Werk

Titel: Über den Typenkonvergenzsatz auf zusammenhängenden Lie Gruppen.

Autor: Hazold, W.

Jahr: 1990

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0110|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mh. Math. 110, 261—278 (1990)

Monatshefte für
Mathematik
© by Springer-Verlag 1990

Über den Typenkonvergenzsatz auf zusammenhängenden Lie Gruppen

Von

W. Hazod, Dortmund

(Eingegangen am 2. April 1990)

Herrn Prof. Dr. L. Schmetterer zum 70. Geburtstag gewidmet

Abstract. On the Convergence of Types Theorem on Connected Lie Groups. The Convergence of Types Theorem on $\mathbb{R}^d$ is wellknown as an important tool for investigations on the limit behaviour of normalized sums or r.v. It is natural to look for a generalization for group-valued r.v. While for simply connected nilpotent Lie groups the Theorem is valid in general the existence of non-trivial compact subgroups causes problems. For compact extensions of nilpotent groups we prove restricted versions of the Convergence of Types Theorem.

0. Einleitung

Der Typenkonvergenzsatz bzw. das Kompaktheitslemma ist eines der fundamentalen Hilfsmittel bei der Untersuchung von Grenzverteilungen normierter Zufallsvariabler. Für $G = \mathbb{R}$ läßt sich der Satz folgendermaßen formulieren:

Sei $\{\tau_n: x \mapsto a_n x + b_n\}_{n \geq 0}$ eine Folge affiner Transformationen. Seien μ_n, μ, $\nu \in M^1(\mathbb{R})$. Es gelte (unter Konvergenz wird stets schwache Konvergenz verstanden): $\mu_n \to \mu$, $\tau_n(\mu_n) \to \nu$. Weiter sei vorausgesetzt, daß μ und ν nicht entartet sind. Dann ist $\{\tau_n\}$ relativ kompakt. (S. z.B. [10], [6] II § 10 Th. 1. Ein einfacher Beweis wurde in [13] angegeben.)

Eine Verallgemeinerung auf endlich dimensionale Vektorräume wurde in [5] erstmals bewiesen, unabhängig davon wurden in der Folge mehrfach neue Beweise veröffentlicht ([2], [12], [18], [19], [20]), wobei vor allem die Arbeit von M. Sharpe [18] hervorzuheben ist, da dort zugleich die Anwendungen des Satzes im Zusammenhang mit Operator-Stabilität aufgezeigt wurden. Diese Arbeit hat eine Reihe weiterer Untersuchungen angeregt.

Einerseits wurden Vektorräume nicht notwendigerweise endlicher Dimension betrachtet (vgl. [15] und die dort zitierte Literatur), auf der

anderen Seite wurde versucht, den Satz auf andere Klassen lokalkompakter Gruppen zu übertragen. Als erste Beispiele (im Zusammenhang mit der Untersuchung stabiler Maße) wurden

a) die Bewegungsgruppen $\mathbb{R}^n \circledS O(n)$ ([1]),
b) die Heisenberggruppen $\mathbb{H}_n$ ([3]),
c) die Diamantgruppen $\mathbb{H}_n \circledS K_n$ ([4])

betrachtet.

Die Heisenberggruppen sind die einfachsten Beispiele nilpotenter einfach zusammenhängender Lie Gruppen nach den Vektorräumen. In [7] (vgl. auch die Anwendungen in [16, 17]) wurde allgemein die Klasse der einfachzusammenhängenden nilpotenten Lie Gruppen untersucht. Die wichtigsten Ergebnisse aus [7] sind nachfolgend in Kapitel 1 zusammengefaßt.

Will man die Beispiele $\mathbb{H}_n/\mathbb{Z}$ (wobei $\mathbb{Z}$ eine diskrete Gruppe im Zentrum $Z(\mathbb{H}_n)$ ist) oder die oben genannten Beispiele a) und c) studieren, so stellt sich zunächst das Problem, eine Version der Typenkonvergenzsatzes auf kompakten Gruppen zu finden. Dieses Problem wird in Kapitel 2 studiert. Für kompakte Lie Gruppen entscheidet die Größe des Zentrums $Z(G)_0$ über die Gültigkeit des Typenkonvergenzsatzes: Der Satz gilt nur, falls $\dim(Z(G)) \leqslant 1$. In Kapitel 3 betrachten wir zusammenhängende nilpotente Gruppen mit nichttrivialen kompakten Untergruppen K. Der Typenkonvergenzsatz ist falsch, falls G/K und K nicht trivial sind. In Kapitel 4 betrachten wir halbdirekte Erweiterungen $G = N \circledS_\sigma K$ (N nilpotent, einfach zusammenhängend, K kompakt, $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathrm{Aut}(N))$. Wenn K „hinreichend schön" ist (z.B. halbeinfach oder ein Torus T^1), wie in den Beispielen a) und c), läßt sich eine Version des Typenkonvergenzsatzes beweisen.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen: G sei stets eine zusammenhängende Lie Gruppe, K eine kompakte, zusammenhängende Untergruppe. $M^1(G)$ bezeichnet die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße. $\mathrm{Tr}(\mu)$ bezeichnet den Träger eines Maßes. ω_K bezeichnet das Haar Maß auf K. $Z(G)$ bezeichnet das Zentrum, $[G, G]$ die Kommutatorgruppe. Mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$, ... werden die Lie Algebren bezeichnet. Mit $\mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ resp. $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ werden die Automorphismen von G, die Lie-Algebra-resp. die Vektorraumautomorphismen von $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Mit $\mathscr{V}$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}$] werden die vollen [resp. S-vollen] Maße bezeichnet. $\mathscr{I}(\mu)$ bezeichnet die Invarianzgruppe. Es werden Grundlagen aus der Theo-

rie (zusammenhängender) Lie Gruppen als bekannt vorausgesetzt, vgl. etwa [11].

1. Vektorräume und nilpotente einfachzusammenhängende Lie Gruppen

Ausgehend von der Definition von M. SHARPE [18] wurde in [7] folgende Definition eingeführt: Sei G eine einfach zusammenhängende nilpotente Lie Gruppe und sei $\mu \in M^1(G)$. Dann heißt μ voll, falls der Träger $\mathrm{Tr}(\mu)$ auf keiner abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppe N konzentriert ist. Analog heißt μ S-voll, falls $\mathrm{Tr}(\mu)$ auf keiner Nebenklasse von N konzentriert ist, d.h. falls $\varepsilon_x * \mu$ voll ist für alle $x \in G$. (Endlichdimensionale) Vektorräume sind die abelschen einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie Gruppen. Die obige Definition umfaßt daher die Sharpesche.

Im Spezialfall $G = \mathbb{R}$ erhält man:

1.1. μ ist voll auf $\mathbb{R} \Leftrightarrow \mu \neq \varepsilon_0$,
μ ist S-voll auf $\mathbb{R} \Leftrightarrow \mu \neq \varepsilon_x$, $x \in \mathbb{R}$.

Es wurde in [7] gezeigt:

1.2. Sei G eine einfach zusammenhängende Lie Gruppe. Sie $\mu \in M^1(G)$. Dann sind äquivalent:

(i) μ ist voll auf G

(ii) Für alle stetigen surjektiven Homomorphismen π: $G \to \mathbb{R}$ gilt: $\pi(\mu)$ ist voll auf $\mathbb{R}$

(iii) Für alle stetigen surjektiven Homomorphismen π: $G \to N$, N abelsch, nilpotent, einfach zusammenhängend, also $N \cong \mathbb{R}^k$, ist $\pi(\mu)$ voll auf N

(iv) Für die Quotientenabbildung π: $G \to G/[G, G]$ ist $\pi(\mu)$ voll.

(v) Die Invarianzgruppe $\mathscr{I}(\mu) := \{\tau \in \mathrm{Aut}(G)\colon \tau(\mu) = \mu\}$ ist kompakt.

Analoge Aussagen gelten für S-Vollheit.

