze Bahn $\hat{x}(t,\bar{x})$ in $V_{\Delta t}$ liegen. Beim Grenzübergang $\Delta t \to 0$, $U \to \{\bar{x}\}$ erkennt man, daß die Bahn von $\bar{x}$ zu einem Punkt entartet, entgegen der Voraussetzung, daß α keine Fixpunkte (oder Fixrichtungen) haben soll.

Anmerkung: Natürlich sind alle Bahnen $\hat{x}(t,x)$ $(x \in \mathbb{A}^2)$ eines geschlossenen affinen Zwanglaufs α untereinander homotop, wenn man

das Parameterintervall $t \in [0,1]$ zugrundelegt. Bezeichnen wir als "reduzierte" Bahn $\hat{x}'(t,x)$, die Beschränkung auf das jeweilige Periodenintervall $t \in [0, \frac{1}{m(x)}]$, so sind jedoch i. allg. zwei reduzierte Bahnen von α nicht mehr homotop. Vielmehr läuft die Betrachtung der Durchlaufzahlen auf die Bestimmung der Homotopieklassen in der Menge der reduzierten Bahnen eines geschlossenen affinen Zwanglaufs α hinaus!

3. An einigen Beispielen sei nun gezeigt, daß die in den vorangegangenen Sätzen angegebene Vielfalt der möglichen Über - deckungen der Gangebene mit Durchlaufzahlen wirklich auftreten kann. Wählt man in der Gang- und Rastebene je ein affines Koordinatensystem, in dem sich die Punkte $x \in \mathbb{A}^2$, $\hat{x} \in \hat{\mathbb{A}}^2$ durch Spalten $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ darstellen, so kann der Zwanglauf α durch eine Matrixschar

$$\alpha(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1(t) & & \\ a_2(t) & & a_{ik}(t) \end{array}\right) = \tau(t)\ \zeta(t),\ \det\alpha(t) > 0 \qquad (4)$$

mit Translationen bzw. Zentralaffinitäten.

$$\tau(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1(t) & 1 & 0 \\ a_2(t) & 0 & 1 \end{array}\right), \zeta(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & a_{ik}(t) \end{array}\right), (a_{ik}(t)) \in GL(2,\mathbb{R})$$

dargestellt werden, wobei die reellen stetigen Funktionen $a_i(t)$, $a_{ik}(t)$ Perioden der Form $\frac{1}{m(a_i)}$ bzw. $\frac{1}{m(a_{ik})}$, $m(a_i), m(a_{ik}) \in \mathbb{N}^*$ haben. Die $m(...)$ nennen wir wieder Durchlaufzahlen. Wir nennen vorübergehend zwei stetige Funktionen $f(t)$, $g(t)$ $(t \in [0,1])$ mit endlichen Durchlaufzahlen $m(f)$, $m(g)$ periodisch unabhängig, wenn für beliebige von 0 verschiedene Konstanten λ, μ gilt

$$m(\lambda f + \mu g) = GGT(m(f), m(g)) \ ; \qquad (5)$$

z.B. sind $\cos(2\pi mt)$, $\sin(2\pi nt)$ $(m,n\in\mathbb{N})$ periodisch unabhängig, dagegen sind $f(t) = 5\cos(6\pi t)-2\sin(8\pi t)$ und $g(t) = \sin(8\pi t)$ nicht periodisch unabhängig.

BEISPIEL 1: Setzen wir abkürzend $\cos(2\pi nt):=c(nt)$, $\sin(2\pi nt):=s(nt)$ und betrachten den durch

$$\alpha(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c(2t) & 3-c(2t)+c(3t) & s(3t) \\ s(2t) & -s(2t)+s(3t) & 3+c(3t) \end{array}\right)$$

gegebenen affinen Zwanglauf: Es gilt $\det\alpha(t) > 0$, $\alpha(t)$ hat die Periode 1, die ersten beiden Spalten von α sind nicht periodisch unabhängig. Da jedoch alle Funktionen $c(..)$, $s(..)$ paarweise periodisch unabhängig sind, folgt, wie man leicht bestätigt, daß die Menge $\mathcal{E}(m_\alpha)$ der singulären Punkte der Gangebene besteht aus

(i) einem isolierten Punkt $x_o = \begin{pmatrix}1\\o\\o\end{pmatrix}$ mit $m(x_o) = 2$ und

(ii) einer Geraden $X(3)$, bestehend aus den Punkten $x=\begin{pmatrix}1\\1\\x^2\end{pmatrix}$ $(x^2\in\mathbb{R})$,

die alle die Durchlaufzahl 3 haben.

