manuscripta math. 5, 241 - 249 (1971)

ÜBER DIE COHOMOLOGIE VON BSO(2k+1) UND $V_{n,2}$

Rolf Kultze

If h^* is a multiplicative cohomology theory on the category of CW-pairs, then it is shown that $h^*(BSO(2k+1))$ is under certain conditions isomorphic to the ring of formal power series over $h^*(*)$ in universal Pontrjagin-classes $p_1,\dots,p_k$. In the second part of the paper one finds a calculation of the cohomology of the Stiefel manifolds $V_{n,2}=SO(n)/SO(n-2)$.

1. Einleitung

h^* bezeichne im folgenden eine additive, multiplikative Cohomologietheorie auf der Kategorie der Paare von CW-Komplexen. Dold hat in [6] ein elementares Verfahren entwickelt, um die Cohomologieringe $h^*(BO(n))$ bzw. $h^*(BU(n))$ zu berechnen, falls h^* gewissen Bedingungen genügt. Als wesentliches Hilfsmittel wird der Satz von Leray-Hirsch über die Cohomologie von Faserungen herangezogen. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit benutzen wir die Doldsche Methode, um die Struktur von $h^*(BSO(2k+1))$ zu bestimmen. Im zweiten Teil wird gezeigt, wie man unter Benutzung des Satzes von Leray-Hirsch und der Gysinschen Sequenz in elementarer Weise die Cohomologiegruppen mod p der reellen Stiefel-Mannigfaltigkeiten $V_{n,2} = SO(n)/SO(n-2)$ berechnen kann.

2. Die Cohomologie von Q_n

h^* sei, wenn nichts anderes gesagt wird, eine additive, multiplikative Cohomologietheorie mit $1/2 \in h^0(*)$, die auf der Kategorie der Paare von CW-Komplexen definiert ist. η_n und η_∞ seien die kanonischen Geradenbündel über $P_n(C)$ bzw. $P_\infty(C)$.

Wir setzen weiter voraus, daß η_∞ h^*-orientierbar ist (zur Definition der h^*-Orientierbarkeit vgl. [6], S. 37 oder [7], S. 41). Dann besitzt jedes n-dimensionale komplexe Vektorraumbündel ξ über B (B ein CW-Komplex) eine Eulerklasse $e(\xi) \in h^{2n}(B)$ ([6], S. 52). Insbesondere sei $u_\infty = e(\eta_\infty) \in h^2(P_\infty(C))$.

<u>Bemerkung.</u> Im Augenblick verzichten wir auf die Annahme $1/2 \in h^o(*)$. Zu h^* gehört eine mod p Cohomologietheorie $h^*(\ ;Z_p)$ (vgl. [1], [8]), wobei wir voraussetzen, daß p zu 2 und 3 prim ist. Offensichtlich gilt $1/2 \in h^o(*;Z_p)$. Die Multiplikation von h^* induziert eine Multiplikation von $h^*(\ ;Z_p)$, so daß $h^*(\ ;Z_p)$ ebenfalls zu einer additiven, multiplikativen Cohomologietheorie wird.

$$\rho_p : h^*(X,A) \longrightarrow h^*(X,A;Z_p)$$

bezeichne die Reduktion mod p. Weiter sei $\xi = (E,\pi,B)$ ein n-dimensionales, reelles, h^*-orientiertes Vektorraumbündel über dem zusammenhängenden CW-Komplex B mit der h^*-Orientierung $U \in h^n(E,E^o)$. Wie man leicht sieht, ist $\rho_p(U) \in h^n(E,E^o;Z_p)$ eine Orientierung von ξ bezüglich $h^*(\ ;Z_p)$.