1.3. Mit $\mathscr{V}$ resp. $\mathscr{SV}$ werden die vollen resp. S-vollen Maße auf G bezeichnet.

1.4. Proposition. *Sei $\mu \in M^1(G)$. Dann sind äquivalent:*

a) $\mu \in \mathscr{V}$

b) *Für alle $\nu \in M^1(G)$ mit $\mathrm{Tr}(\nu) \supseteq \mathrm{Tr}(\mu)$ gilt: $\mathscr{I}(\mu)$ ist kompakt.*

Beweis: (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 1.2 (v) mit $\nu = \mu$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Sei $\mu \in \mathscr{V}$ und $\mathrm{Tr}(\nu) \supseteq \mathrm{Tr}(\nu)$. Dann ist nach 1.2 (ii) für jeden stetigen Homomorphism π: $G \to \mathbb{R}$ das Maß $\pi(\mu) \neq \varepsilon_0$, somit auch $\pi(\nu) \neq \varepsilon_0$. Also, wiederum wegen 1.2 (ii) $\nu \in \mathscr{V}$.

Eine völlig analoge Charakterisierung läßt sich für S-volle Maße formulieren.

1.5. Das Anliegen in [7] war der Beweis der Typenkonvergenzsatzes: Seien $\{\mu_n\}$, μ, $\nu \in M^1(G)$, $\{\tau_n\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$, μ, $\nu \in \mathscr{V}$. Es gelte $\mu_n \to \mu$, $\tau_n(\mu_n) \to \nu \Rightarrow \{\tau_n\}$ ist relativ kompakt in $\mathrm{Aut}(G)$.

Das Ziel unserer Arbeit ist die Untersuchung des Typenkonvergenzsatzes für kompakte Erweiterungen nilpotenter einfach-zusammenhängender Lie Gruppen. Daher studieren wir zunächst in 2. den Fall kompakter Gruppen.

2. Der Fall kompakter Lie Gruppen G

Das wichtigste Problem jenseits des Falles 1 ist zunächst das Auffinden einer geeigneten Definition voller resp. S-voller Maße auf einer Klasse $\mathscr{G}$ lokalkompakter Gruppen. Aus der Diskussion in Kapitel 1 geht hervor, daß eine Familie von Maßen $\mathscr{V}$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}$] $\subseteq M^1(G)$, die die vollen [resp. S-vollen] Maße auf G darstellen soll, folgende Eigenschaften besitzen muß:

(i) $\mu \in \mathscr{V}$ [$\mathscr{S}\mathscr{V}$], $\nu \in M^1(G)$ mit $\mathrm{Tr}(\nu) \supseteq \mu \Rightarrow \nu \in \mathscr{V}$ [$\mathscr{S}\mathscr{V}$].

(ii) $\mu \in \mathscr{S}\mathscr{V} \Leftrightarrow \varepsilon_x * \mu \in \mathscr{V}$ $\forall x \in G$.

(iii) $\mu \in \mathscr{V} \Rightarrow$ Die Invarianzgruppe $\mathscr{I}(\mu) := \{\tau \in \mathrm{Aut}(G)\colon \tau(\mu) = \mu\}$ ist kompakt.

(iv) $\mu \in \mathscr{S}\mathscr{V} \Rightarrow$ Die Schiftinvarianzgruppe
$\mathscr{S}\mathscr{I}(\mu) := \{(\tau, x) \in \mathrm{Aut}(G) \otimes G\colon \varepsilon_x * \tau(\mu) = \mu\}$ ist kompakt.

(v) Für alle G, $H \in \mathscr{G}$, für alle surjektiven stetigen Homomorphismen π: $G \to H$ gilt: $\mu \in \mathscr{V}$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}$] $\Rightarrow \pi(\mu) \in \mathscr{V}$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}$].

Sei nunmehr $\mathscr{G}$ die Klasse der kompakten Lie Gruppen.

2.1. *Bemerkungen.*

a) Da G kompakt ist, ist mit $\mathscr{I}(\mu)$ stets $\mathscr{S}\mathscr{I}(\mu)$ kompakt. Der Unterschied zwischen vollen und S-vollen Maßen ist also hier nicht wesentlich. Wir behandeln also im folgenden hauptsächlich die vollen Maße.

b) O.B.d.A. wird im folgenden G als zusammenhängend vorausgesetzt: Da $[G : G_0]$ endlich ist, übertragen sich Kompaktheitseigenschaf-

ten von Wahrscheinlichkeitsmaßen bzw. Automorphismen von G_0 auf G und vice versa.

c) Sei $\mathrm{Aut}(G)$ kompakt. Dann kann man $\mathscr{V} = M^1(G) = \mathscr{S}\mathscr{V}$ setzen. Der Typenkonvergenzsatz gilt trivialerweise. Dies trifft also insbesondere zu, falls $G = T^1$ der eindimensionale Torus ist, oder falls G (kompakt und) halbeinfach ist ([15]).

2.2. *Definition.* Sei G eine kompakte zusammenhängende Lie Gruppe. Sei $\mu \in M^1(G)$. μ heißt voll, falls für alle $\nu \in M^1(G)$ mit $\mathrm{Tr}(\nu) \supseteq \mathrm{Tr}(\mu)$ gilt: Die Invarianzgruppe $\mathscr{I}(\mu)$ ist kompakt. μ heißt S-voll, falls $\varepsilon_x * \mu$ voll ist $\forall x \in G$. $\mathscr{V}$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}$] bezeichne die Menge der vollen [resp. S-vollen] Maße in $M^1(G)$. (Vgl. **1**. Prop. 1.4.)

Aufgrund der Bemerkung 2.1 c) betrachten wir zunächst den Spezialfall einer zusammenhängenden abelschen kompakten Lie Gruppe, also $G = T^k$, $k \geqslant 1$.

2.3. Proposition. *Sei $G = T^1$. Dann besitzt $\mathscr{V} := M^1(G) = \mathscr{S}\mathscr{V}$ die vorhin genannten Eigenschaften* (i)—(v). *Der Typenkonvergenzsatz gilt trivialerweise.*

Beweis. (i), (ii) sind für $M^1(G)$ trivial erfüllt. (iii) gilt, da $\mathscr{I}(\mu)$ abgeschlossen und $\mathrm{Aut}(G)$ kompakt ist, ebenso gilt (iv). (v) ist trivial, da für jeden surjektiven Homomorphismus $\pi: G \to H$ gilt: $H = T^1$ oder $H = \{1\}$, und $\ker \pi$ endlich oder $\ker \pi = G$.

2.4. Proposition. *Sei $G = T^k$, $k \geqslant 2$. Sei $\mathscr{F}$ eine Teilmenge von $M^1(G)$, für die* (i) *und* (iii) *gelten. Dann ist $\mathscr{F} = \emptyset$.*

In diesem Fall gibt es also keine sinnvolle Definition der Vollheit bzw. Version des Typenkonvergenzsatzes. (Es sei denn, man schränkt die Klasse der zulässigen Automorphismen ein. Dieser Weg soll aber hier nicht verfolgt werden. Vgl. aber Kapitel 4.)

Beweis. Sei $\mu \in \mathscr{F}$. Dann ist $\nu := \omega_G \in M^1(G)$ mit $\mathrm{Tr}(\nu) \supseteq \mathrm{Tr}(\mu)$. Also müßte $\omega_G \in \mathscr{F}$ sein. Nun ist aber $\mathscr{I}(\omega_G) = \mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{Aut}(T^k)$ ist nicht kompakt für $k \geqslant 2$.

Nun sei G eine (nicht notwendig abelsche) zusammenhängende kompakte Lie Gruppe. Sei $S := [G, G]$ die (halbeinfache) Kommutatorgruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G. Sei $A := G/S$. Dann ist $A_0 \cong T^k$, $k \geqslant 0$, und $\pi: G \to A$ ist ein surjektiver stetiger Homomorphismus. (Jeder surjektive stetige Homomorphismus $\varphi: G \to T^m$ ist über π faktorisierbar.)