Man kann aber auch Zwangläufe konstruieren, bei denen die Menge $\mathcal{E}(m_\alpha)$ der singulären Punkte aus einer höheren Anzahl von Geraden besteht:

BEISPIEL 2: Für die Matrix

$$\alpha(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_i & a_{ik} & \end{array}\right) \qquad (i,k = 1,2)$$

setzen wir an

$$a_i(t) = b_i(t) + \sum_{r=1}^{2} \mu_r\, c_{ir}(t) \qquad (6)$$

$$a_{ik}(t) = b_{ik}(t) + \sum_{r=1}^{2} \mu_{kr} c_{ir}(t)$$

mit von 0 verschiedenen Konstanten μ_r, μ_{kr}. Die auftretenden

Funktionen b, c seien in jeder Zeile von α periodisch unabhängig. b_{11}, b_{22} seien betragsmäßig so groß gewählt, daß det $\alpha > 0$ wird. Für die Durchlaufzahlen der Funktionen im Intervall $t \in [0,1]$ wählen wir:

$m(b_1)=m(b_2)= 210$, $m(b_{11})=m(b_{21})= 105$, $m(b_{12})=m(b_{22}) = 70$,

$m(c_{11})=m(c_{21}) = 42$, $m(c_{12})= m(c_{22}) = 30$. Es gilt offenbar $GGT(m(b_i), m(c_i), m(b_{ik}), m(c_{ik}); i,k=1,2) = 1$, d.h. α hat die Periode 1. Dann besteht die Menge der singulären Punkte in der Gangebene aus 4 Geraden, auf denen mindestens die Durchlaufzahlen 2,3,5 und 7 angenommen werden:

$X(2)$: $x^1=0$, $X(3)$: $x^2=0$, $X(5)$: $\mu_1+\mu_{11}x^1+\mu_{21}x^2=0$,
$X(7)$: $\mu_2+\mu_{12}x^1+\mu_{22}x^2=0$.

Aus diesem Beispiel sieht man, daß man die Anzahl der Durchlaufzahlen noch erhöhen kann, wenn man in (6) den Index r nicht nur von 1 bis 2 laufen läßt.

BEISPIEL 3: Es wurde zunächst ausgeschlossen, daß $\alpha^{-1}(0)$ $\alpha(t)$ in $\mathcal{A}(2)$ eine 1-parametrige Untergruppe (mit t als Gruppenparameter) durchläuft, denn da α geschlossen sein soll, käme nur die Drehgruppe mit Drehwinkel $2\pi t$ in Betracht (vgl. etwa Bol]2], p. 33). Wir betrachten nun noch den Fall, daß in der Produktzerlegung

$$\alpha(t) = \tau(t)\zeta(t)$$

(τ: Translationen, ζ: Zentralaffinitäten) einer der beiden Faktoren eine 1-parametrige affine Untergruppe durchläuft. Da α geschlossen sein soll, kommt, wie man leicht nachrechnet, nur der Fall in Betracht, daß $\zeta(t)$ die Drehgruppe (eventuell mehrfach) durchläuft, während $\tau(t)$ eine periodische Schar von Translationen ist. In diesem Fall ist also α ein geschlossener euklidischer Bewegungsvorgang, der "regulär" ist in dem Sinne, daß man bis auf einen konstanten Faktor $\neq 0$ den Drehwinkel der Drehung $\zeta(t)$ als Parameter t nehmen kann. Hier gilt der

SATZ 5: Bei einem regulären euklidischen Bewegungsvorgang $\alpha(t): \mathbb{A}^2 \to \hat{\mathbb{A}}^2$ gibt es entweder keinen oder genau einen singulären Punkt in der Gangebene $\mathbb{A}^2$, dessen Durchlaufzahl größer als 1 ist.