Wir setzen nun wieder voraus, daß $1/2 \in h^o(*)$. Der Bündelraum E_{η_n} von η_n entsteht aus $S^{2n+1} \times C$ durch die Identifikation $(z,\mu) = (\lambda z, \bar{\lambda}\mu)$ ($|\lambda| = 1$). $\langle z,\mu \rangle$ bezeichne die Klasse von (z,μ). Definiert man

$$f : E_{\eta_n} \longrightarrow E_{\eta_n}$$

durch $f\langle z,\mu \rangle = \langle \bar{z},\bar{\mu} \rangle$, so erhält man eine Bündelabbildung $f : r\eta_n \longrightarrow r\eta_n$ ($r\eta_n$ das η_n zugrunde liegende reelle Bündel), die die Konjugation $\sigma : P_n(C) \longrightarrow P_n(C)$ induziert.
$U \in h^2(E_{\eta_n}, E^o_{\eta_n})$ sei eine Thom-Klasse von η_n. Man sieht sofort, daß dann auch

$$\hat{U} = \frac{1}{2}\,(U - f^*(U))$$

eine Thom-Klasse von η_n ist mit der Eigenschaft $f^*(\hat{U}) = -\hat{U}$. Für die durch $\hat{U}$ definierte Eulerklasse $e(\eta_n)$ gilt daher $\sigma^* e(\eta_n) = -\, e(\eta_n)$.

In Zukunft sei die Thom-Klasse von η_∞ stets so gewählt, daß $\sigma^*(u_\infty) = -u_\infty$. Diese Voraussetzung bedeutet nach den obigen Ausführungen keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Q_n bezeichne die komplexe Quadrik

$$Q_n = SO(n+2)/(SO(2)\times SO(n)). \qquad (n\geq 1)$$

Q_n kann als Grassmann-Mannigfaltigkeit der 2-dimensionalen, orientierten Teilräume des R^{n+2} betrachtet werden, also hat man $Q_n \subset BSO(2) = BU(1)$. Ist $\tilde{\zeta}^2$ das kanonische Vektorraumbündel über $BSO(2)$, so ist die Einschränkung $\lambda_n = \tilde{\zeta}^2|Q_n$ h^*-orientiert; w_n bezeichne dann die Eulerklasse $w_n=e(\lambda_n)\in h^2(Q_n)$. Wir interessieren uns nun für diejenigen Cohomologietheorien, die der folgenden Bedingung genügen.

BEDINGUNG (A). Für ungerades $n\geq 1$ ist $h^*(Q_n)$ freier $h^*(*)$-Modul mit der Basis $1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^n$, und es gilt $w_n^{n+1} = 0$.

Beispiel 1. $h^* = H^*(\ ;Z_p)$ (p ungerade) genügt der Bedingung (A) ([2],S.523;[3]S.186).

Beispiel 2. $U^*(X)$ bezeichne den komplexen Cobordismenring von X (vgl.etwa [4],[5]). Da η_∞ bezüglich $U^*(\ )$ orientierbar ist, ist η_∞ nach der obigen Bemerkung auch $U^*(\ ;Z_p)$-orientierbar. Damit erfüllt die mod p Theorie $U^*(\ ;Z_p)$ die am Anfang dieses Abschnittes gemachten Voraussetzungen. Mit Hilfe von spektralen Sequenzen kann man zeigen, daß $h^* = U^*(\ ;Z_p)$ ebenfalls der Bedingung (A) genügt.

Beispiel 3. Durch Benutzung von Beispiel 2 und der Conner-Floyd -Transformation $U^*(\ ;Z_p)\longrightarrow K^*(\ ;Z_p)$ erkennt man leicht, daß $K^*(\ ;Z_p)$ die Bedingung (A) erfüllt.

