manuscripta math. 18, 317 - 326 (1976)

SUMMIERBARKEIT DER GEOMETRISCHEN REIHE AUF VORGESCHRIEBENEN MENGEN

Wolfgang Luh und Rolf Trautner

In this paper we are concerned with the summability of the geometric series $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ by matrix methods. We prove the following theorem: Suppose $M_0 := \{z: |z|<1\}$, M_1, M_2, $\cdots$ is a collection of countably many Lebesgue measureable, disjoint sets. For $k=1,2,\cdots$ let f_k be a prescribed function, analytic on $\overline{M_k}$. Then there exists a triangular matrix $V=(c_{n\nu})$, such that the V-transform $\{\sigma_n(z)\}$ of the geometric series has the following properties: $\{\sigma_n(z)\}$ converges compactly to $\frac{1}{1-z}$ on M_0; for $k=1,2,\cdots$ there are sets B_k, such that $B_k \Delta M_k$ has Lebesgue - measure zero and $\sigma_n(z) \to f_k(z)$ for $z \in B_k$; if $M^* = [\bigcup_{k \geq 0} M_k]^c$ there is a set B^*, such that $B^* \Delta M^*$ has Lebesgue - measure zero and $\{\sigma_n(z)\}$ diverges for $z \in B^*$.

1. EINLEITUNG

Es sei $V = (c_{n\nu})_{\substack{n=0,\ldots,\infty \\ \nu=0,\ldots,\nu_n}}$ eine zeilenfinite Matrix, von der wir verlangen, daß sie die Zeilensummenbedingung

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} = 1$$

erfüllt. Für ein $z \in \mathbb{C}$ wird durch V der Folge $\{z^n\}$ eine

Bildfolge $\{\tau_n(z)\}$ mit

$$\tau_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} z^\nu$$

und der Folge der Teilsummen der geometrischen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ eine Bildfolge $\{\sigma_n(z)\}$ mit

$$\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu}(1+z+\ldots+z^\nu)$$

zugeordnet. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$T_V = \left\{z\in\mathbb{C}:\ z\neq 1,\ \{\tau_n(z)\} \text{ konvergiert}\right\} ,$$

$$S_V = \left\{z\in\mathbb{C}:\ z\neq 1,\ \{\sigma_n(z)\} \text{ konvergiert}\right\} .$$

Für $z\neq 1$ gilt

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{1-z}\sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} - \frac{z}{1-z}\tau_n(z) ,$$

so daß wegen der Zeilensummenbedingung der Zusammenhang

$$S_V = T_V \cup \{0\}$$

besteht.

Die Mengen T_V und S_V sind LEBESGUE-meßbar, denn die Funktionen $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}\right\}\tau_n(z)$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}\right\}\tau_n(z)$ sind LEBESGUE-meßbar, also auch die Punktmenge, auf welcher gilt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}\right\}\tau_n(z) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}\right\}\tau_n(z) .$$

Wir benutzen folgende Bezeichnungen. Für Teilmengen M_1, M_2 von $\mathbb{C}$ sei $M_1 \Delta M_2 := (M_1 \cup M_2)\setminus(M_1 \cap M_2)$ deren symmetrische Differenz. Das LEBESGUEsche Maß einer Menge M bezeichnen wir wie üblich mit $\mu(M)$.

Es ist bekannt, daß es Verfahren V gibt, für welche S_V nicht sternförmig oder sogar nicht zusammenhängend ist. TOLBA [6], VERMES [7,8,9,10], RUSSELL [5], LUH [2] konstruieren solche Verfahren, wobei an S_V bestimmte Forderungen gestellt werden (etwa S_V offen mit einfach zusammenhängenden Komponenten). ISRAPILOV [1] zeigt: Zu einer Menge M mit $1 \notin M$, $\{z : |z| < 1\} \subset M$ existiert ein permanentes Verfahren **V**, für welches $M \subset S_V \subset \overline{M}$ gilt.

Dieses Ergebnis ist noch in gewisser Hinsicht unbefriedigend, denn die Differenzmengen $S_V \setminus M$ und $\overline{M} \setminus S_V$ über die keine Aussage gemacht wird, können noch „sehr groß" sein, sie können etwa positives Maß haben. Außerdem erhebt sich die Frage, gegen welche Funktionen die Folge $\{\sigma_n(z)\}$ auf S_V konvergieren kann.