Beweis: Nach Wahl je eines kartesischen Koordinatensystems in $\mathbb{A}^2$ und $\hat{\mathbb{A}}^2$ lassen sich die Punkte in komplexen Zeigern $x=x^1 + ix^2$, $\hat{x}=\hat{x}^1 + i\hat{x}^2$ darstellen, so daß der Zwanglauf α durch

$$x \in \mathbb{A}^2 \mapsto \alpha(t)x = \hat{x}(t,x) = \hat{u}(t) + x\, e^{i\varphi(t)} \in \hat{\mathbb{A}}^2 \qquad (7)$$

beschrieben wird. Soll t Gruppenparameter des Drehanteils sein, so gilt

$$\varphi(t) = 2\pi\, n\, t \quad (n \neq 0, \text{ ganz})$$

n heißt bekanntlich die Drehzahl der Gangebene [6]. Für die Durchlaufzahlen der Gangebenenpunkte gilt (vgl. [7], p. 312)

$$GGT(n,\ m(x)) = 1 \qquad (8)$$

Ist $x_o \in \mathbb{A}^2$ ein singulärer Punkt mit $m(x_o) = m_o > 1$, so können wir x_o zum Ursprung des Koordinatensystems der Gangebene machen, so daß $x_o = 0$ gilt. Seine Bahn ist dann $\hat{x}(t,x_o) = \hat{u}(t)$, also gilt

$$\hat{u}\left(t + \frac{1}{m_o}\right) = \hat{u}(t) \quad \text{für alle } t \qquad (9)$$

Nehmen wir an, es gibt noch einen weiteren singulären Punkt $x_1 \neq 0$ mit $m(x_1) = m_1 > 1$. Dann folgt aus der Periodizität der Bahn $\hat{x}(t,x_1)$ mit (7)

$$\hat{u}\left(t + \frac{1}{m_1}\right) - \hat{u}(t) = x_1\, e(nt)\left(1 - e\left(\frac{n}{m_1}\right)\right) \qquad (10)$$

für alle t, wobei abkürzend $e(\tau) := e^{2\pi i \tau}$ gesetzt wurde. Aus der Gruppeneigenschaft $e(\tau_1)e(\tau_2)=e(\tau_1+\tau_2)$ und $e(nt+1)=e(nt)$ erhält man nach Ersetzen von t durch $t+\frac{1}{m_o}$ mit (9) aber auch

---

6) Vgl. Blaschke/Müller [1], p.113 .

$$\hat{u}(t+\frac{1}{m_1}) - \hat{u}(t) = x_1\, e(nt)\, e(\frac{n}{m_o})(1 - e(\frac{n}{m_1})) \qquad (11)$$

Wegen $x_1 \neq 0$ folgt aus (10) und (11): $e(\frac{n}{m_o})=1$, d.h. m_o ist Teiler von n, im Widerspruch zu (8).

Es sei bemerkt, daß die Durchlaufzahl des singulären Punktes x_o bei einem regulären euklidischen Zwanglauf α noch zwei weitere geometrische Bedeutungen hat: (i) Jede einfach durchlaufene Bahn von α hat genau $m(x_o)$ Stützpunkte [7], die in der Gangebene $\mathbb{A}^2$ ein regelmäßiges $m(x_o)$-Eck bilden. (ii) Ist $\alpha^{-1}(t): \hat{\mathbb{A}}^2 \to \mathbb{A}^2$ der inverse Bewegungsvorgang, so ist $m(x_o)$ gleich der Zähligkeit der einfach durchlaufenen Bahnen von α^{-1}, d.h. gleich der Ordnung einer maximalen endlichen Drehgruppe, die eine solche Bahn gestattet. Genaueres hierüber ist in [7] zu finden.