2.5. Satz. *Sei $\mu \in M^1(G)$. μ ist voll auf G (im Sinne von Definition* 2.1) *genau dann, wenn $\pi(\mu)$ voll auf A ist. Somit ist $\mathscr{V}(G) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\mathscr{V}(A) \neq \emptyset$, also genau dann, wenn* $\dim A = \dim Z(G) \leqslant 1$. *(In diesem Fall ist $\mathscr{V}(G) = M^1(G)$.)*

Beweis. Seien $\mathfrak{g}$, $\mathscr{S}$ und $\mathfrak{z}$ die Liealgebren von G, S und $Z(G)$. Es ist $\mathfrak{g} = \mathscr{S} \oplus \mathfrak{z}$, also ist $G = S \cdot Z(G)$ und $S \cap Z(G)$ endlich. Man darf sich also o.B.d.A. auf den Fall $G = S \otimes A$, S halbeinfach, A abelsch, beschränken. $\pi: G \to A$ sei der kanonische Homomorphismus. Da $\mathrm{Aut}(S)$ kompakt ist, gilt für $\mu \in M^1(G)$: $\mathscr{I}(\mu)$ ist kompakt in $\mathrm{Aut}(G) \Leftrightarrow \mathscr{I}(\pi(\mu))$ ist kompakt in $\mathrm{Aut}(A)$. Die übrigen Behauptungen folgen aus den vorangegangenen Propositionen.

2.6. Korollar. *Sei G wie in* 2.5 *mit* $\dim(Z(G)) \leqslant 1$. *Sei $\mathscr{V} = \mathscr{S}\mathscr{V} = M^1(G)$. Dann gilt der Typenkonvergenzsatz: Seien (μ_n), μ, $\nu \in M^1(G)$, $(\tau_n) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$, so daß $\mu_n \to \mu$ und $\tau_n \mu_n \to \nu$. Dann ist $\{\tau_n\}$ relativ kompakt in* $\mathrm{Aut}(G)$.

Der *Beweis* ist trivial, da dann $\mathrm{Aut}(G)$ kompakt ist.

2.7. Korollar. *Sei G wie in* 2.5 *mit* $\dim Z(G) \geqslant 2$. *Dann gibt es keine Klasse von Maßen, die* (i) *und* (iii) *erfüllen. Es gibt also (zumindest unter der Einschränkung* (i)) *keine Version des Typenkonvergenzsatzes.*

3. Zusammenhängende nilpotente Lie Gruppen mit nicht trivialen kompakten Untergruppen

Sei nun G eine zusammenhänge nilpotente Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$. G sei *nicht einfach-zusammenhängend.* Dann besitzt G eine nichttriviale maximale kompakte Untergruppe K. K ist zusammenhängend, zentral und charakteristisch. Es sei $N := G/K$ und $\varphi: G \to N$ sei der Homomorphismus auf die einfach zusammenhängende nilpotente Gruppe N. Die vollen Maße werden mittels φ definiert:

3.1. *Definition.* $\mu \in \mathscr{V}(G)$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}(G)$] genau dann, wenn $\varphi(\mu) \in \mathscr{V}(N)$ [resp. $\mathscr{S}\mathscr{V}(N)$].

3.2. Es seien $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$ die Lie Algebren von G, N, K. Mit $\mathfrak{m}$ werde ein Komplement zu $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Also $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$, $\dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{n}$. Sei weiter $\Delta := \{X \in \mathfrak{g}: \exp(X) = e\}$. Dann ist $\Delta \subseteq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}/\Delta \cong K$. Es sei $\tilde{G}$ die Überlagerungsgruppe von G. $\tilde{G}$ ist homöomorph zu $\mathfrak{g}$, und

$G = \tilde{G}/\exp_{\tilde{G}}(\Delta)$ ist homöomorph zu $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \times (\mathfrak{k}/\Delta) \cong \mathfrak{m} \times K \cong \mathfrak{n} \times K$. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\tilde{G})$ ist isomorph zu $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (indem man $\tau \in \mathrm{Aut}(\tilde{G})$ das Differential $\mathrm{d}\tau \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ zuordnet), und andererseits ist $\mathrm{Aut}(G) \cong \{\mathrm{d}\tau \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\colon \mathrm{d}\tau\Delta = \Delta\}$. Da K charakteristisch in G ist, ist $\mathfrak{k}$ $\mathrm{d}\tau$-invariant für alle Automorphismen $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. Also besitzt $\mathrm{d}\tau$ eine Darstellung $\mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, mit $\alpha \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{m})$, $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$, $\gamma \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{k})$.

3.3. Proposition. *Die Differentiale* $\mathrm{d}\tau$ *von Automorphismen* $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ *sind gerade die Vektorraumautomorphismem* $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, *mit* $\alpha \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{m})$, $\gamma \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{k})$, $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$, *so daß*

(1) $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ (*wobei* $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{n}$ *mit der Lie-Algebrenstruktur von* $\mathfrak{n}$ *versehen wird*)

(2) $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{k})$ ($= \mathrm{Gl}(\mathfrak{k})$, *da* $\mathfrak{k}$ *abelsch ist*)

(3) *für* $X, Y \in \mathfrak{m}$ *mit* $[X, Y] \in \mathfrak{k}$ *gilt:* $[\alpha X, \alpha Y] = \gamma[X, Y]$

(4) $\gamma(\Delta) = \Delta$

Bemerkungen: a) Sei $\bar{\tau}$ der durch τ auf N induzierte Automorphismus. Dann kann α mit dem Differential $\mathrm{d}\bar{\tau}$ identifiziert werden.

b) Da $\beta(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, hat die Lie-Algebrenstruktur keinen Einfluß auf die Gestalt von β. Jeder Vektorraumhomomorphismus $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$ ist zulässig, solange die Verträglichkeitsbedingungen (1), (2), (3), (4) für α und γ erfüllt sind.

Der *Beweis* ist unmittelbar einzusehen.

3.4. Satz. *Es seien* G, N, K *wie vorhin definiert. Es seien* N *und* K *nicht trivial* (*also* $\dim N \geqslant 1$ *und* $\dim K \geqslant 1$). *Dann gilt der Typenkonvergenzsatz nicht. Präziser: Sei* $\mu \in M^1(G)$ *ein* K*-invariantes Maß. Dann ist die Invarianzgruppe* $\mathcal{I}(\mu)$ *nicht kompakt.*

Beweis: Es sei $\mu \in M^1(G)$, $\mu * \omega_K = \mu$. Für jeden Vektorraumhomomorphismus $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, \mathfrak{k})$ ist $\mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathfrak{m}} & 0 \\ \beta & \mathrm{id}_{\mathfrak{k}} \end{pmatrix}$ nach 3.3 das Differential eines Automorphismus $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. G ist homöomorph zu $N \times K$ ($\cong \mathfrak{n} \times K$) und τ ist von der Gestalt

$$\tau(n, \varkappa) = (n, \tilde{\beta}(n) \cdot \varkappa), \quad n \in N, \quad \varkappa \in K, \quad \tilde{\beta}\colon N \to K.$$

Für jede Funktion $\tilde{f} \in C_0(N)$, $f\colon = \tilde{f} \circ \varphi \in C_0(G)$ ist daher

$$\int_G f\circ\tau(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{N\times K} f\circ\tau(n,\varkappa)\,\mathrm{d}\mu(n,\varkappa) =$$

$$= \int_{N\times K} f(n,\beta(n)\cdot\varkappa)\,\mathrm{d}\mu(n,\varkappa) = \int_{N\times K} f(n,e)\,\mathrm{d}\mu(n,\varkappa) =$$

$$= \int_G f\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Da $\mu = \mu * \omega_K$ $(= \omega_K * \mu)$ folgt somit:

$$\tau\in\mathscr{I}(\mu) \quad \text{für alle} \quad \beta\in\mathrm{Hom}(\mathscr{m},\mathscr{k}).$$

Da $\mathscr{m}$ und $\mathscr{k}$ nicht trivial sind, folgt damit, daß $\mathscr{I}(\mu)$ nicht kompakt ist.