Wir wollen deshalb hier zeigen:

<u>SATZ: Gegeben seien endlich oder abzählbar viele meßbare, paarweise fremde Mengen</u>

$$M^{(o)} := \{z : |z| < 1\},\ M^{(1)},\ M^{(2)},\ \cdots .$$

<u>Für</u> $k=1,2,\cdots$ <u>sei auf</u> $\overline{M^{(k)}}$ <u>eine reguläre Funktion</u> $f^{(k)}$ <u>vorgeschrieben. Dann existiert eine untere Dreiecksmatrix</u> **V** $=$ $= (c_{n\nu})$ <u>mit folgenden Eigenschaften:</u>

(1) $$\sum_{\nu=o}^{n} c_{n\nu} = 1 ,$$

(2) $\{\sigma_n(z)\}$ <u>konvergiert in</u> $M^{(o)}$ <u>kompakt gegen</u> $\frac{1}{1-z}$,

(3) <u>zu</u> $k=1,2,\cdots$ <u>existieren Mengen</u> $B^{(k)}$ <u>mit</u> $\mu(B^{(k)} \Delta M^{(k)}) = o$, <u>auf welchen</u> $\{\sigma_n(z)\}$ <u>gegen</u> $f^{(k)}(z)$ <u>konvergiert,</u>

(4) <u>zu</u> $M^* := [\bigcup_{k \geq o} M^{(k)}]^c$ <u>existiert eine Menge</u> B^* <u>mit</u> $\mu(B^* \Delta M^*) = o$, <u>auf welcher</u> $\{\sigma_n(z)\}$ <u>divergiert.</u>

Wegen $(\bigcup_{k\geq 1} M^{(k)})\Delta(\bigcup_{k\geq 1} B^{(k)}) \subset \bigcup_{k\geq 1}(M^{(k)}\Delta B^{(k)})$ ist

$$\mu((\bigcup_{k\geq 1} M^{(k)})\Delta(\bigcup_{k\geq 1} B^{(k)})) = 0$$

und daher stimmt für die in unserem Satz angegebene Matrix V die Summationsmenge S_V mit $\bigcup_{k\geq 0} M^{(k)}$ bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß Null überein. Allerdings kann über die Struktur dieser Ausnahmemenge keine weitere Aussage gemacht werden.

2. HILFSMITTEL

Wir benötigen folgendes Ergebnis aus der Approximationstheorie im Komplexen:

LEMMA 1 (Approximationssatz von RUNGE): *Es seien $J_1, \cdots J_m$ beschränkte, einfach zusammenhängende Gebiete, die von JORDANkurven berandet sind. Ferner sei $\overline{J_i} \cap \overline{J_k} = \emptyset$ für $i \neq k$. Für $\nu=1,\cdots,m$ sei die Funktion φ_ν regulär auf $\overline{J_\nu}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein Polynom P mit*

$$\max_{\overline{J_\nu}} |P(z) - \varphi_\nu(z)| < \varepsilon \qquad (\nu=1,\cdots,m) .$$

Einen Beweis findet man bei MARKUSHEVICH [3], S. 88 ff.

Ferner benötigen wir ein Hilfsmittel über die Approximation einer Menge und ihres Komplementes durch einfach zusammenhängende, paarweise disjunkte Gebiete. Für eine Menge M und ein $\delta>0$ benutzen wir dabei folgende Abkürzung:

$$U_\delta(M) := \{z: |z-\zeta|<\delta, \ \zeta\in M\} .$$

LEMMA 2: *Gegeben seien n paarweise disjunkte, meßbare Mengen $M_1, M_2, \cdots, M_n$ mit endlichem Maß, gegeben seien ferner $\varepsilon>0$ und $\delta>0$. Dann existieren einfach zusammenhängende Gebiete*

$$P_{11}, P_{12}, \cdots, P_{1m_1},$$
$$P_{21}, P_{22}, \cdots, P_{2m_2},$$
$$\vdots$$
$$P_{n1}, P_{n2}, \cdots, P_{nm_n},$$

so daß für $k=1,2,\cdots,n$; $j_k=1,2,\cdots,m_k$ folgendes gilt:

(1) $\overline{P_{kj_k}}$ sind paarweise disjunkt,

(2) $\overline{P_{kj_k}} \subset U_\delta(M_k)$,

(3) für die Menge $G_k = \bigcup_{j_k=1}^{m_k} P_{kj_k}$ gilt $\mu(M_k \Delta G_k) < \varepsilon$.