4. Abschließend betrachten wir eine weitere ganzzahlige Überdeckung der Gangebene eines geschlossenen affinen Zwanglaufs $\alpha(t)$ $(t \in [0,1])$. Nach Wahl von Koordinatensystemen in $\mathbb{A}^2$, $\hat{\mathbb{A}}^2$ stellen wir $\alpha(t)$ als Matrix (4) dar und setzen 2-malige stetige Differenzierbarkeit nach t voraus. Die stetig differenzierbare Ableitungsmatrix $\sigma(t)$ in

$$\dot{\alpha}(t) = \sigma(t)\, \alpha(t)$$

hat dann die Form

$$\sigma(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline \vartheta(t) & & \\ & S(t) & \end{array}\right) \quad , \vartheta(t) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Der Einfachheit halber fordern wir, daß der Zwanglauf α "regulär"

---

7) Vgl. H.R. Müller [9], p. 328

in dem Sinne sei, daß gilt [8]

$$\text{Rang } S(t) = 2 \text{ für alle } t$$

Dann hat nämlich die Gleichung $\sigma(t)\hat{p} = 0$ für jedes t genau eine Lösung der Form $p = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathfrak{p} \end{pmatrix}$ $(\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^2)$. Setzen wir noch $p := \alpha^{-1}(t)\hat{p}$, so nennt man bekanntlich die Kurven $\hat{P}:\hat{p}(t)$ in $\hat{\mathbb{A}}^2$ und $P:p(t)$ in $\mathbb{A}^2$ "Rast"- und "Gangpolkurve" des Zwanglaufs α. Jeder Gangebenenpunkt $x \in \mathbb{A}^2$ mit $x \notin P$ beschreibt eine reguläre geschlossene Bahn $\hat{x}(t,x)$ in $\hat{\mathbb{A}}^2$, d.h. die Bahn hat an jeder Stelle t einen nicht verschwindenden Tangentenvektor $\mathfrak{v}(t,x)=\dot{\hat{x}}(t,x)$. Die Gesamtdrehung des Vektorfeldes $\mathfrak{v}$ auf der Bahn $\hat{x}(t \in [0,1])$, geteilt durch 2π, nennt man bekanntlich die Tangentendrehzahl; sie sei mit $\gamma(x)$ bezeichnet und ist eine ganze Zahl. Ist $x \in P$, so enthält die Bahn von x endlich viele singuläre Punkte (Spitzen) in denen der Tangentenvektor $\mathfrak{v}$ verschwindet. Für $x \in P$ kann man jedoch ebenfalls eine "Tangentendrehzahl", etwa über die von Morse eingeführte Winkelordnung [9] der Kurve $\hat{x}(t,x)$ definieren. Für die Überdeckung

$$\gamma : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{N}$$

gilt nun

SATZ 6: Die Gangpolbahn P zerlegt die Gangebene $\mathbb{A}^2$ eines regulären affinen geschlossenen Zwanglaufs in Komponenten, auf denen die Tangentendrehzahl $\gamma(x)$ konstant ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem bekannten Satz von Whitney [10], nach dem zwei reguläre ebene geschlossene Kurven

---

8) Die Voraussetzung der "Regularität" von α ist für das Folgende nicht zwingend. Würde man an endlich vielen Stellen $t_i \in [0,1]$ Rang $S(t_i)=1$ zulassen, so bestünden die durch $\sigma(t)\hat{p}(t) = 0$ bestimmten Polgebilde $\hat{p}(t)$ und $p=\alpha^{-1}(t)\hat{p}(t)$ aus endlich vielen glatten Bögen für $t \neq t_i$ und endlich vielen "Polgeraden" oder Fernpolstellungen bei t_i. Satz 5 würde noch gelten.

9) Vgl. M. Morse [8],

10) H. Whitney [10], p. 278

(Tangentenvektor $\neq 0$, endlich viele Doppelpunkte) genau dann regulär ineinander deformierbar sind, wenn sie die gleiche Tangentendrehzahl haben: Gehören nämlich x,y derselben Wegkomponente von $\mathbb{A}^2 - P$ an, so kann man die beiden Punkte durch einen stetigen Weg $z(\lambda)$ miteinander verbinden ohne P zu treffen. Die Schar $\hat{x}(t,z(\lambda))$ mit $z(0)=x$, $z(1)=y$, $t\in[0,1]$ verbindet die Kurven $\hat{x}(t,x)$, $\hat{x}(t,y)$ regulär.