3. Die Cohomologie von BSO(2k+1)

Zur Berechnung von $h^*(BSO(2k+1))$ führen wir nun die homogenen Räume

$$D_k = SO(2k+1)/[SO(2)]^k \qquad (k\geq 1)$$

ein. D_k kann man auffassen als den Raum der k-Tupel $(l_1,\dots,l_k)$ von zueinander orthogonalen 2-dimensionalen, orientierten Teilräumen des R^{2k+1}. Weiter sei $\alpha_{i,k}$ $(1 \leq i \leq k)$ das reell 2-dimensionale Vektorraumbündel über D_k mit dem Bündelraum

$$E_{\alpha_{i,k}} = \text{Menge der Paare } ((l_1,\dots,l_k),\ \text{Vektor in } l_i).$$

$\alpha_{i,k}$ ist offensichtlich h^*-orientiert. Bezeichnet $x_{i,k}$ $(1 \leq i \leq k)$ die Eulerklasse $x_{i,k} = e(\alpha_{i,k}) \in h^2(D_k)$, so gilt

SATZ 1. *Genügt* h^* *der Bedingung* (A), *so ist* $h^*(D_k)$ *freier* $h^*(*)$-*Modul mit den Basiselementen*

$$x_{1,k}^{\nu_1} x_{2,k}^{\nu_2} \cdots x_{k,k}^{\nu_k} \quad . \quad (0 \leq \nu_i \leq 2(k-i)+1)$$

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach k geführt. Man beachte, daß $D_1 = Q_1$ und $x_{1,1} = w_1$.

ξ sei ein n-dimensionales, komplexes Vektorraumbündel über dem CW-Komplex B und $c_i(\xi) \in h^{2i}(B)$ $(1 \leq i \leq n)$ die in [6], S.51 eingeführte i-te Chernsche Klasse. Wegen $\sigma^*(u_\infty) = -u_\infty$ hat man $c_i(\bar{\xi}) = (-1)^i c_i(\xi)$.

DEFINITION 2. *Ist* ξ *ein reelles Vektorraumbündel über dem CW-Komplex* B, *so heißt*

$$p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(c\xi) \in h^{4i}(B)$$

i-te Pontrjaginsche Klasse von ξ.

Wie man sofort bestätigt, gilt für jedes n-dimensionale, komplexe Vektorraumbündel ξ $p_n(r\xi) = e(\xi)^2$.

Bezeichnet

$$q_i : [BSO(2)]^k \longrightarrow BSO(2) \qquad (1 \leq i \leq k)$$

die Projektion auf den i-ten Faktor, so sei $\omega_i = q_i^*(\tilde{\zeta}^2)$ und $v_i = e(\omega_i) \in h^2([BSO(2)]^k)$. Nach [6], S.49 gilt

$$h^*([BSO(2)]^k) \cong h^*(*)[[v_1,\dots,v_k]].$$

Die Inklusion $g : [SO(2)]^k \longrightarrow SO(2k+1)$ induziert einen Homomorphismus

$$(Bg)^* : h^*(BSO(2k+1)) \longrightarrow h^*([BSO(2)]^k).$$

<u>LEMMA 3. Bild</u> $(Bg)^*$ <u>ist enthalten im Ring der symmetrischen Potenzreihen in</u> $v_1^2,\ldots,v_k^2$.

<u>Beweis.</u> Der Beweis wird wie üblich mit Hilfe der Weylschen Gruppe $W(SO(2k+1))$ von $SO(2k+1)$ geführt; man beachte dabei, daß $\sigma^*(u_\infty) = -u_\infty$!

$$Bg : [BSO(2)]^k \longrightarrow BSO(2k+1)$$

ist ein Faserbündel mit der Faser D_k. Für $\iota : D_k \longrightarrow [BSO(2)]^k$ gilt dann $\iota^*(\omega_i)=\alpha_{i,k}$, also hat man $x_{i,k}=\iota^*(v_i)$ $(1\leq i\leq k)$. Wir betrachten nun die Elemente $v_1^{\nu_1}\ldots v_k^{\nu_k} \in h^*([BSO(2)]^k)$. Nach Satz 1 ist $h^*(D_k)$ freier $h^*(*)$-Modul mit den Basiselementen $x_{1,k}^{\nu_1}\ldots x_{k,k}^{\nu_k}=\iota^*(v_1^{\nu_1}\ldots v_k^{\nu_k})$ $(0\leq\nu_i\leq 2(k-i)+1)$. Daher bilden die Elemente $v_1^{\nu_1}\ldots v_k^{\nu_k}$ nach dem Satz von Leray-Hirsch eine Basis des $h^*(BSO(2k+1))$-Moduls $h^*([BSO(2)]^k)$; insbesondere ist $(Bg)^*$ injektiv. Bezeichnet $\mathcal{R}\subset h^*(*)[[v_1,\ldots,v_k]]$ den Ring der symmetrischen Potenzreihen in $v_1^2,\ldots,v_k^2$, so gilt