BEWEIS: 1) Es sei $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$. Dann existieren für $k=1,\cdots,n$ offene Mengen $B_k \supset M_k$ mit $\mu(B_k \setminus M_k) < \varepsilon'$. Dabei kann angenommen werden, daß $B_k \subset U_\delta(M_k)$ gilt (andernfalls ersetze man B_k durch $B_k \cap U_\delta(M_k)$). Mit den Bezeichnungen

$$M = \bigcup_{j=1}^{n} M_j, \quad N_k = \bigcup_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} M_j, \quad B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j, \quad D_k = \bigcup_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} B_j$$

gilt $B_k \cup D_k = B$, $M_k \cup N_k = M$, $\mu(M_k) + \mu(N_k) = \mu(M)$ sowie

$$\mu(D_k \setminus N_k) \leqq \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} \mu(B_j \setminus M_j) \leqq (n-1)\varepsilon' ,$$

also haben wir

$$\mu(B_k \cap D_k) = \mu(B_k) + \mu(D_k) - \mu(B) \leqq$$
$$\leqq \mu(M_k) + \varepsilon' + \mu(N_k) + (n-1)\varepsilon' - \mu(M) = n\varepsilon' .$$

Wir setzen $C_k = B_k \setminus (B_k \cap D_k)$. Diese Mengen C_k sind offen, paarweise disjunkt und in $U_\delta(M_k)$ enthalten, außerdem gilt wegen $C_k \Delta M_k \subset (B_k \setminus M_k) \cup (B_k \cap D_k)$:

$$\mu(C_k \Delta M_k) \leqq \mu(B_k \setminus M_k) + \mu(B_k \cap D_k) \leqq (n+1)\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} .$$

2) Für ein $L'>o$ überdecken wir die komplexe Ebene durch offene Quadrate mit achsenparallelen Kanten der Länge L', die bis auf Ränder paarweise disjunkt sind. Für genügend kleines L' gibt es für jedes $k=1,\cdots,n$ geeignete Quadrate $P'_{k1},\cdots,P'_{km_k}$ mit $P'_{kj_k} \subset C_k$, so daß für $G'_k = \bigcup_{j_k=1}^{m_k} P'_{kj_k}$ gilt $\mu(C_k \setminus G'_k) < \varepsilon/4$.

Für ein $L>o$ seien P_{kj_k} die offenen Quadrate, die den gleichen Mittelpunkt wie P'_{kj_k} und ebenfalls achsenparallele Kanten der Länge L haben. Es gibt dann ein $L \in (o,L')$, so daß für $G_k = \bigcup_{j_k=1}^{m_k} P_{kj_k}$ gilt $\mu(C_k \setminus G_k) < \varepsilon/2$.

Die Quadrate P_{kj_k} erfüllen (1) und (2) und wegen

$$\mu(M_k \Delta G_k) \leqq \mu(M_k \Delta C_k) + \mu(C_k \setminus G_k) < \varepsilon$$

gilt auch (3).

3. BEWEIS DES SATZES

1) Es genügt, eine zeilenfinite Matrix mit den geforderten Eigenschaften zu konstruieren. Durch geeignete Wiederholung von Zeilen entsteht aus dieser eine untere Dreiecksmatrix mit denselben Eigenschaften.

2) Für eine natürliche Zahl n betrachten wir folgende Mengen:

$$O_n := \{z:\ 1 \leqq |z| < n,\ |z-1| > \frac{1}{2^{n+1}}\}\ ,$$

$$M_n^{(k)} := M^{(k)} \cap O_n \qquad (1 \leqq k \leqq n)\ ,$$

$$M_n^* := M^* \cap O_n\ ,$$

$$G_n^{(o)} := \{z:\ |z| < 1 - \frac{1}{2^n}\}\ ,$$

$$G_n^{(-1)} := \{z:\ |z-1| < \frac{1}{2^{n+2}}\}\ .$$

Wir wählen ein $\delta_n>o$ so, daß für $k=1,\cdots,n$ die Funktionen $f^{(k)}$ auf $U_{\delta_n}(M_n^{(k)})$ regulär sind. Nach Lemma 2 gibt es dann einfach zusammenhängende Gebiete

