Werk

Titel: Discrépances de Suites Homothétiques.

Autor: Borel, J.P.

Jahr: 1987

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0104|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mh. Math. 104, 175—189 (1987)

Monatshefte für
Mathematik
© by Springer-Verlag 1987

Discrépances de Suites Homothétiques

Par

J. P. Borel, Limoges

(Reçu, le 21 Novembre 1986)

Abstract: Discrepancy of Homothetic Sequences. We study the normal order of the discrepancy of the family of all sequences $t\mathcal{U}$, for a given sequence $\mathcal{U}$ of real numbers. $\mathcal{U}$ is considered as a point of the probability space $\mathcal{Y}$ of all sequences $\mathcal{U} = (u_n)_{n \geqslant 1}$ such that $\ell_n \leqslant u_n \leqslant m_n$ for all n, $(\ell_n)_{n \geqslant 1}$ and $(m_n)_{n \geqslant 1}$ being two fixed sequences of real numbers. Probability on $\mathcal{Y}$ is the infinite product of uniform probabilities on $[\ell_n, m_n]$. Assume convergence of the series $\sum \ell_n^{-1}$. Then, with some technical condition, we have for almost all sequence $\mathcal{U}$ in $\mathcal{Y}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad D_N^*(t\mathcal{U}) = O(\sqrt{\operatorname{Log} m_N} \cdot N^{-1/2})$$

where $D_N^*(\mathcal{V})$ is the discrepancy of the sequence $\mathcal{V}$.

1. Introduction

1.1. Si $\mathcal{U} = (u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de nombres réels, on appelle discrépance de la suite $\mathcal{U}$ la suite $(D_N(\mathcal{U}))_{N>0}$ définie par:

$$D_N(\mathcal{U}) = \sup_{I \subset [0,1[} | \ell(I) - \frac{1}{N} \sum_{n \geqslant N} 1_I(\{u_n\}) |$$

borne supérieure portant sur tous les sous-intervalles $I = [x, y[$ de $[0, 1[$, de longueur $y - x = \ell(I)$, où 1_I désigne la fonction caractéristique de I.

1.2. On voit alors facilement que $\mathcal{U}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si sa discrépance tend vers 0 (voir par exemple KUIPERS and NIEDERREITER [7], p. 89).

Pour une suite à valeurs ‹choisies au hasard› entre 0 et 1, l'ordre de grandeur de la discrépance lorsque N tend vers l'infini est connu. CHUNG a montré dans [4] que si $[0, 1[^{\mathbb{N}^*} = \mathcal{X}$ est muni de l'équiprobabilité, on a presque surement, pour $\mathcal{U} \in \mathcal{X}$:

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{\sqrt{2N} D_N^*(\mathcal{U})}{\sqrt{\operatorname{Log} \operatorname{Log} N}} = 1$$

où $D_N^*(\mathscr{U})$, discrépance à l'origine de la suite $\mathscr{U}$, se définit de façon analogue à la discrépance, en ne considérant que les intervalles I de la forme $[0, y[$. On a alors immédiatement l'encadrement:

$$D_N^*(\mathscr{U}) \leqslant D_N(\mathscr{U}) \leqslant 2\, D_N^*(\mathscr{U})$$

1.3. Si maintenant on ne regarde plus une seule suite $\mathscr{U}$, mais l'ensemble de ses homothétiques $t\mathscr{U}$, t décrivant $\mathbb{R}$, on ne peut plus se restreindre à des valeurs entre 0 et 1 pour les u_n.

Nous ne considèrerons dans ce qui suit que des suites dont le terme général u_n tend vers $+\infty$ avec n. M. BOSHERNITZAN a démontré que, pour un ordre de croissance raisonnable de u_n avec n, il est presque sûr que $t\mathscr{U}$ est équirépartie module 1 pour tout t non nul (cf. [3]).

1.4. Dans le prolongement du travail cité ci-dessus, nous allons étudier l'ordre de grandeur presque sûr des discrépances $D_N(t\mathscr{U})$, t décrivant $\mathbb{R}^*$. Il s'agit donc en particulier de préciser l'espace (probabilisé) $\mathscr{Y}$ dans lequel se trouve la suite $\mathscr{U}$ considérée. Bien entendu, on ne pourra pas descendre en dessous de l'ordre de grandeur $\sqrt{\dfrac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} N}{2N}}$ obtenu par CHUNG, et l'espace $\mathscr{Y}$ ne pourra pas être plus étendu que ceux obtenus par BOSHERNITZAN.