3.5. *Beispiele.* a) $(\dim(G) = 3)$. Sei $G := \mathbb{H}_1/\mathbb{Z} = \{(x, z)\in\mathbb{R}^2\times T^1\}$ mit der von $\mathbb{H}_1$ induzierten Gruppenstruktur. Die maximale kompakte Untergruppe ist $K = \{(0, z)\colon z\in T^1\} = Z(G)$. Die Automorphismen $\tau\colon (x, z)\mapsto(x, \tilde{\beta}(x)\cdot z)$ liegen in der Invarianzgruppe $\mathscr{I}(\mu)$ eines jeden K-invarianten Maßes μ.

b) $(\dim G = 2)$. $G := \mathbb{R}\otimes T^1$. $K := \{(0, z)\colon z\in T^1\}$. Für jedes K-invariante Maß μ ist wieder $\tau\colon (x, z)\mapsto(x, \tilde{\beta}(x)\cdot z)\in\mathscr{I}(\mu)$ für jedes $\tilde{\beta}\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, T^1)$.

3.6. Im Beweis von Satz 3.4 und in den Beispielen ist die Gestalt der Restriktionen $\mathrm{d}\tau\colon \mathscr{m}\to\mathscr{k}$ (die wir mit β bezeichnet hatten) verantwortlich für die Nichtkompaktheit der Invarianzgruppen. Tatsächlich kann man zeigen, daß aus der Gültigkeit der Typenkonvergenzsatzes auf N auf die Relativkompaktheit der übrigen Komponenten der Automorphismen geschlossen werden kann. Es gilt nämlich

3.7. Proposition. *Sei* $K\subseteq[G, G]$. *Sei* $\{\tau_K\}$ *eine Folge in* $\mathrm{Aut}(G)$, *derart, daß die auf* N *induzierten Automorphismen* $(\bar{\tau}_k)$ *in* $\mathrm{Aut}(N)$ *relativkompakt sind. Sei* $\tau_k = \begin{pmatrix}\alpha_k & 0\\ \beta_k & \gamma_k\end{pmatrix}$ *wie in* 3.3. *Dann gilt:* $\{\alpha_k\}$, $\{\gamma_k\}$ *sind relativkompakt in* $\mathrm{Aut}(\mathscr{n})$ *und* $\mathrm{Aut}(\mathscr{k})$ *und die Restriktionen* $\{\beta_k\colon [\mathscr{g}, \mathscr{g}]\to\mathscr{k}\}_{k\geqslant 0}$ *sind relativkompakt in* $\mathrm{Hom}([\mathscr{g}, \mathscr{g}], \mathscr{k})$.

Beweis. Da α_k mit $\mathrm{d}\bar{\tau}_k$ identifiziert werden kann, und da $\mathscr{k}\subseteq[\mathscr{g}, \mathscr{g}]$ vorausgesetzt wurde, genügt es zu zeigen, daß die Folge der Restriktionen $\{\mathrm{d}\tau_k\colon [\mathscr{g}, \mathscr{g}]\to\mathscr{g}\}$ relativkompakt ist. Nun ist aber $[\mathscr{g}, \mathscr{g}] = [\mathscr{m}, \mathscr{m}]\cong$

$\cong [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \bmod \mathfrak{k}$. Also folgt die Behauptung aus der Relativkompaktheit von $\{\mathrm{d}\bar{\tau}_k\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$: Es ist ja für $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$\mathrm{d}\tau_k[X, Y] = [\mathrm{d}\tau_k X, \mathrm{d}\tau_k Y] = [\alpha_k X + \beta_k X, \alpha_k Y + \beta_k Y] = [\alpha_k X, \alpha_k Y].$$

Somit folgt aus der Relativkompaktheit von $\{\alpha_k X\}$ und $\{\alpha_k Y\}$ die Relativkompaktheit von $\{\mathrm{d}\tau_k[X, Y]\}$.

3.8. *Bemerkung.* Ist die Bedingung $K \subseteq [G, G]$ nicht erfüllt, so läßt sich, da $K \cap [G, G]$ charakteristisch ist, die Restriktion von τ auf K weiter aufspalten. Die Aussage von 3.7 bleibt richtig, wenn man γ_k durch die Restriktionen $\gamma_k|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{k}}$ ersetzt.

4. Kompakte halbdirekte Erweiterungen einfach zusammenhängender nilpotenter Lie Gruppen

Es sei nunmehr N eine einfach zusammenhängende nilpotente Lie Gruppe, K sei eine kompakte Lie Gruppe und $G := N \circledS_\sigma K$ das semidirekte Produkt (mit $N \lhd G$ und definierendem Homomorphismus $\sigma: K \to \mathrm{Aut}(N)$). Die Resultate im folgenden sind nicht vollständig. Sie werden unter einschränkenden Bedingungen bewiesen, die in den bisher behandelten Beispielen erfüllt sind: $G = \mathbb{R}^d \circledS O(d)$ — der Gruppe der euklidischen Bewegungen [1] — und $G = \mathbb{H}_n \circledS_\sigma K_n$ — der Diamantgruppe [4]. In diesen Fällen sind die Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}(G)$ hinreichend bekannt.

4.1. Lemma. *Sei $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. Seien $\alpha: N \to N$, $\beta: K \to N$, $\gamma: N \to K$, $\delta: K \to K$ definiert durch $\tau(x) := \alpha(x) \cdot \gamma(x)$, $x \in \mathbb{N}$, $\tau(\varkappa) := \beta(\varkappa) \cdot \delta(\varkappa)$, $\varkappa \in K$. Dann sind α, β, γ, δ stetig, $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$, $\gamma \in \mathrm{Hom}(N, K)$. Weiter gelten die Funktionalgleichungen*

(1) $\alpha(xy) = \alpha(x) \cdot \sigma(\gamma(x))(\alpha(y)), \quad (x, y \in N)$

(2) $\beta(\varkappa\eta) = \beta(\varkappa) \cdot \sigma(\delta(\varkappa))(\beta(\eta)), \quad (\varkappa, \eta \in K)$.

Insbesondere ist $\alpha(e) = \beta(e) = \gamma(e) = \delta(e) = e$. Seien $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ die Komponenten von τ^{-1}. Dann gelten:

(3) $\tilde{\alpha}(\alpha(x)) \cdot \sigma(\tilde{\gamma}(\alpha(x))(\tilde{\beta}(\gamma(x)) = x, \quad (x \in N)$

(4) $\tilde{\gamma}(\alpha(x)) \cdot \tilde{\delta}(\gamma(x)) = e, \quad (x \in N)$

(5) $\tilde{\alpha}(\beta(\varkappa)) \cdot \sigma(\tilde{\gamma}(\beta(\varkappa))(\tilde{\beta}(\delta(\varkappa))) = e, \quad (\varkappa \in K)$.

(Insbesondere also $\tilde{\alpha} \circ \beta \equiv e$.)

(6) $\tilde{\gamma}(\beta(\varkappa)) \cdot \tilde{\delta}(\delta(\varkappa)) = e, \quad (\varkappa \in K)$.

Beweis. Unmittelbar nachzuprüfen, indem man in den Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \tau(xy) = \tau(x)\cdot\tau(y) & (x,\ y\in N) \\ \tau(\varkappa\eta) = \tau(\varkappa)\cdot\tau(\eta) & (\varkappa,\ \eta\in K) \\ \text{bzw. } \tau^{-1}\tau(x) = x & (x\in N) \\ \tau^{-1}\tau(\varkappa) = \varkappa & (\varkappa\in N) \end{array}$$

die Komponenten aus N bzw. K betrachtet.

