Werk

Titel: Erweiterungen topologischer Räume.

Autor: Wilke, Gerhard

Jahr: 1985

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0100|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mh. Math. 100, 239–251 (1985)

Monatshefte für
Mathematik
© by Springer-Verlag 1985

Erweiterungen topologischer Räume

Von

Gerhard Wilke, Hannover

(Eingegangen am 27. Dezember 1984; in modifizierter Fassung 6. Mai 1985)

Abstract. Extensions of Topological Spaces. An extension principle for T_0-spaces is given which includes several well-known compactifications. Moreover, it is shown that the compact T_2-spaces are exactly the T_1-retracts of Stone spaces. All these results are derived from some general facts on semirings stated in the first part of the paper.

Ist X ein Tychonoffraum und R ein Ring stetiger, reellwertiger Abbildungen auf X, so liefert die Menge der maximalen Ideale von R, versehen mit der Hülle—Kern Topologie, unter bestimmten Voraussetzungen eine Kompaktifizierung von X. Bei den Wallman-Typ Kompaktifizierungen für T_1-Räume X kann formal ganz ähnlich verfahren werden (siehe [12; IV 2.4]). Man muß jetzt nur die maximalen (Verbands-)Ideale einer geeigneten Ringbasis nehmen. Wir zeigen im folgenden, daß sich diese beiden Kompaktifizierungsmethoden vereinheitlichen lassen. Dazu beschäftigen wir uns vorab ausführlich mit gewissen Halbringen. Von entscheidender Bedeutung sind hier die sogenannten pm-Halbringe. Sie werden in Satz 1 charakterisiert. Anschließend diskutieren wir verschiedene Primidealräume von Halbringen. Einige diesbezügliche Resultate wurden in der Literatur speziell für Ringe und Verbände bereits formuliert. Dennoch verzichten wir nicht auf Beweise, da wir mit Hilfe von Satz 1 häufig ökonomischer argumentieren können. Danach wenden wir uns dem eigentlichen Anliegen dieser Arbeit, den Erweiterungen topologischer Räume, zu. Wir geben ein sehr einfaches und allgemeines Erweiterungsprinzip für T_0-Räume an, das neben den oben erwähnten Kompaktifizierungen noch andere Erweiterungen als Sonderfälle mit enthält. Außerdem wird sich u. a. herausstellen, daß die beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit festem Definitionsbereich D grundsätzlich pm-Ringe bilden und sie stets eine Stone—Čech Kompaktifizierung von D induzieren. Zum Schluß kennzeichnen wir die kompakten Hausdorffräume als T_1-Retrakte der Stoneräume und analog auch die T_2-Kompaktifizierungen.

Das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet den Körper der reellen Zahlen. Mit X ist während der gesamten Arbeit ein T_0-Raum gemeint, der keinen weiteren Einschränkungen unterliegt, sofern ihm nicht ausdrücklich irgendwelche Eigenschaften zugeschrieben werden. Eine Basis für die abgeschlossenen (offenen) Mengen eines topologischen Raumes wird kurz *abgeschlossene* (*offene*) *Basis* genannt.

***pm*-Halbringe.** Unter einem *Halbring* verstehen wir hier eine Algebra $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$, die den nachstehenden Bedingungen genügt:

(H 1) $(R, +, 0)$ und $(R, \cdot, 1)$ sind kommutative Monoide.

(H 2) Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a(b + c) = ab + ac$.

(H 3) $0a = 0$ für alle $a \in R$.