2. Cadre du travail et résultats

2.1. En prenant des notations analogues à celles de [3], soient $(\ell_n)_{n\geqslant 1}$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels positifs, et $m_n = \ell_n + p_n$. L'espace probabilisé $\mathscr{Y}$ que l'on considère est construit de la façon suivante:

$$U_n = p_n + \Theta_n \ell_n$$

où la suite $(\Theta_n)_{n\geqslant 1}$ est un échantillon infini de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Cela revient à dire que $\mathscr{U}$ est un élément de l'ensemble produit $\prod_{n\geqslant 1} [p_n, m_n]$, muni de la probabilité produit direct des probabilités uniformes sur ces intervalles. Des hypothèses sur les suites $(\ell_n)_{n\geqslant 1}$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ seront faites ultérieurement.

2.2. Regarder modulo 1 la suite $t\mathscr{U}$ revient à regarder les valeurs des variables aléatoires réelles $\{t\,U_n\} = Y_n$, indépendantes car les Θ_n (et donc les U_n) le sont. Lorsque la longueur $t\ell_n$ de l'intervalle

$[tp_n, tm_n]$ et grande, la loi de Y_n est voisine, en un sens, de la loi uniforme sur l'intervalle [0, 1]. Nous verrons que, pour les résultats recherchés, il n'y a pas d'inconvénient à faire comme si Y_n avait une loi uniforme sur [0, 1].

2.3. Avec la remarque précédente, on est donc amené à regarder l'écart entre la fonction de répartition empirique d'un N-échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de la loi uniforme sur [0, 1] et la fonction de répartition de cette loi. On notera, pour x réel entre 0 et 1:

$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} 1_{]-\infty, x[}(X_n)$ fonction de répartition empirique du n-échantillon.

$F(x) = x$ fonction de répartition de la loi uniforme sur [0, 1]. Ces deux fonctions étant nulles pour $x < 0$ et égales à 1 pour $x > 1$.

$$d_N = \sup_{-\infty < x < +\infty} |N(F_N(x) - F(x))| = \sup_{0 < x < 1} |N(F_N(x) - F(x))|$$

2.4. Le théorème de GLIVENKO-CANTELLI (voir par exemple RENYI, [8]), qui exprime que d_N/N tend vers 0 presque sûrement, conduit à des résultats d'équirépartition modulo 1. La discrépance nécessite des reinsegnements plus précis sur d_N, résultats dus à KOLMOGOROV [6] et SMIRNOV: l'ordre de grandeur probable de d_N est en $N^{1/2}$, et plus exactement on a une loi limite:

$$\lim_{N \to \infty} \mathscr{P}(d_N \leqslant \lambda N^{1/2}) = \Phi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}$$

(λ fixé).

2.5. Le résultat de CHUNG provient d'une majoration de l'écart:

$$|\mathscr{P}(d_N \leqslant \lambda(N) N^{1/2}) - \Phi(\lambda(N))|$$

dans la zone critique $(\operatorname{Log} N)^{-1} \ll \lambda(N) \ll \operatorname{Log} N$, mais cette majoration (en $N^{-1/10}$ essentiellement) est trop faible pour le but recherché ici. C'est ce qui explique que la majoration obtenue pour la discrépance est un peu moins bonne que celle de CHUNG. A noter que, si λ est grand, $\Phi(\lambda)$ est très proche de 1.

2.6. Le premier résultat concerne donc l'évaluation de la probabilité $\mathscr{P}(d_N > \lambda N^{1/2})$, pour des λ assez grands.

Théorème 1. *Soient N et M deux entiers, $N \geqslant 2^M$, et $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ un N-échantillon de la loi uniforme sur* $[0,1]$. *Alors, avec les notations précédentes, on a pour a entier, $a \leqslant N$:*

$$\mathscr{P}\left(d_N > a\alpha_M + \frac{N}{2^M}\right) \leqslant 2^{M+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right)$$

où les α_m sont définis par la relation de récurrence:

$$\alpha_m = 1 \quad et \quad \alpha_{m+1} = \alpha_m + \sqrt{\frac{1}{2^m} + \frac{2a}{N}\alpha_m} \quad (m \geqslant 1)$$

Ce résultat peut se traduire, en choisissant convenablement a et M:

$$\mathscr{P}(d_N > 11\,\lambda N^{1/2}) \leqslant A\,N^{1/2}e^{-\lambda^2},\ \lambda \geqslant 1,$$

A constante absolue.

Majoration sans intérêt lorsque l'ordre de grandeur de λ est $\operatorname{Log}\operatorname{Log} N$, mais qui conduit au terme général d'une série convergente pour $\lambda = k\sqrt{\operatorname{Log} N}$, $k > k_1$ fixé, la convergence étant très rapide dès que $\lambda = N^{\alpha}$, $\alpha > 0$ fixé.