$$P_{n1}^{(k)},\ P_{n2}^{(k)},\ \cdots,\ P_{nm_n^{(k)}}^{(k)} \qquad (1\leqq k\leqq n)\ ,$$
$$P_{n1}^{*},\ P_{n2}^{*},\ \cdots,\ P_{nm_n^{*}}^{*}\ ,$$

deren abgeschlossene Hüllen paarweise fremd sind und auch mit $\overline{G_n^{(o)}}$ und $\overline{G_n^{(-1)}}$ keine gemeinsamen Punkte haben, so daß für die Mengen

$$G_n^{(k)} := \bigcup_{j=1}^{m_n^{(k)}} P_{nj}^{(k)} \quad (1\leqq k\leqq n)\ , \qquad G_n^{*} := \bigcup_{j=1}^{m_n^{*}} P_{nj}^{*}$$

folgendes gilt:

$$\overline{G_n^{(k)}} \subset U_{\delta_n}(M_n^{(k)}) \quad (1\leqq k\leqq n)\ ,$$

$$\mu(G_n^{(k)} \Delta M_n^{(k)}) < \frac{1}{2^n}\ , \qquad \mu(G_n^{*}\Delta M_n^{*}) < \frac{1}{2^n}\ .$$

3) Für $1\leqq k\leqq n$ und $z\in\overline{G_n^{(k)}}$ setzen wir zur Abkürzung

$$h_k(z) := \frac{1}{z}[1-(1-z)f^{(k)}(z)]$$

und bestimmen nach Lemma 1 ein Polynom $P_n(z)$, das folgende Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:

$$\max_{\overline{G_n^{(-1)}}} |P_n(z) - 1| < \frac{1}{2^n}\ , \qquad \max_{G_n^{*}} |P_n(z) - n| < \frac{1}{2^n}\ ,$$

$$\max_{\overline{G_n^{(o)}}} |P_n(z)| < \frac{1}{2^n}\ , \qquad \max_{\overline{G_n^{(k)}}} |P_n(z) - h_k(z)| < \frac{1}{2^n} \quad (1\leqq k\leqq n)$$

4) Wir definieren eine zeilenfinite Matrix $V = (c_{n\nu})$ durch

$$\tau_n(z) := \frac{P_n(z)}{P_n(1)} := \sum_{\nu=o}^{\nu_n} c_{n\nu} z^{\nu}.$$

Die Matrix V erfüllt offensichtlich $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu} = 1$, und wegen $P_n(1) \to 1$ konvergiert $\{\tau_n(z)\}$ in $|z| < 1$ kompakt gegen Null. Aus

$$\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu_n} c_{n\nu}\frac{1-z^{\nu+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}\tau_n(z)$$

folgt daher, daß $\{\sigma_n(z)\}$ in $|z| < 1$ kompakt gegen $\frac{1}{1-z}$ konvergiert.

5) a) Für ein $R > 1$ betrachten wir folgende Mengen:

$$\begin{aligned}
M^{(k)}(R) &:= M^{(k)} \cap \{z:\ 1\leqq|z|\leqq R\}\ , \\
G_n^{(k)}(R) &:= G_n^{(k)} \cap \{z:\ 1\leqq|z|\leqq R\}\ , \\
B_n^{(k)}(R) &:= \bigcap_{j\geqq n} G_j^{(k)}(R)\ , \\
B^{(k)}(R) &:= \lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(R)\ , \\
B^{(k)} &:= \lim_{R\to\infty} B^{(k)}(R)\ .
\end{aligned}$$