Ist α ein regulärer euklidischer Zwanglauf, so wird er bekanntlich durch das Abrollen der Gangpolbahn P auf der Rastpolbahn P bestimmt. In diesem Fall kann man noch leicht zeigen:

SATZ 7: Die Tangentendrehzahlen zweier Komponenten von $\mathbb{A}^2 - P$, die in einem einfachen Bogen von P angrenzen, unterscheiden sich um den Betrag der Durchlaufzahl der Gangpolbahn (im t-Intervall $[0,1]$).

Beweis: $m(p)$ sei die Durchlaufzahl der Gangpolbahn $p(t)$ im Periodenintervall $[0,1]$ des Zwanglaufs; mit $p'(t)$ bezeichnen wir die auf ihr Periodenintervall $[0,1/m(p)]$ reduzierte Gangpolbahn. Sind nun $x,y \in \mathbb{A}^2 - P$ zwei Gangebenenpunkte, die durch einen Weg verbunden werden können, der P genau einmal trifft, so unterscheiden sich bekanntlich ihre Ordnungen, $\delta'(x)$, $\delta'(y)$ bez. der reduzierten Kurve $p'(t)$ um ± 1 [11]. Also gilt für ihre Ordnungen bez. der vollen Gangpolbahn $p(t)$

$$|\delta(x) - \delta(y)| = m(p) \qquad (12)$$

Hat die Gangebene des euklidischen Zwanglaufs α die Drehzahl n (vgl. Nr. 3, Beispiel 3), so steht nach Blaschke/Müller ([1], p.126) die Ordnung $\delta(x)$ mit der Tangentendrehzahl $\gamma(x)$ für einen Gangebenenpunkt $x \notin P$ in der Beziehung

$$\gamma(x) = n + \delta(x),$$

11) Vgl. etwa Krasnoselski u.a. [6], p. 34.

woraus wegen (12) und der Unabhängigkeit der Drehzahl von x die Behauptung des Satzes folgt.

Demnach ist die Gangpolbahn P gleich der Menge der singulären Punkte bei der Überdeckung γ. Man kann sich überlegen, daß Satz 6 auch allgemeiner bei einem regulären affinen Zwanglauf gilt.

Literatur

[1] BLASCHKE, W./MÜLLER, H.R.: Ebene Kinematik, München 1956.

[2] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie I. Göttingen 1950.

[3] DOUGLAS, V./HEIL,E./LÜBBERT, C.: Geradenfamilien, Enveloppen und Evoluten. Journal r.a.Math. 283/284 (1976), 370-383.

[4] HAMMER, P.C./SOBCZYK, A.: Planar line families I,II. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953) 226-233, 341-349.

[5] HAYASHI, T.: Some geometrikal applikations of Fourier serien. Rend. Circ. Matem. Palermo, 50 (1926), 96-102

[6] KRASNOSELSKI, M.A./ PEROW, A.I./ POWOLOZKI, A.I./SABREJKO, P.P.: Vektorfelder in der Ebene. Berlin 1966.

[7] LÜBBERT, C.: Symmetrieeigenschaften ebener periodischer Bewegungsvorgänge, ZAMM 52 (1972) 311-314.

[8] MORSE, M.: Topological methods in the theory of functions of a complex variable (Ann. of math. studies, Nr.15) Princeton University Press, 1947.

[9] MÜLLER, H.R.: Bewegungsvorgänge mit mehrfach durchlaufenen Bahnkurven. Monatsh. Math. 67 (1963) 326-334.

[10] WHITNEY, H.: On regular closed curves in the plane. Compos. math. 4 (1937) 276-284.

Christoph Lübbert
Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule
6100 Darmstadt
Schloßgartenstr. 7
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 8. September 1976)