<u>LEMMA 4.</u> $h^*(*)[[v_1,\ldots,v_k]]$ <u>ist freier</u> $\mathcal{R}$<u>-Modul mit der Basis</u> $v_1^{\nu_1}\ldots v_k^{\nu_k}$ $(0\leq\nu_i\leq 2(k-i)+1)$.

$\tilde{\zeta}^{2k+1}$ bezeichne das kanonische Vektorraumbündel über $BSO(2k+1)$, und es sei $p_i = p_i(\tilde{\zeta}^{2k+1})$ $(1\leq i\leq k)$. Aus den obigen Überlegungen und den Lemmata 3 und 4 folgt dann

<u>SATZ 5.</u> h^* <u>sei eine additive, multiplikative Cohomologietheorie mit</u> $1/2\in h^0(*)$. <u>Genügt</u> h^* <u>der Bedingung</u> (A), <u>so gilt</u>

$$h^*(BSO(2k+1)) \cong h^*(*)[[p_1,\ldots,p_k]].$$

Unter Benutzung von Beispiel 2 erhält man hieraus

COROLLAR 6. Ist p prim zu 2 und 3, so hat der komplexe Cobordismenring $U^*(BSO(2k+1);Z_p)$ die Gestalt

$$U^*(BSO(2k+1);Z_p) \cong U^*(*;Z_p)[[p_1,\ldots,p_k]].$$

Versucht man, mit der oben benutzten Methode die Struktur von $h^*(BSO(2k))$ zu bestimmen, so ergeben sich algebraische Schwierigkeiten. Daher muß die Frage nach der Struktur von $h^*(BSO(2k))$ an dieser Stelle offen bleiben.

4. Die Cohomologie von $V_{n,2}$ (n gerade)

h^* sei wieder eine additive, multiplikative Cohomologietheorie mit $1/2 \in h^o(*)$. $V_{n,2}$ bezeichne die reelle Stiefelmannigfaltigkeit $V_{n,2} = SO(n)/SO(n-2)$. Wir beweisen im folgenden, daß für gerades $n \geq 4$ $h^*(V_{n,2})$ eine äußere Algebra mit zwei Erzeugenden ist.

Nach [4], S. 514 hat man natürliche Transformationen

$$T^* : U^*(\ ) \longrightarrow h^*(\ ) \quad , \quad T_* : U_*(\ ) \longrightarrow h_*(\ ).$$

$\varepsilon_n \in \tilde{h}^n(S^n)$ bezeichne das Bild von $1 \in \tilde{h}^o(S^o)$ bei dem Isomorphismus $\tilde{h}^o(S^o) \cong \tilde{h}^n(S^n)$. Ist τ_{S^n} das Tangentialbündel von S^n, so seien $e(\tau_{S^n}) \in \tilde{h}^n(S^n)$, $e_U(\tau_{S^n}) \in \tilde{U}^n(S^n)$ und $e_H(\tau_{S^n}) \in \tilde{H}^n(S^n)$ die zugehörigen Eulerklassen.

LEMMA 7. Für gerades n gilt $e(\tau_{S^n}) = 2\varepsilon_n$.