2.7. On considère les hypothèses suivantes:

(H 1) la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\ell_n}$ converge

(H 2) la série $\sum_{n \geqslant 1} m_n n^{1/2} e^{-\lambda_n^2}$ converge (avec $1 \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{1}{2} n^{1/2}$).

Théorème 2. *Avec les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *on a presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:*

$$D_N^*(t\mathscr{U}) = O(\lambda_N \cdot N^{-1/2})\ .$$

Corollaire. *Avec l'hypothèse* (H 1), *on a presque surement si* $\operatorname{Log} m_n \gg \operatorname{Log} n$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*,\ D_N^*(t\mathscr{U}) = O(\sqrt{\operatorname{Log} m_N} \cdot N^{-1/2})\ .$$

Démonstration. Ce résultat n'a d'intérêt que si $\sqrt{\operatorname{Log} m_N} = O(N^{1/2})$. D'après (H 1), la série $\sum \frac{1}{m_n}$ converge. On prend alors $\lambda_n = k\sqrt{\operatorname{Log} m_n}$, et comme m_n tend vers $+\infty$, on a:

$$n\,m_n e^{-\lambda_n^2} \ll m_n^{-1}$$

dès que k est suffisamment grand ($k > \sqrt{\ell + 2}$, avec $\ell = \overline{\lim} \dfrac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} m_n}$).

□

On n'atteint donc pas des discrépances en $\sqrt{\dfrac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} N}{2N}}$, puisque dans le meilleur des cas (m_n croît polynômialement avec n) on obtient une majoration en $\sqrt{(\operatorname{Log} N)/N}$. Lorsque m_n croît plus rapidement avec n, la majoration des $D_N^*(t\mathcal{U})$ devient plus faible. Cependant, la répartition modulo 1 des suites $t\mathcal{U}$ (i.e. $D_N^*(t\mathcal{U})$ tend vers 0) reste assurée tant que $\sqrt{\operatorname{Log} m_N} = o(\sqrt{N})$, c'est à dire:

$$\lim_{n \to \infty} m_n^{1/n} = 1 \ .$$

On retrouve ainsi le résultat de BOSHERNITZAN, avec:

même hypothèse sur les m_n;

une hypothèse (H 1) sur les ℓ_n un peu plus forte ($\lim \ell_n = + \infty$ suffisait).

3. Démonstration du résultat probabiliste

3.1. La méthode suivie ici consiste à approcher la loi uniforme sur [0, 1] par des lois discrètes, et de construire ces lois discrètes à partir d'une loi de type Bernoulli.

Soit F^1 la fonction de répartition de la loi $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ de Bernoulli, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ un N-échantillon de cette loi de fonction de répartition empirique F_N^1, définie par:

$$F_N^1(x) = \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} 1_{]-\infty, x[}(Z_n) = \frac{1}{N} \operatorname{card} \{n \leqslant N / Z_n < x\} \ .$$

On note:

$$d_N^1 = \sup_{-\infty < x < +\infty} | N(F_N^1(x) - F^1(x)) | \ .$$

Lemme. *Pour tout a entier, $a \leqslant \dfrac{N}{2}$, on a:*

$$\mathcal{P}(d_N^1 > a) \leqslant 2 \exp\left(-2 \frac{a^2}{N}\right) .$$

On peut en fait avoir des estimations plus précises, dans la zone critique $a = \lambda(N) N^{1/2}$, $\lambda(N)$ voisin d'une fonction constante (cf. [4],

lemme 3). Le résultat annoncé ici est simple, voire connu en théorie des probabilités (on trouve une formule explicite pour $\mathscr{P}(d_N^1 > a)$ de façon élémentaire, voir par exemple [2]). La démonstration en est donnée ici, pour plus de clarté.

Démonstration. Il est évident que seule la valeur $x = 1$ joue un rôle pour la valeur de d_N^1, et on a donc:

$$d_N^1 = N \mid F_N^1(1) - F^1(1) \mid = N \mid F_N^1(1) - \tfrac{1}{2} \mid .$$

D'autre part, $F_N^1(1)$ peut prendre uniquement les valeurs $\dfrac{k}{N}$, $0 \leqslant k \leqslant N$, et on *a*:

$$\mathscr{P}\left(F_N^1(1) = \frac{k}{N}\right) = \mathscr{P}(\text{card}\,\{n \leqslant N / Z_n = 0\} = k) =$$

$$= 2^{-N} C_N^k .$$

D'où l'égalité:

$$\mathscr{P}(d_N^1 > a) = 2\,\mathscr{P}\left(F_N^1(1) > \tfrac{1}{2} + \frac{a}{N}\right) = 2 \sum_{k > \frac{N}{2} + a} 2^{-N} C_N^k .$$