4.2. *Bemerkungen.* a) Wir schreiben künftig $\tau = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, um die Aufspaltung in die Komponenten anzugeben. Sind β resp. γ trivial, so schreiben wir entsprechend $\tau = (\alpha, \gamma, \delta)$ resp. (α, β, δ), resp. (α, δ).

b) Bisher wurde die spezielle Gestalt von N resp. K nicht benutzt. Sei nun N auflösbar und zusammenhängend, K kompakt. Dann ist $\ker\gamma \supseteq [N, N]$. *Beweis:* $\gamma(N)$ ist dann eine zusammenhängende auflösbare Untergruppe in K, also $\gamma(N) \subseteq \mathrm{Rad}(K) = Z(K)$. Also ist insbesondere $\gamma(N)$ abelsch, somit $[N, N] \subseteq \ker\gamma$.

Mit Hilfe von 4.2 b) ließe sich das Problem wiederum teilweise auf die Behandlung von abelschen nilpotent Lie Gruppen zurückführen.

4.3. Lemma. *Sei* $\tau = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathrm{Aut}(G)$, $\tau^{-1} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$. *Dann gilt:* $\tau(N) = N \Leftrightarrow \gamma$ *und* $\tilde{\gamma}$ *sind trivial. In diesem Fall ergibt* 4.1 (1) $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$, (2) *bleibt unverändert,* (3) *liefert* $\tilde{\alpha} = \alpha^{-1}$, (4) *wird trivial,* (5) *ergibt* $\tilde{\alpha}\circ\beta \equiv e$, $\tilde{\beta}\circ\delta \equiv e$ *und* (6) *liefert* $\tilde{\delta} = \delta^{-1}$.

Beweis: $\tau(N) = N \Leftrightarrow$ Für $x \in N$ ist $\gamma(x) = e$. Ebenso: $\tilde{\gamma} \equiv e$. Setzt man dies in 4.1 (1)—(6) ein, so folgen die übrigen Behauptungen unmitellbar.

4.4. Lemma. *Mit vorigen Bezeichnungen gilt:* $\tau(K) = K \Leftrightarrow \beta$ (*und* $\tilde{\beta}$) *sind trivial.*

In diesem Fall bleibt 4.1 (1) *unverändert,* (2) *wird trivial,* (3) *ergibt* $\tilde{\alpha} = \alpha^{-1}$ (*als Homöomorphismus* $\alpha \in C(N, N)$), (4) *bleibt unverändert,* (5) *wird trivial und* (6) *liefert* $\tilde{\delta} = \delta^{-1}$.

Beweis: Unmittelbar nachzuprüfen.

4.5. Korollar. a) *Im Fall* $\tau(N) = N$ *erhält man also:* $\tau = (\alpha, \beta, \delta)$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$, $\tau^{-1} = (\alpha^{-1}, \tilde{\beta}, \delta^{-1})$ *mit* $\tilde{\beta} = \alpha^{-1}\circ j\circ\beta\circ\delta^{-1}$ (*wobei* $j(x) := x^{-1}$, $x \in N$).

b) *Im Fall* $\tau(K) = K$ *erhält man:* $\tau = (\alpha, \gamma, \delta)$, α *erfüllt* 4.1 (1), $\alpha, \alpha^{-1} \in C(N, N)$, *sowie* $\tau^{-1} = (\alpha^{-1}, \tilde{\gamma}, \delta^{-1})$ *mit* $\tilde{\gamma} = \delta\circ\gamma\circ\alpha^{-1}$.

c) *Im Falle* $\tau(N) = N$ *und* $\tau(K) = K$ *gilt somit* $\tau = (\alpha, \delta)$, $\alpha \in \in \mathrm{Aut}(N)$, $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$. *Umgekehrt: Seien* $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$, $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$. *Dann ist* τ: $(x \cdot \varkappa) \mapsto \alpha(x) \cdot \delta(\varkappa) \in \mathrm{Aut}(G)$, *wenn die Verträglicheitsbedingung*

$$\delta(\varkappa) \cdot \alpha(x) \cdot \delta(\varkappa^{-1}) = \sigma(\delta(\varkappa))(\alpha(x)) = \alpha(\sigma(\varkappa)(x))$$

erfüllt ist ($x \in N$, $\varkappa \in K$).

Beweis: a) Noch zu zeigen bleibt die Gestalt von $\tilde{\beta}$. Es ist für $\eta \in K$ $\tau(\eta) = \beta(\eta) \cdot \delta(\eta)\, \eta = \tau^{-1}\tau(\eta) = \tau^{-1}(\beta(\eta)) \cdot \tau^{-1}(\delta(\eta)) = \alpha^{-1}(\beta(\eta)) \cdot \cdot \tilde{\beta}(\delta(\eta)) \cdot \delta^{-1}(\delta(\eta))$. Somit $\alpha^{-1}(\beta(\eta)) \cdot \tilde{\beta}(\delta(\eta)) = e$, also $\tilde{\beta}(\delta(\eta)) = = \alpha^{-1}(\beta(\eta)^{-1})$. Setzt man $\varkappa := \delta(\eta)$, $x := \beta(\eta)$, so folgt: $\tilde{\beta}(\varkappa) = = \alpha^{-1}(\beta(\delta^{-1}(\varkappa))^{-1})$, $\varkappa \in K$.

b) Wird analog bewiesen.

c) Folgt aus a) und b). Die Verträglichkeitsbedingung ist offensichtlich.

4.6. *Bemerkung.* Sei $\{\tau_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)\}$ eine Folge in $\mathrm{Aut}(G)$. Dann ist $\{\tau_n\}$ relativkompakt in $\mathrm{Aut}(G)$ genau dann, wenn $\{\tau_n\}$ und $\{\tau_n^{-1}\}$ in $C(G, G)$ relativkompakt sind. Aus der speziellen Gestalt von τ^{-1} in 4.5 ergeben sich:

a) Sei $\tau_n(N) = N$ für alle n. Dann gilt: $\{\tau_n\}$ ist relativkompakt in $\mathrm{Aut}(G) \Leftrightarrow \{\alpha_n\}$, $\{\delta_n\}$ und $\{\beta_n\}$ sind relativkompakt in $\mathrm{Aut}(N)$, $\mathrm{Aut}(K)$ und $C(K, N)$.

b) Sei $\tau(K) = K$ für alle n. Dann gilt: $\{\tau_n\}$ ist relativkompakt in $\mathrm{Aut}(G) \Leftrightarrow \{\alpha_n\}$, $\{\alpha_n^{-1}\}$, $\{\delta_n\}$ und $\{\gamma_n\}$ sind relativkompakt in $C(N, N)$, $C(N, N)$, $\mathrm{Aut}(K)$ bzw. $C(N, K)$.

c) Sei $\tau_n(K) = K$ und $\tau_n(N) = N$ für alle n. Dann gilt: $\{\tau_n\}$ ist relativkompakt in $\mathrm{Aut}(G) \Leftrightarrow \{\alpha_n\}$ und $\{\delta_n\}$ sind relativkompakt in $\mathrm{Aut}(N)$ bzw. $\mathrm{Aut}(K)$.

Die letzte Bemerkung ermöglicht eine erste Formulierung des Typenkonvergenzsatzes:

4.7. *Definition.* Sei $\mu \in M^1(G)$, $G = N \circledS_\sigma K$. Sei ${}^K\mu := \omega_K * \mu * \omega_K$ das zugehörige K-biinvariante Maß. Dann ist ${}^K\mu = \mu^\circ \otimes \omega_K$, wobei $\mu^\circ \in M^1(N)$ und $\sigma(\varkappa)(\mu^\circ) = \mu^\circ$ für $\varkappa \in K$ (vgl. [8] 4.3). μ heiße voll auf $G :\Leftrightarrow \mu^\circ$ ist voll auf N.