Beweis. Bezeichnet K(Z) das Eilenberg-MacLane-Spektrum $K(Z) = \{K(Z,1), K(Z,2),\ldots\}$, so gibt es eine Spektrenabbildung $S : MU \longrightarrow K(Z)$. Ist $z \in U_n(S^n)$ die Fundamentalklasse von S^n in der Bordismentheorie, so sind auch $S_*(z) \in H_n(S^n)$ und $T_*(z) \in h_n(S^n)$ Fundamentalklassen von S^n im Whiteheadschen Sinn ([9], S.3o und S.39a). Wir betrachten zunächst das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_n(S^n) \otimes U^n(S^n) & \xrightarrow{\langle , \rangle} & U_o(*) \\ \downarrow S_* \otimes S^* & & \downarrow S_* \\ H_n(S^n) \otimes H^n(S^n) & \xrightarrow[\langle , \rangle]{} & H_o(*) \end{array}$$

wobei $\langle , \rangle$ jeweils den Kronecker-Index bezeichne (vgl. [10], S.261). Wegen $S^* e_U(\tau_S n) = e_H(\tau_S n)$ erhält man hieraus zunächst $e_U(\tau_S n) = 2\varepsilon_n$. Die Behauptung ergibt sich schließlich aus einem entsprechenden Diagramm für T^* und T_*.

Wir betrachten nun die Faserung $\pi : V_{n,2} \longrightarrow S^{n-1}$ mit der Faser S^{n-2}. $i : S^{n-2} \longrightarrow V_{n,2}$ sei gegeben durch $i(v) = (v, e_n)$ (e_n der n-te Einheitsvektor des R^n). Weiter hat man die kanonische Projektion $q : V_{n,2} \longrightarrow Q_{n-2}$. Mit λ_{n-2} ist auch das induzierte Bündel $\omega = q^*(\lambda_{n-2})$ h^*-orientiert. β sei das Vektorraumbündel über $V_{n,2}$ mit dem Bündelraum

E_β = Menge der Paare $((v_1, v_2)$, Vektor $\perp$ zu dem durch (v_1, v_2) bestimmten Teilraum des $R^n)$.

Wegen $\beta \oplus \omega = o^n$ ist auch β nach [6], S.38 h^*-orientiert. Daher ist die Eulerklasse $e(\beta) \in h^{n-2}(V_{n,2})$ wohldefiniert; außerdem gilt $\tau_S n-2 = i^*(\beta)$. Wir beweisen nun

SATZ 8. *h^* sei eine additive, multiplikative Cohomologietheorie mit $1/2 \in h^o(*)$. Dann ist $h^*(V_{n,2})$ für gerades $n \geq 4$ eine äußere Algebra mit den Erzeugenden $e(\beta)$ und $\pi^*(\varepsilon_{n-1})$.*

Beweis. Wegen

$$\varepsilon_{n-2} = \tfrac{1}{2} e(\tau_S n-2) = \tfrac{1}{2}\, i^* e(\beta)$$

bilden die Elemente 1, $i^* e(\beta)$ eine Basis des $h^*(*)$-Moduls $h^*(S^{n-2})$. Nach dem Satz von Leray-Hirsch, angewandt auf die Faserung $S^{n-2} \xrightarrow{i} V_{n,2} \xrightarrow{\pi} S^{n-1}$, bilden daher 1 und $e(\beta)$ eine Basis des $h^*(S^{n-1})$-Moduls $h^*(V_{n,2})$, also ist $1, e(\beta), \pi^*(\varepsilon_{n-1})$, $\pi^*(\varepsilon_{n-1}) e(\beta)$ eine Basis von $h^*(V_{n,2})$, aufgefaßt als $h^*(*)$-Modul. Ist h^* speziell die komplexe Cobordismentheorie, so gilt außerdem

$$e(\beta)^2 = 0 \quad , \quad \pi^*(\varepsilon_{n-1})^2 = 0 \ ,$$

da $U^q(*) = 0$ für $q>0$ bzw. q ungerade. Diese Relationen übertragen sich aber auf den allgemeinen Fall, wenn man die Transformation $T^* : U^*(V_{n,2}) \longrightarrow h^*(V_{n,2})$ benutzt.

Beispiele. Satz 8 gilt insbesondere für $H^*(V_{n,2};Z_p)$, $U^*(V_{n,2};Z_p)$ und $K^*(V_{n,2};Z_p)$.