On utilise alors la majoration ([1], Lemma 4.7.2 p. 114):

$$\sum_{k = \theta N}^{N} C_N^k \leqslant e^{-rN\theta}(1 + e^r)^N \quad (r > 0 \text{ quelconque, formule (4.7.6))} .$$

La meilleure majoration est alors obtenu pour $e^r = \dfrac{\theta}{1 - \theta}$, d'où:

$$\sum_{k = \theta N}^{N} C_N^k \leqslant e^{N \cdot H(\theta)} \quad \text{avec} \quad H(x) = -x \operatorname{Log} x - (1 - x) \cdot \operatorname{Log}(1 - x),$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 .$$

Ici, $\theta = \frac{1}{2} + \dfrac{a}{N}$. La majoration $H(x) \leqslant \operatorname{Log} 2 - 2(x - \frac{1}{2})^2$ pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ entraine donc:

$$\sum_{k > \frac{N}{2} + a} C_N^k \leqslant 2^N \exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right)$$

d'où le lemme. □

3.2. Soit maintenant F^2 la fonction de répartition de la loi $2^{-m}\sum_{j=0}^{2^m-1}\delta_{j2^{-m}}$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ un N-échantillon de cette loi, de fonction de répartition empirique F_N^2, et soit:

$$d_N^2 = \sup_{-\infty < x < +\infty} |N(F_N^2(x) - F^2(x))| .$$

Lemme. *Soit* $(\alpha_m)_{m\geqslant 1}$ *la suite définie par* $\alpha_1 = 1$ *et* $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \sqrt{\frac{1}{2^m} + \frac{2a\alpha_m}{N}}$. *Alors* $\mathscr{P}(d_N^2 > a\alpha_m) \leqslant 2^{m+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right)$.

Démonstration. On considère l'écriture binaire de Y_n, soit $Y_n = \sum_{j=1}^{m} 2^{-j} X_{n,j}$, ce qui compte tenu de l'indépendance des Y_n et de leur loi, permet de construire nM variables aléatoires réelles $X_{n,j}$ indépendantes et de même loi de Bernoulli $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$. La démonstration peut se faire par récurrence sur m (si $m = 1$, on retrouve le lemme 1, et donc ce résultat est immédiat en remplaçant les X_n par $\frac{1}{2}X_n$). Supposons le résultat vrai pour m, et soit $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_N$ un N-échantillon correspondant à la loi correspondant à $m+1$. Posons:

$$\tilde{Y}_n = Y_n + 2^{-(m+1)} X_{n,m+1}$$

décomposition binaire de $\tilde{Y}_n$.

L'hypothèse de récurrence peut s'appliquer au N-échantillon $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$, et si on note pour simplifier $X_n = X_{n,m+1}$, $X_1, X_2, \ldots, X_N$ est un N-échantillon de la loi $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ indépendant du précédent. On suppose l'évènement $\mathscr{A} = \mathscr{A}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ réalisé:

$$\forall n \leqslant N,\ Y_n = y_n \quad (y_n \text{ fixé})$$

et tel que $d_N^2 \leqslant a\alpha_m$ pour $\omega \in \mathscr{A}$.

Si y est une valeur possible (avec probabilité non nulle) pour les variables Y_n, on pose $N_y = \text{card}\{n \leqslant N \mid y_n = y\}$. On a alors:

$$\left|N_y - \frac{N}{2^m}\right| \leqslant 2d_N^2 \leqslant 2a\alpha_m \quad (\text{car } \omega \in \mathscr{A}) .$$

Si on considère le N_y-échantillon $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_{N_y}}$ de la loi de Bernoulli qui correspond aux indices i tels que $y_i = y$, on peut appliquer le lemme 3.1, et donc en utilisant l'indépendance des X et des Y:

$$\mathscr{P}(d_{N_y}^2 > a_y/\mathscr{A}) = \mathscr{P}(d_{N_y}^2 > a_y) \leqslant 2\exp\left(-2\frac{a_y^2}{N_y}\right)$$

donc en prenant $a_y = a\sqrt{\frac{N_y}{N}}$, on a:

$$\mathscr{P}(d_{N_y}^2 > a_y/\mathscr{A}) \leqslant 2\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right)$$

et donc, en considérant les 2^m valeurs de y possibles, et en posant $a' = \max a_y$, on obtient:

$$\mathscr{P}(\tilde{d}_N^2 > a' + \alpha_m a/\mathscr{A}) \leqslant 2^{m+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right)$$

et donc on obtient, puisque $a' \leqslant a\sqrt{\frac{1}{2^m} + \frac{2a\alpha_m}{N}} = a(\alpha_{m+1} - \alpha_m)$ d'après l'encadrement obtenu pour les N_y:

$$\mathscr{P}(\tilde{d}_N^2 > a\alpha_{m+1}/\mathscr{A}) \leqslant 2^{m+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right).$$

Soit $\mathscr{B}$ la réunion de tous les évènements de la forme $\mathscr{A}$, les y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, prenant toutes les valeurs possibles avec $d_N^2 \leqslant a\alpha_m$.