4.8. Satz. *Sei* $G = N \circledS_\sigma K$, *wobei* K *nilpotent, einfach zusammenhängend ist und* K *kompakt. Sei* $\mathscr{B} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ *eine abgeschlossene Untergruppe. Es gelte:* (1) $\tau(N) = N$, (2) $\tau(K) = K$ *für alle* $\tau \in \mathscr{B}$, *sowie*

(3) $\{\delta = \tau|_K\colon \tau \in \mathscr{B}\}$ *ist kompakt in* $\mathrm{Aut}(K)$. *Dann gilt eine Version des Typenkonvergenzsatzes für Automorphismen aus* $\mathscr{B}$:

Sei $\{\tau_n\}$ *eine Folge in* $\mathscr{B}$, $\mu_n \to \mu$, $\tau_n(\mu_n) \to \nu$ *und seien* μ, ν *voll. Dann ist* $\{\tau_n\}$ *ist relativkompakt in* $\mathrm{Aut}(G)$ (*und damit in* $\mathscr{B}$).

Beweis: 1. Der Typenkonvergenzsatz gilt für N.

2. $\mu_n \to \mu \Rightarrow {}^K\mu_n \to {}^K\mu$. Weiter ist $(\tau_n({}^K\mu)) = \omega_K * \tau_n(\mu_n) * \omega_K = \tau_n(\mu_n)$ (nach Voraussetzung (2)), somit gilt $\tau_n({}^K\mu_n) \to {}^K\nu$. Das bedeutet aber: $\mu_n^\circ \otimes \omega_K \to \mu^\circ \otimes \omega_K$,

$$\tau_n(\mu_n^\circ \otimes \omega_K) = \alpha_n(\mu_n^\circ) \otimes \omega_K \to \nu^\circ \otimes \omega_K .$$

Daher $\mu_n^\circ \to \mu^\circ$ und $\alpha_n(\mu_n^\circ) \to \nu^\circ$. Da wegen (1) $\alpha_n \in \mathrm{Aut}(N)$, und da somit der Typenkonvergenzsatz auf N anwendbar ist, folgt, daß $\{\alpha_n\}$ relativkompakt ist in $\mathrm{Aut}(N)$. Wegen (3) folgt nun aus 4.6 c) die Relativkompaktheit von $\{\tau_n\}$ in $\mathrm{Aut}(G)$.

Wir geben nun Bedingungen an, unter denen 4.8 (1) und (3) stets erfüllt sind:

4.9. Lemma. *Sei* $K = S \cdot A$ *die Aufspaltung in den halbeinfachen und abelschen Anteil. Sei* N *nilpotent, einfach zusammenhängend. Sei* $G := N \circledS_\sigma K$, $M := N \circledS_\sigma A \subseteq G$. *Dann ist* M *das Radikal von* G, *also charakteristisch und* $M \supseteq N$.

Beweis: Sei $\pi\colon G \to K = G/N$ die kanonische Abbildung. Dann ist, wie schon in 4.2 b) verwendet, $\pi(N)$ als auflösbare Gruppe $\subseteq A$. Somit folgt $N \subseteq \pi^{-1}(A) = N \circledS_\sigma A := M$. M ist nach Konstruktion ein auflösbarer Normalteiler mit $[M, M] \subseteq N$. Also liegt M im Radikal, $M \subseteq \mathrm{Rad}(G)$. Andererseits gilt $\pi(\mathrm{Rad}(G)) \subseteq A$, daher $M = \mathrm{Rad}(G)$.

4.10. *Folgerungen.* a) Ist $K = S$, also halbeinfach, dann ist $N = M = \mathrm{Rad}(G)$. Also ist N charakteristisch und somit ist 4.8 (1) erfüllt für alle $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. In diesem Fall ist ([15]) $\mathrm{Aut}(K)$ kompakt, also ist auch 4.8 (3) stets erfüllt.

b) sei $K = S \cdot A$, $\dim(A) = 1$ und es operiere $A = T^1$ nicht trivial auf N (so daß $M = N \circledS A$ nicht nilpotent ist). Dann ist N das Nilradikal von G, somit wiederum charakteristisch. Also sind auch in diesem Fall (vgl. 2.6) die Voraussetzungen 4.8 (1) und (3) stets erfüllt.

Beweis: N ist ein nilpotenter, zusammenhängender Normalteiler von G mit $\mathrm{codim}(N) = 1$ in $M = \mathrm{Rad}(G)$. Damit ist sicher N im Nilradikal enthalten. Andererseits ist M nach Voraussetzung auflös-

bar, aber nicht nilpotent, daher muß wegen $\dim(M/N) = 1$ N das Nilradikal von G und somit charakteristisch sein.

c) Kombiniert man a) und b) so erhält man: 4.8 (1) und (3) sind erfüllt für $\mathscr{B} = \mathrm{Aut}(G)$, falls entweder A trivial ist, also $M = N = \mathrm{Rad}(G)$ oder $\dim(A) = \dim Z(K) = 1$ ist und A nicht trivial auf N operiert, so daß M nicht nilpotent ist.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß man die Bedingung (2) in 4.8 abschwächen kann:

4.11. Lemma. *Sei $G = N \circledS K$. Dann existiert eine Abbildung $\mathrm{Aut}(G) \ni \tau \mapsto n(\tau) \in N$, so daß $\tau(K) = n(\tau) K n(\tau)^{-1}$. Für $g \in G$ bezeichne i_g den inneren Automorphismus $x \mapsto i_g(x) = gxg^{-1}$. Sei $\{\tau_k\}$ eine Folge in $\mathrm{Aut}(G)$. Dann gilt: Falls $\{i_{n(\tau_k)}\}_{k \geq 0}$ relativkompakt in $\mathrm{Aut}(G)$ ist, so ist $L := \bigcup_k \tau_k(K)$ relativkompakt in G.*

Beweis: K und $\tau(K)$ sind als maximale kompakte Untergruppen der zusammenhängenden Gruppe G konjugiert. Somit existiert $g \in G$ mit $\tau(K) = gKg^{-1}$. Setzt man $g = n(\tau) \cdot \varkappa$, $\varkappa \in K$ und $n(\tau) \in N$, so folgt $\tau(K) = i_{n(\tau)}(K)$. Ist $\{i_{n(\tau_k)}\}$ relativkompakt in $\mathrm{Aut}(G)$, so ist auch $L := \bigcup_k \tau_k(K) = \bigcup_k i_{n(\tau_k)}(K)$ relativkompakt in G.

4.12. Lemma. *Sei $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ mit $\tau(N) = N$. Dann gilt (mit den Bezeichnungen aus 4.1 und 4.11): $\beta(\varkappa) = i_{n(\tau)}(\delta(\varkappa)) \cdot \delta(\varkappa^{-1})$ resp. $\beta(\varkappa) = n(\tau) \cdot \sigma(\delta(\varkappa))(n(\tau)^{-1})$.*

Beweis: Wegen $\tau(K) = n(\tau) K n(\tau)^{-1}$ existiert $\eta \in C(K, K)$ mit $\tau|_K = i_{n(\tau)} \circ \eta$, resp.

$$\begin{aligned}\beta(\varkappa) \cdot \delta(\varkappa) &= i_{n(\tau)}(\eta(\varkappa)) = n(\tau)\, \eta(\varkappa)\, n(\tau)^{-1} = \\ &= n(\tau) \cdot \sigma(\eta(\varkappa))(n(\tau)^{-1}) \cdot \eta(\varkappa).\end{aligned}$$

Daraus folgt $\eta = \delta$, und somit

$$\beta(\varkappa) = i_{n(\tau)}(\delta(\varkappa)) \cdot \delta(\varkappa^{-1}) = n(\tau) \cdot \sigma(\eta(\varkappa))(n(\tau)^{-1}).$$

4.13. Proposition. *Sei $\{\tau_k\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ eine Folge. Es gelte:*

(1) $\tau_k(N) = N \forall k$.

(2a) $\bigcup_k \tau_k(K) = : L$ *ist relativkompakt in G und*

(2b) $\{i_{n(\tau_k)}\}$ *ist auf K gleichgradig stetig, sowie*

(3) $\{\delta_k\}$ *is relativkompakt in* $\mathrm{Aut}(K)$.