5. Die Cohomologie von $V_{n,2}$ (n ungerade)

SATZ 9. *h^* sei eine additive, multiplikative Cohomologietheorie mit $1/2 \in h^0(*)$. Dann ist $h^*(V_{n,2})$ für ungerades n eine äußere Algebra mit einem erzeugenden Element $x \in h^{2n-3}(V_{n,2})$.*

Beweis. Die Gysinsche Sequenz von $\tau_{S^{n-1}}$ hat die Gestalt

$$\cdots \longrightarrow h^{*-n+1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\cup\chi} h^*(S^{n-1}) \longrightarrow h^*(E^0_{\tau_{S^{n-1}}}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow h^{*-n+2}(S^{n-1}) \xrightarrow{\cup\chi} \cdots ,$$

wobei wir $\chi = e(\tau_{S^{n-1}})$ gesetzt haben. Da $E^0_{\tau_{S^{n-1}}}$ zu $V_{n,2}$ homotopieäquivalent ist, erhalten wir hieraus die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow h^{*-n+1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\cup\chi} h^*(S^{n-1}) \xrightarrow{\pi^*} h^*(V_{n,2}) \xrightarrow{\omega}$$
$$\xrightarrow{\omega} h^{*-n+2}(S^{n-1}) \xrightarrow{\cup\chi} \cdots .$$

Aus Lemma 7 folgt, daß Kern $\pi^* = \tilde{h}^*(S^{n-1})$. Daher stimmt Bild π^* = Kernω mit dem direkten Summanden $h^*(*)$ von $h^*(V_{n,2})$ überein. Andererseits wird Bildω von ε_{n-1} erzeugt. Bezeichnet $\bar{\omega}$ die Einschränkung $\bar{\omega} = \omega|\tilde{h}^*(V_{n,2})$, so ist $h^*(V_{n,2})$ freier $h^*(*)$-Modul mit den Basiselementen 1 und $x = \bar{\omega}^{-1}(\varepsilon_{n-1}) \in h^{2n-3}(V_{n,2})$. Wegen der Antikommutativität des cup-Produkts gilt $2x^2 = 0$; da $1/2 \in h^0(*)$, folgt hieraus schließlich $x^2 = 0$.

Beispiele. Satz 9 gilt insbesondere für $H^*(V_{n,2};Z_p)$, $U^*(V_{n,2};Z_p)$ und $K^*(V_{n,2};Z_p)$.

Literatur

[1] ARAKI, S. and H.TODA: Multiplicative structures in mod p cohomology theories I,II. Osaka J.Math.2, 71-115 (1965); 3, 81-12o (1966).

[2] BOREL,A. and F.HIRZEBRUCH: Characteristic classes and homogeneous spaces I.Am.J.Math.8o, 458-538 (1958).

[3] BRIESKORN,E.: Ein Satz über die komplexen Quadriken. Math.Ann. 155, 184-193 (1964).

[4] CONNELL,E.H.: Characteristic classes. Ill.J.Math.14, 496-521 (197o).

[5] CONNER,P.E. and E.E.FLOYD: The relation of cobordism to K-theories. Lect.Notes in Math.28. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1966).

[6] DOLD,A.: On general cohomology.Mim.notes Aarhus (1968).

[7] DYER,E.: Cohomology theories. New York - Amsterdam: Benjamin (1969).

[8] MAUNDER,C.R.F.: Mod p cohomology theories and the Bockstein spectral sequence. Proc.Camb.Phil.Soc. 63, 23-43 (1967).

[9] STONG,R.E.: Notes on cobordism theory. Princeton: University Press 1968.

[1o] WHITEHEAD,G.W.: Generalized homology theories. Trans. A.M.S. 1o2, 227-283 (1962).

Rolf Kultze

Mathematisches Institut

der Universität

75 K a r l s r u h e

Englerstraße

(Eingegangen am 21. Mai 1971)