L'hypothèse de récurrence s'écrit donc:

$$\mathscr{P}(\bar{\mathscr{B}}) = \mathscr{P}(d_N^2 > a\alpha_m) \leqslant 2^{m+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right).$$

Alors:

$$\mathscr{P}(\tilde{d}_N^2 > a\alpha_{m+1}) \leqslant \mathscr{P}(\bar{\mathscr{B}}) + \mathscr{P}(\mathscr{B})\cdot 2^{m+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+2}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right). \quad \square$$

3.3. Soit maintenant $X_1, X_2, \ldots, X_N$ un N-échantillon de la loi uniforme sur l'intervalle [0, 1], et reprenons les notations introduites en 2.3.

Lemme. *Soient a, m et* $(\alpha_m)_{m \geqslant 1}$ *comme aux lemmes* 3.1 *et* 3.2. *Alors* Log

$$\mathscr{P}\left(d_N > a\alpha_m + \frac{N}{2^m}\right) \leqslant 2^{m+1}\exp\left(-2\frac{a^2}{N}\right).$$

Démonstration. Pour $m \geqslant 1$, et $1 \leqslant i \leqslant N$, soit $Y_i = 2^{-m}[2^m X_i]$. On obtient ainsi un N-échantillon de la loi étudiée en 3.2. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, et si $y = 2^{-m}[2^m x]$, on a de façon évidente la double inclusion d'évènements:

$$\{Y_i < y\} \subset \{X_i < x\} \subset \{Y_i < y + 2^{-m}\}$$

ce qui se traduit:

$$NF_N^2(y) \leqslant NF_N(x) \leqslant NF_N^2(y + 2^{-m})$$

$$N(F_N^2(y) - y) - 2^{-m}N \leqslant N(F_N(x) - x) \leqslant$$

$$\leqslant N(F_N^2(y + 2^{-m}) - (y + 2^{-m})) + 2^m N$$

et donc $d_N \leqslant d_N^2 + 2^{-m}N$.

En utilisant le lemme 3.2, le lemme est donc immédiat. □

3.4. Il reste donc à optimiser les choix de a et m, et à évaluer α_m.

Lemme. *Soit* $(\beta_m)_{m \geqslant 1}$ *la suite définie par récurrence de la façon suivante:*

$$\beta_1 = 1 \quad et \quad \beta_{m+1} = \beta_m + \sqrt{2^{-m} + 2\varepsilon\beta_m} \quad (m \geqslant 1)$$

avec $\varepsilon > 0$ *fixé. On pose* $S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} = 3{,}41421\ldots$,

$C > S$ *et* $K \leqslant \frac{C}{S^2} - \frac{1}{C}$. *Alors* $\beta_m \leqslant C$ *pour* $m \leqslant m_0 = \left[\mathrm{Log}\frac{K}{2\varepsilon} \Big/ \mathrm{Log}\,2\right]$.

Démonstration. Pour $m = 1$, la majoration est vraie car $\beta_1 = 1 < S < C$. Si on suppose la majoration vraie pour tout $m' \leqslant m$, et si $m + 1 \leqslant m_0$, on a:

$$\beta_{m'+1} \leqslant \beta_{m'} + \sqrt{2^{-m'}} \cdot \sqrt{1 + CK}$$

pour tout $m' \leqslant m$, puisque l'on a alors $2\varepsilon \leqslant K2^{-m} \leqslant K2^{-m'}$. En sommant toutes ces inégalités, on obtient:

$$\beta_{m+1} \leqslant \sqrt{1 + CK} \sum_{m'=0}^{m} 2^{-m'/2} \leqslant S\sqrt{1 + KC} \leqslant C\,.$$

D'où le lemme. □

On pose alors:

$$a = \lambda\sqrt{N}, \quad m = \left[\frac{\operatorname{Log}\frac{\sqrt{N}}{2\lambda}}{\operatorname{Log} 2}\right]$$

d'où (Lemme avec $\varepsilon = \frac{a}{N} = \frac{\lambda}{\sqrt{N}}$, $K = 1$, $C = 13$),

$$\alpha_m \leqslant 13, \frac{N}{2^m} \leqslant 4\lambda\sqrt{N},$$

et:

$$\mathscr{P}(d_N > 17\lambda\sqrt{N}) \leqslant \frac{\sqrt{N}}{\lambda} e^{-2\lambda^2}$$

(un meilleur choix de K et C, correspondant à $C = 8{,}23\ldots$, permet de remplacer 17 par 15,03...). Ce sont donc les résultats annoncés, moins bons que ceux de CHUNG dans le domaine $\lambda \leqslant k_0\sqrt{\operatorname{Log} N}$ où $k_0 = 17\sqrt{\frac{3}{10}} = 9{,}31\ldots$.