Dann folgt: $\{\tau_k\}$ *ist relativkompakt in* $\mathrm{Aut}(G)$.

Beweis: Es ist nach 4.6a) die Relativkompaktheit von $\{\beta_k\}$ in $C(K, N)$ zu beweisen. Nach (2a) ist $\beta_k(K) \subseteq \tau_k(K) \cdot K \subseteq L \cdot K$. Es ist $M := (N \cap L \cdot K)^-$ kompakt in N, somit $\beta_k \in C(K, M)$, $k \geqslant 0$. Nach dem Satz von Tychonov ist $\{\beta_k\}$ relativkompakt in M^K bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. Es bleibt zu zeigen, daß $\{\beta_k\}$ gleichgradig stetig auf K ist. Nun ist aber für $\varkappa, \eta \in K$.

$$\beta_k(\varkappa)^{-1} \cdot \beta_k(\varkappa\eta) = i_{\delta_k(\varkappa)}[i_{n(\tau_k)}(\delta_k(\eta)) \cdot \delta_k(\eta^{-1})].$$

Da $\{\delta_k\}$ relativkompakt in $\mathrm{Aut}(K)$ und somit gleichgradig stetig ist, da wegen (2b) auch $\{i_{n(\tau_k)} \circ \delta_k\}$ gleichradig stetig ist, folgt die gleichgradige Stetigkeit von $\{\beta_k\}$ in $C(K, N)$.

4.14. *Bemerkung.* (2a) und (2b) sind erfüllt, falls $\{n(\tau_k)\}_{n \geqslant 0}$ relativ kompakt in N ist, (3) ist erfüllt, falls $\mathrm{Aut}(K)$ kompakt ist.

4.15. *Bemerkungen.* Seien (1), (2.a) und (3) erfüllt.

a) Dann ist $\mathscr{L} := \{\tau_k(\omega_K) = \omega_{\tau_k(K)}\}$ relativkompakt in $M^1(G)$ und jeder Häufungspunkt von $\mathscr{L}$ ist ein Haarsches Maß $\omega_{\tilde{K}}$ auf einer kompakten Untergruppe. Bettet man $\tilde{K}$ in eine maximale kompakte Untergruppe ein, so erhält man: Es gibt zu jedem Häufungspunkt $\omega_{\tilde{K}}$ von $\mathscr{L}$ ein $n_0 \in N$, so daß $\tilde{K} \subseteq i_{n_0}(K)$. Sei k' eine Teilfolge mit $\tau_{k'}(\omega_K) \to \omega_{\tilde{K}}$. So darf man, falls $\tau_{k'}$ durch $i_{n_0}^{-1} \circ \tau_{k'}$ ersetzt wird, o.B.d.A voraussetzen, daß $\tilde{K} \subseteq K$.

b) Sei $\tau_k(\omega_K) \to \omega_{\tilde{K}}$, $\tilde{K} \subseteq K$. Dann folgt: $\beta_k(\varkappa) \to e$ punktweise auf K.

Beweis: Sei $L := \{\varkappa \in K\colon \beta_k(\varkappa) \to e\} = \{\varkappa\colon \tau_k(\varkappa) \to e \bmod K\}$. Man prüft sofort nach, daß L eine Untergruppe ist. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (K, ω_K) ist die Folge der N-wertigen Zufallsvariablen β_k schwach konvergent gegen ε_e (da $\tau_k(\omega_K) \to \omega_{\tilde{K}}$ schwach, und $\tilde{K} \subseteq K$). Somit folgt: In jeder Teilfolge (k') aus $\mathbb{N}$ gibt es eine Teilfolge (k''), so daß $\beta_{k''} \to e$ ω_K-f.ü.

Sei (k'') festgehalten und L'' die zugehörige Untergruppe mit $\beta_{k''} \to e$ punktweise auf L''. L'' ist dicht mit $\omega_K(L'') = 1$. Daher ist $L'' = K$. Da (k') eine beliebige Teilfolge war, folgt daraus $L = K$.

c) Seien nun μ_k, μ, $\nu \in M^1(G)$. Es werden die in 4.7 vereinbarten Bezeichnungen ${}^K\mu$, μ°, ... verwendet.

Es gelte $\mu_k \to \mu$, $\tau_k(\mu_k) \to \nu$, sowie $\tau_k(\omega_K) \to \omega_K$. Dann folgen:
(c1) $\mu_k^\circ \to \mu^\circ$
(c2) $\alpha_k(\mu_k^\circ) \to \nu^\circ$ in $M^1(N)$.

Beweis: Es gilt:

$$^K\mu_k = \omega_K * \mu_k * \omega_K \to {}^K\mu = \omega_K * \mu * \omega_K,$$

also

$$\mu_k^\circ \otimes \omega_K \to \mu^\circ \otimes \omega_K, \text{ somit (c1).}$$

Weiter

$$\tau_k({}^K\mu_k) = \tau_k(\omega_K) * \tau_k(\mu_k) * \tau_k(\omega_K) \to \omega_K * \nu * \omega_K = {}^K\nu,$$

also

$$\tau_k(\mu_k^\circ \otimes \omega_K) \to \nu^\circ \otimes \omega_K.$$

Nun ist $\tau_k(\mu_k^\circ) = \alpha_k(\mu_k^\circ)$ und für $f \in C(G)$ ist

$$\int f \, \mathrm{d}\tau_k(\omega_K) = \int_K f(\beta_k(\varkappa) \cdot \delta_k(\varkappa)) \, \mathrm{d}\omega_K(\varkappa) \to \int f \, \mathrm{d}\omega_K,$$

da $\beta_k \to e$ und da $\{\delta_k\}$ relativkompakt in $\mathrm{Aut}(K)$ ist. Es folgt also (c2).

4.15b) läßt sich noch wesentlich verbessern:

d) Sei $\tau_k(\omega_K) \to \tau(\omega_K)$, $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. Dann folgen (2a) und (2b).

Beweis: Mit vorigen Bezeichnungen ist $i_{n(\tau_k)}(\omega_K) \to i_{n(\tau)}(\omega_K)$. Sei $\mathcal{N}$ der Raum der maximalen kompakten Untergruppen von G, also $\mathcal{N} = \{x K x^{-1} : x \in N\}$. Sei $p: N \to \mathcal{N}$ die Quotientenabbildung. $\mathcal{N}$ wird versehen mit der Spurtopologie von $\mathcal{K}(G)$, dem Raum der kompakten Teilmengen von G. p ist stetig.
Es folgt somit $p(\tau_k(\omega_K)) \to p(\tau(\omega_K))$, also

$$\varepsilon_{p(n(\tau_k))} \to \varepsilon_{p(n(\tau))} \text{ in } M^1(\mathcal{N}).$$

Nun ist aber $\mathcal{N}$ zu der Menge der Punktmaße in $M^1(\mathcal{N})$ homöomorph, also folgt $p(n(\tau_k)) \to p(n(\tau))$, resp. $i_{n(\tau_k)}(K) \to i_{n(\tau)}(K)$ in $\mathcal{K}(G)$. Sei also oBdA $\tau = \mathrm{id}$, sei $V \in \mathcal{U}_N(e)$. Dann existiert $k_V \in \mathbb{N}$, so daß für $k \geqslant k_V$ $i_{n(\tau_k)}(K) \subseteq V \cdot K$ gilt. Daraus folgt aber sofort mit 4.12 die gleichgradige Stetigkeit von $\{\beta_k\}$.

Zusammenfassend erhält man nun die angekündigte allgemeinere Version des Typenkonvergenzsatzes:

4.16. Satz. *Sei* $G = N \circledS K$. *Sei* $\{\tau_k\}$ *eine Folge in* $\mathrm{Aut}(K)$, *die den Voraussetzungen* (1) *und* (3) *in* 4.13 *genügt. Weiter gelte*

$$(*)\quad \tau_k(\omega_K) \to \omega_K.$$

Seien μ_k, μ, $\nu \in M^1(G)$, *so daß* $\mu_k \to \mu$, $\tau_k \mu_k \to \nu$ *und so daß* μ, ν *voll auf* G *sind* (*im Sinne von Definition* 4.7). *Dann ist* $\{\tau_k\}$ *relativkompakt in* $\mathrm{Aut}(G)$.