Es sei $z \in B^{(k)}$. Wegen $B^{(k)}(R) \subset B^{(k)}(R')$ für $R < R'$ ist dann $z \in B^{(k)}(R)$ für hinreichend großes R. Ferner existiert ein N mit $z \in B_N^{(k)}(R)$ und wegen $B_N^{(k)}(R) \subset B_{N+1}^{(k)}(R) \subset \cdots$ ist

$$z \in B_n^{(k)}(R) \subset G_n^{(k)}(R) \subset G_n^{(k)}$$

für alle $n>N+R$. Daraus folgt

$$\tau_n(z) = \frac{P_n(z)}{P_n(1)} \to h^{(k)}(z).$$

Die Folge $\{\tau_n(z)\}$ konvergiert daher in $B^{(k)}$ punktweise gegen $h^{(k)}(z)$, und es ergibt sich für $z\in B^{(k)}$:

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}\tau_n(z) \to \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}h^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)\ .$$

b) Wir zeigen, daß $\mu(M^{(k)}\Delta B^{(k)}) = 0$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jedes $R>1$ gilt $\mu(M^{(k)}(R)\Delta B^{(k)}(R)) = 0$. Aus

$$M^{(k)}(R)\Delta G_n^{(k)}(R) \subset \{M_n^{(k)}\Delta G_n^{(k)}\} \cup \{z: |z-1| < \frac{1}{2^{n+1}}\}$$

folgt

$$\mu(M^{(k)}(R)\Delta G_n^{(k)}(R)) \leqq \frac{1}{2^n} + \frac{\pi}{2^{2n+2}} < \frac{2}{2^n}$$

und hieraus

$$\mu(M^{(k)}(R)\Delta B_n^{(k)}(R)) = \mu(M^{(k)}(R)\Delta \bigcap_{j=n}^{\infty} G_j^{(k)}(R)) \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=n}^{\infty} \mu(M^{(k)}(R)\Delta G_j^{(k)}(R)) \leqq \frac{4}{2^n} .$$

Für $n\to\infty$ erhalten wir $\mu(M^{(k)}(R)\Delta B^{(k)}(R)) = o$.

6) In analoger Weise wird eine Menge B^* mit $\mu(M^*\Delta B^*) = o$ konstruiert, auf welcher $\{\sigma_n(z)\}$ divergiert.

<u>BEMERKUNG:</u> Die hier konstruierte Matrix $V = (c_{n\nu})$ wird i.a. nicht permanent sein. Außer $\sum_{\nu=o}^{n} c_{n\nu} = 1$ erfüllt sie nach [2] dortiger Satz 2.2 noch die Bedingungen:

$$\lim_{n\to\infty} c_{n\nu} = o \qquad \nu=o,1,\cdots ;$$

zu jedem $r\in(o,1)$ gibt es eine Konstante $C(r)$ mit $|c_{n\nu}|r^{\nu} \leqq C(r) \quad (\nu=o,1,\cdots;\ n=o,1,\cdots)$.

Für die limitierungstheoretische Bedeutung solcher Matrizen siehe [2], dortiger Satz 2.3.

LITERATUR

[1] ISRAPILOV, R.B.: Sets of summability of power series by linear methods. (Russian). Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. 24 (1969), no. 3, 22-29.

[2] LUH, W.: Über die Summierbarkeit der geometrischen Reihe. Erscheint in Mitt. Math. Sem. Gießen.

[3] MARKUSHEVICH, A.I.: Theory of functions of a complex variable. Vol. III. Revised English edition, translated by R.A. Silverman. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967.

[4] PEYERIMHOFF, A.: Lectures on summability. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag 197o.

[5] RUSSELL, D.C.: Summability of power series on continuous arcs outside the circle of convergence. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 45 (1959), 1oo6-1o3o.

[6] TOLBA, S.E.: On the summability of Taylor series at isolated points outside the circle of convergence. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55 (1952), 38o-387.

[7] VERMES, P.: Conservative series to series transformation matrices. Acta Sci. Math. (Szeged), 14 (1951), 23-28.

[8] VERMES, P.: Convolution of summability methods. J. d'Analyse math. (Jerusalem), 2 (1952), 16o-177.

[9] VERMES, P.: Summability of power series at unbounded sets of isolated points. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 44 (1958), 83o-838.

[1o] VERMES, P.: Summability of power series in simply or multiply connected domains. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5), 44 (1958), 188-198.

Wolfgang Luh
Mathematisches Institut
der Universität

D 63 Gießen
Arndtstraße 2

Rolf Trautner
Universität Ulm
Abteilung für Mathematik I

D 79 Ulm
Oberer Eselsberg

(Eingegangen am 4. November 1974)