La constante 11 annoncée provient alors simplement de $\frac{15{,}03}{\sqrt{2}} = 10{,}6\ldots < 11$.

4. Résultat sur les discrépances: préliminaires

4.1. Reprenons les notations des 2.1 et 2.2:

$$U_n = p_n + \Theta_n \ell_n \quad \text{et} \quad Y_n = \{t\,U_n\}\ .$$

Pour t fixé ($t > 0$), on définit les variables aléatoires réelles $W_n = W_{n,t}$ et $X_n = X_{n,t}$ de la façon suivante: en notant $a = a_{n,t} = 1 + [t\,p_n]$ et $b = b_{n,t} = [t\,m_n]$:

$$W_n = \begin{cases} \dfrac{a - t\,U_n}{a - t\,p_n} & \text{si} \quad t\,p_n \leqslant t\,U_n < a \\ t\,U_n & \text{si} \quad a \leqslant t\,U_n \leqslant b \\ \dfrac{t\,U_n - b}{t\,m_n - b} & \text{si} \quad b < t\,U_n \leqslant t\,m_n\ . \end{cases} \qquad \text{et} \quad X_n = \{W_n\}.$$

Cela revient à régulariser la loi de $t\,U_n$, puisqu'à une petite erreur près, $a \leqslant t\,U_n \leqslant b$ est réalisé. Plus exactement, on obtient:

Lemme. *Pour $t > 0$ fixé, les X_n, $n \geqslant 1$, forment un échantillon infini de la loi uniforme sur $[0,1]$, tel que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, on ait:*

$$\mathscr{P}(\forall\, t \in [\alpha, \beta],\ X_{n,t} = \{t\, U_n\}) \geqslant 1 - \frac{2}{\alpha\, \ell_n}\,.$$

Démonstration. Comme X_n ne dépend que de Θ_n, il est immédiat qu'elles forment une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.

$t\, U_n$ a une loi uniforme sur l'intervalle $[t\, p_n, t\, m_n]$. On en déduit les deux résultats suivants:

W_n suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, et donc X_n suit une loi uniforme sur $[0,1]$;

$$\mathscr{P}(\forall\, t \in [\alpha, \beta],\ W_{n,t} = t\, U_n) \geqslant \mathscr{P}\left(\forall\, t \in [\alpha, \beta],\ p_n + \frac{1}{t} \leqslant U_n \leqslant m_n - \frac{1}{t}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathscr{P}\left(p_n + \frac{1}{\alpha} \leqslant U_n \leqslant m_n - \frac{1}{\alpha}\right) \geqslant 1 - \frac{2}{\alpha\, \ell_n}\,. \quad \square$$

4.2. Lorsque t et t' sont suffisamment voisins, les discrépances au rang N des suites $t\,\mathscr{U}$ et $t'\,\mathscr{U}$ sont voisines.

Lemme. *Soient $\mathscr{V} = (v_n)_{n \geqslant 1}$ et $\mathscr{V}' = (v'_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites de nombres réels, et pour $N \geqslant 1$, soit $\varepsilon_N = \max\limits_{n \leqslant N} |\, v_n - v'_n\,|$. Alors on a:*

$$D_N^*(\mathscr{V}') \leqslant 2\,(D_N^*(\mathscr{V}) + \varepsilon_N)\,.$$

Démonstration (classique en répartition modulo 1). Si I est un sous-intervalle de $[0,1[$, on considère l'écart:

$$E_N(\mathscr{U}, I) = \sum_{n \leqslant N} 1_I(\{u_n\}) - N \cdot \ell(I)\,.$$

Alors I et son complémentaire ont même écart en valeur absolue, et donc $D_N^*(\mathscr{U}) \cdot N$ est le maximum des $|\, E_N(\mathscr{U}, I)\,|$ lorsque I commence en 0 ou finit en 1. Soient I^- et I^+ les parties de $[0,1[$ définies par:

$$y \in I^- \Leftrightarrow d(y, \bar{I}) \geqslant \varepsilon_n$$

$$y \in I^+ \Leftrightarrow d(y, I) \leqslant \varepsilon_n$$

où $\bar{I}$ est le complémentaire de I et $d(\,,\,)$ désigne la distance prise modulo 1. Si maintenant $I = [0, x[$, on a:

I^- intervalle (ou vide)

I^+ réunion d'un ou deux intervalles touchant 0 ou 1.

$$|x - \ell(I^-)| \leqslant 2\varepsilon_N \quad \text{et} \quad |x - \ell(I^+)| \leqslant 2\varepsilon_N.$$

Le résultat s'en déduit facilement, puisque l'on a:

$$v'_n \in I \Rightarrow v_n \in I^+$$

$$v_n \in I^- \Rightarrow v'_n \in I \qquad \square$$

Pour $N \geqslant 1$, soit $\mathscr{T}_N = \mathscr{T}_N(\alpha, \beta)$ l'ensemble:

$$\mathscr{T}_N = \left\{ \alpha + k \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{N} m_N},\ 0 \leqslant k \leqslant [\sqrt{N} \cdot m_N] \right\}.$$

Pour tout $t' \in [\alpha, \beta]$, il existe $t \in \mathscr{T}_N$ tel que $|t - t'| \leqslant \frac{1}{2} \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{N} m_N}$, et donc

$$D_N^*(t' \mathscr{U}) \leqslant 2 D_N^*(t \mathscr{U}) + \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{N}}$$

puisque l'on a toujours, pour $n \leqslant N$, $|t u_n - t' u_n| \leqslant \dfrac{\beta - \alpha}{2\sqrt{N}}$.

4.3. Pour $t > 0$ soit $d_N = d_{N,t}$ la quantité définie en 2.3 et associée au N-échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_N$ construit en 4.1:

$$d_{N,t} = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \sum_{n \leqslant N} 1_{[0,x[}(X_{n,t}) - Nx \right|.$$

En utilisant le théorème 1, on obtient pour un intervalle $[\alpha, \beta]$ fixé, $0 < \alpha < \beta$:

$$\mathscr{P}(\exists t \in \mathscr{T}_N, d_{N,t} > 11 \lambda \sqrt{N}) < A N m_N e^{-\lambda^2}.$$

5. Fin de la démonstration

5.1. Soient $0 < \alpha < \beta$ et $0 < \varepsilon$. Si pour tout $\alpha, \beta, \varepsilon$ vérifiant ces conditions, on a $\mathscr{P}\left(\exists t \in [\alpha, \beta], \overline{\lim} \dfrac{\sqrt{N} D_N^*(t \mathscr{U})}{\lambda_N} = \infty\right) \leqslant \varepsilon$, alors le théorème 2 est démontré: en effet, cette probabilité est donc nulle, et en considérant $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, n\right]$, on obtient $\mathscr{P}\left(\exists t > 0, \overline{\lim} \dfrac{\sqrt{N} D_N^*(t \mathscr{U})}{\lambda_N} = \infty\right) = 0$. Les t négatifs ne posent alors aucun problème. Dans ce qui suit, α, β et ε sont fixés quelconques, vérifiant les conditions précédentes.

5.2. Il existe donc N_0 tel que $\sum_{n>N_0} \frac{1}{\ell_n} < \frac{\alpha\varepsilon}{2}$, d'après l'hypothèse (H 1). Soit alors $\mathscr{C}$ l'évènement:

$$\mathscr{C} = \bigcap_{n>N_0} \left(p_n + \frac{1}{\alpha} \leqslant U_n \leqslant m_n - \frac{1}{\alpha} \right).$$

On a donc:

$$\mathscr{P}(\bar{\mathscr{C}}) \leqslant \sum_{n>N_0} \frac{2}{\alpha \ell_n} < \varepsilon .$$

Dans la suite, on notera $\mathscr{P}^*(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathscr{A} \cap \mathscr{C})$ pour tout évènement $\mathscr{A}$. En particulier, $\mathscr{P}(\mathscr{A}) < \varepsilon$ est une conséquence de $\mathscr{P}^*(\mathscr{A}) = 0$.

5.3. Si $\mathscr{T}$ est réalisé, on a $X_{n,t} = \{t\, U_n\}$ pour tout $n > N_0$ et $t \in [\alpha, \beta]$. On a donc:

$$| d_{N,t} - N \cdot D_N^*(t\mathscr{U}) | \leqslant N_0 .$$

En utilisant 4.3 et le lemme 4.2, on obtient:

$$\mathscr{P}^*(\exists\, t \in \mathscr{T}_N,\ N D_N^*(t\mathscr{U}) > 11\,\lambda\sqrt{N} + N_0) \leqslant A\, N m_N e^{-\lambda^2}$$

$$\mathscr{P}^*(\exists\, t' \in [\alpha,\beta],\ N D_N^*(t'\mathscr{U}) > (22\lambda + \beta - \alpha)\sqrt{N} + 2N_0) \leqslant A N m_N e^{-\lambda^2} .$$