Beweis: Aus (*) folgen zunächst mit 4.15 d) (2a) und (2b). Aus 4.15 c) folgt mittels des Typenkonvergenzsaatzes für N, daß $\{\alpha_k\}$ in $\mathrm{Aut}(N)$ relativkompakt ist. Da die Voraussetzungen von 4.13 erfüllt sind, folgt die Relativkompaktheit von $\{\tau_k\}$.

5. Abschließende Bemerkungen

Die bisherigen Betrachtungen legen den Schluß nahe, daß die Gültigkeit des Typenkonvergenzsatzes im wesentlichen auf den Fall nilpotenter Gruppen (und kompakter Erweiterungen) beschränkt ist. Wir zeigen anhand eines Beispiels, daß dies nicht der Fall ist.

5.1. *Beispiel.* G sei die „$ax + b$" Gruppe, d.h. die Gruppe der affinen Bewegungen von $\mathbb{R}$, also $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, mit der Komposition $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$, $a, c \in \mathbb{R}_+^*$, $b, d \in \mathbb{R}$. Die Lie Algebra ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y$ mit $[X, Y] = Y$. Die Exponentialabbildung $\mathfrak{g} \to G$ ist ein Homöomorphismus. G ist einfach zusammenhängend und auflösbar. Man prüft sofort nach, daß die Automorphismen aus $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die Matrizendarstellung $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & v \end{pmatrix} : v \neq 0\right\}$ besitzen. Es gibt ein echtes Ideal, nämlich $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R} \cdot Y$; die echten Unteralgebren sind $\mathbb{R} \cdot A$, $A \in \mathbb{R}^2 = \mathfrak{g}$. Somit sind die zusammenhängenden echten Untergruppen eindimensional, es gibt einen echten zusammenhängenden Normalteiler, nämlich $[G, G]$.

Man definiert: μ heißt voll, falls es eine echte zusammenhängende Untergruppe $\neq [G, G]$ gibt, auf der μ nicht konzentriert ist. (Im Falle der „$ax + b$" Gruppe ist also dann jedes nichtentartete Maß voll).

Sei $\mu \in M^1(G)$. Sei $\mathring{\mu}$ das zugehörige Bild auf $\mathfrak{g}$. Analog, sei $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{d}\tau$ das Differential, $\mathrm{d}\tau \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. (Es ist $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$). μ ist also voll genau dann, wenn $\mathring{\mu}$ nicht auf $\mathbb{R} \cdot A$ konzentriert ist, $A \neq Y$. Wir nehmen o.B.d.A. $A = X$ an.

Seien μ_n, μ, $\nu \in M^1(G)$, μ, ν voll, $\tau_n \in \mathrm{Aut}(G)$. Seien $\mu_n \to \mu$, $\tau_n \mu_n \to \nu$. Dann folgt: $\mathring{\mu}_n \to \mathring{\mu}$, $\mathrm{d}\tau_n \mathring{\mu}_n \to \mathring{\nu}$. Es genügt zu zeigen, daß $\{\mathrm{d}\tau_n\}$ relativkompakt ist. Sei π: $\mathfrak{g} \ni x X + y Y \mapsto x \in \mathbb{R}$. Es folgt aus den Voraussetzungen: $\pi(\mathring{\mu}_n) \to \pi(\mathring{\mu})$, $\pi\,\mathrm{d}\tau_n(\mathring{\mu}_n) \to \pi(\mathring{\nu})$, und $\pi(\mathring{\mu})$ und $\pi(\mathring{\nu})$ sind nicht entartet, also voll auf $\mathbb{R}$. Der Typenkonvergenzsatz für Vektorraumhomomorphismen in [7] 2.1 liefert dann die Relativkompaktheit von $\left\{\pi\,\mathrm{d}\tau_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_n & v_n \end{pmatrix}\right\}$, also die Relativkompaktheit der Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$. Vertauscht man die Rollen von $\mathring{\mu}_n$ und $\mathrm{d}\tau_n \mathring{\mu}_n$ und wendet man $\mathrm{d}\tau_n^{-1}$ an, so folgt die Relativkompaktheit von $\{u_n\}$ und $\{1/v_n\}$. Insgesamt ist damit die Relativkompaktheit von $\{\mathrm{d}\tau_n\}$ und damit von $\{\tau_n\}$ bewiesen.

Literatur

[1] Baldi, P.: Lois stables sur les deplacements de $\mathbb{R}^d$. In: Probability Measures on Groups. Lect. Notes Math. **706**, pp. 1—9. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1979.

[2] Billingsley, P.: Convergence of types in k-spaces. Z. Wahrsch. verw. Geb. **5**, 175—179 (1966).

[3] Drisch, T., Gallardo, L.: Stable laws on the Heisenberg group. In: Probability Measures on Groups. Lect. Notes Math. **1064**, pp. 56—79. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1984.

[4] Drisch, T., Gallardo, L.: Stable laws on the diamond group. Unveröffentlichtes Manuskript.

[5] Fisz, M.: A generalization of a theorem of Khiňtchin. Studia Math. **14**, 310—313 (1954).

[6] Gnedenko, B. W., Kolmogorov, A. N.: Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Cambridge: Addison-Wesley. 1954.

[7] Hazod, W., Nobel, S.: Convergence of types theorem for simply connected nilpotent Lie groups. In: Probability Measures on Groups IX. Lect. Notes Math. **1375**, pp. 90—106. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1989.

[8] Hazod, W., Siebert, E.: Continuous automorphism groups on a locally compact group contracting modulo a compact subgroup and applications to stable convolution semigroups. Semigroup Forum **33**, 111—143 (1986).

[9] Hazod, W., Siebert, E.: Automorphisms on a Lie group contracting modulo a compact subgroup and applications to semistable convolution semigroups. J. Theor. Prob. **1**, 211—226 (1988).

[10] Hinčin, A.: Über Klassenkonvergenz von Verteilungsgesetzen. Izv. N.I.I. Math. Mech. Tomsk. Gos. Univ. **1**, 258—261 (1937).

[11] Hochschild, G.: The Structure of Lie Groups. San Francisco—London—Amsterdam: Holden Day. 1965.

[12] Jajte, R.: Semistable probability measures on $\mathbb{R}^N$. Studia Math. **61**, 29—39 (1977).

[13] Letta, G.: Eine Bemerkung zum Konvergenzsatz für Verteilungstypen. Z. Wahrsch. verw. Geb. **2**, 310—313 (1964).

[14] Linde, W., Siegel, G.: On the convergence of types for Radon probability measures on Banach spaces. In: Probability on Banach Spaces 6. Proceedings Sandbjerg 1986, pp. 234—251. Progress in Prob. 20, Boston—Basel—Berlin: Birkhäuser 1990.

[15] MURAKAMI, S.: On the automorphisms of a real semisimple Lie algebra. J. Math. Soc. Japan **4**, 103—133 (1952).

[16] NOBEL, S.: Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeitsmaße auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppen. Dissertation. Universität Dortmund. 1989.

[17] NOBEL, S.: Limit theorems for probability measures on simply connected nilpotent Lie groups. Erscheint in: J. Theor. Prob.

[18] SHARPE, M.: Operator stable probability measures on vector groups. Trans. Amer. Math. Soc. **136**, 51—65 (1969).

[19] URBANIK, K.: Lévy's probability measures on Euclidean spaces. Studia Math. **44**, 119—148 (1972).

[20] WEISMANN, I.: On convergence of types and processes in Euclidean spaces. Z. Wahrsch. verw. Geb. **37**, 35—41 (1976).

W. HAZOD
Universität Dortmund
Postfach 500 500
D-W-4600 Dortmund 50
Bundesrepublik Deutschland