Le lemme de BOREL—CANTELLI peut s'appliquer à $\mathscr{P}^*$, puisque $\overline{\lim}\,(\mathscr{A}_n \cap \mathscr{C}) = (\overline{\lim}\,\mathscr{A}_n) \cap \mathscr{C}$. Si $\lambda = \lambda_N$ varie avec N, avec $\lambda \leqslant \frac{\sqrt{N}}{2}$, et si (H 2) est vérifiée, on obtient donc:

$$\mathscr{P}^*\left(\exists\, t' \in [\alpha, \beta],\ \overline{\lim} \frac{\sqrt{N}\, D_N^*(t'\mathscr{U})}{\lambda_N} > 22 \right) = 0$$

et donc le résultat cherché.

5.4. Il n'y a bien sûr pas indépendance entre les évènements

$$\mathscr{A}_N = \{\exists\, t' \in [\alpha, \beta],\ N D_N^*(t'\mathscr{U}) > (22\,\lambda + \beta - \alpha)\sqrt{N} + 2\,N_0\}$$

et un argument classique d'accélération de convergence (voir par exemple FELLER, [5] p. 394) entraine que, si $\lambda = \lambda_N$ est assez régulière et croît peu rapidement (condition du type $\lambda_{[\varrho N]} \sim \lambda_N$ avec $\varrho > 1$):

$$\mathscr{P}^*\Big(\bigcup_{\varrho^{M-1} \leqslant n < \varrho^M} \mathscr{A}_n \Big) \leqslant A_\varrho\, \varrho^M m_\mu e^{-\lambda_\mu^2} \quad \text{où} \quad \mu = [\varrho^M]$$

avec $\varrho > 1$ fixé, et A_ϱ constante absolue. On peut alors remplacer (H 2) par l'hypothèse que la série dont le terme général (en M) est le

membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge. Le gain ainsi obtenu est cependant assez faible.

6. Quelques remarques

6.1. On ne peut, avec la méthode employée ici, espérer une estimation presque sûre des discrépances $D_N(t\mathscr{U})$, au lieu d'une majoration.

6.2. Certaines simplifications ont été effectuées, compte tenu du résultat cherché. Par exemple, dans l'hypothèse (H 2), on pouvait considérer la série de terme général:

$$\frac{m_n n^{1/2}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2}$$

ce qui ne changeait rien en fait au théorème 2. De même, les valeurs numériques qui interviennent dans ce travail, par exemple la constante 22 au paragraphe 5.3, ne sont pas optimales: le résultat cherché ne nécessite pas en effet une estimation précise de ces valeurs.

6.3. Il semble raisonnable de remplacer la condition (H 1) par l'hypothèse faite par BOSHERNITZAN, soit $\lim \ell_n = +\infty$, ce que je ne sais pas faire actuellement.

Addendum

L'estimation de $\mathscr{P}(d_N \leqslant \lambda(N) \cdot N^{1/2}) - \Phi(\lambda(N))$ citée en 2.5 a été très améliorée par V. S. KOROLJUK (В. С. Королюк, Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, Докл. Акад. Наук СССР 95 (1954) p. 443—446), qui en obtient un début de développement asymptotique en $\lambda(N)$, dans la zone $\lambda(N) \ll N^{1/6}$. Ce résultat peut être utilisé pour obtenir des majorations comparables à celle déduite du théorème 1.

Je tiens à remercier ici le referee de ce travail, pour m'avoir signalé l'existence de cet article.

Bibliographie

[1] ASH, R.: Information Theory. New York: Interscience Publ. 1965.

[2] BACHELIER L.: Calcul des Probabilités. Vol. 1. Paris: Gauthier-Villars. 1912.

[3] BOSHERNITZAN, M.: Homogeneously distributed sequences and Poincaré sequences of integers of sublacunary growth. Mh. Math. **96**, 173—181 (1983).

[4] CHUNG, K. L.: An estimate concerning the Kolmogorov limit distribution. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 598—600 (1949).

[5] FELLER, W.: The general form of the so-called law of the iterated logarithm. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 373—402 (1943).

[6] KOLMOGOROV, A.: Sulla determinazione empirica di une legge di distribuzione. Gir. del. Instit. Italiano Atuari **4**, 83—91 (1933).

[7] KUIPERS—NIEDERREITER: Uniform Distribution of Sequences. New York: Wiley Interscience. 1974.

[8] RENYI, A.: Calcul des Probabilités. Paris: Dunod. 1966.

J. P. BOREL
Département de Mathématiques
U.E.R. de Limoges
123 av. A. Thomas
F-87060 Limoges, France

Printed in Austria