Gemäß unserer Definition sind beschränkte, distributive Verbände und kommutative Ringe mit Einselement ausnahmslos Halbringe. Sei nun R ein Halbring. Eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq R$ mit $I + I \subseteq I$ und $I \cdot R \subseteq I$ ist ein *Ideal* von R. Da der Schnitt beliebig vieler Ideale von R wieder ein Ideal ist, existiert zu jeder Teilmenge $A \subseteq R$ das kleinste, A umfassende Ideal $\langle A \rangle$; offenbar gilt $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1 R + \ldots + a_n R$ für alle endlichen Teilmengen $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq R$. (Wir schreiben $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ statt $\langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle$. Bei der Notation $\langle A \rangle$ bedarf es keiner Kennzeichnung, welcher Halbring zugrunde liegt, weil das aus dem Kontext stets ersichtlich sein wird.) Insbesondere bilden die Ideale von R einen vollständigen Verband $\mathfrak{I}(R)$. Das Supremum zweier Ideale $I, J \in \mathfrak{I}(R)$ wird mit $I \vee J$ bezeichnet. *Primideale* und *maximale Ideale* sind wie üblich definiert. Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten, und alle maximalen Ideale sind prim. Ist I ein Ideal von R und $H \subseteq R$ sowohl *multiplikativ abgeschlossen* (das bedeutet $H \neq \emptyset$ und $H \cdot H \subseteq H$) als auch disjunkt zu I, dann existiert ein Primideal P von R mit $I \subseteq P$ und $P \cap H = \emptyset$. (Diese Aussage ergibt sich sofort mit dem Zornschen Lemma.) Es seien $\mathfrak{P}(R)$ (bzw. $\mathfrak{M}(R)$) die Mengen aller Primideale (bzw. maximalen Ideale) von R. Wir sprechen von dem *pm-Halbring* R, wenn jedes Primideal von R in genau einem maximalen Ideal enthalten ist. Für Verbände und Ringe gebrauchen wir die Begriffe *pm-Verband*, *pm-Ring* entsprechend.

Satz 1. *Ist R ein Halbring, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *R ist ein pm-Halbring.*

(ii) *Ist $a_1 + a_2 = 1$, dann gibt es Elemente $x_1, x_2 \in R$ mit $\langle a_1, x_1\rangle = \langle a_2, x_2\rangle = R$ und $x_1 x_2 = 0$.*

(iii) *Ist $a_1 + \ldots + a_n = 1$, dann existieren Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R$ mit $\langle a_i, x_i\rangle = R$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$.*

(iv) *Falls $I_1 \vee \ldots \vee I_n = R$ $(I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{I}(R))$ ist, so gibt es Ideale $J_1, \ldots, J_n$ von R mit $I_i \vee J_i = R$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $J_1 \cap \ldots \cap J_n = \{0\}$.*

(v) *Falls $I_1 \vee I_2 = R$ $(I_1, I_2 \in \mathfrak{I}(R))$ ist, dann existieren Ideale J_1, J_2 von R mit $I_1 \vee J_1 = I_2 \vee J_2 = R$ und $J_1 \cap J_2 = \{0\}$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Es sei $a_1 + a_2 = 1$. Wir setzen $H_i := \{x \in R \mid \langle a_i, x\rangle = R\}$ $(i = 1, 2)$, $H := H_1 \cdot H_2$ und haben $0 \in H$ zu zeigen. Jede Menge H_i ist multiplikativ abgeschlossen und damit ebenso H. Aus der Annahme $0 \notin H$ können wir deshalb die Existenz eines Primideals $P \subseteq R$ ableiten, das H nicht trifft. Nun impliziert $P \cap H = \emptyset$ natürlich $P \cap H_i = \emptyset$. Folglich sind die Ideale $\langle P \cup \{a_i\}\rangle$ echt und daher jeweils in einem maximalen Ideal M_i enthalten. Wegen $a_i \in M_i$ und $a_1 + a_2 = 1$ ist $M_1 \neq M_2$, aber beide — M_1 wie M_2 — umfassen P.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Wir zeigen (iii) durch Induktion. Die Fälle $n = 1, 2$ sind offensichtlich. Sei nun $n \geqslant 2$ und $a_1 + \ldots + a_{n+1} = 1$. Zu a_1 und $a_2 + \ldots + a_{n+1}$ existieren Elemente $x_1, x_2 \in R$ mit $\langle a_1, x_1\rangle = \langle a_2 + \ldots + a_{n+1}, x_2\rangle = R$ und $x_1 x_2 = 0$. Das Einselement läßt sich als Linearkombination von $a_2 + \ldots + a_{n+1}$ und x_2 darstellen, etwa $1 = r(a_2 + \ldots + a_{n+1}) + s x_2$. Wir wenden jetzt die Induktionsvoraussetzung auf $r a_2 + s x_2$, $r a_3, \ldots, r a_{n+1}$ an und erhalten Elemente $y_2, \ldots, y_{n+1} \in R$ mit $\langle r a_2 + s x_2, y_2\rangle = \langle a_3, y_3\rangle = \ldots = \langle a_{n+1}, y_{n+1}\rangle = R$ und $y_2 y_3 \ldots y_{n+1} = 0$. Aus $\langle r a_2 + s x_2, y_2\rangle = R$ folgt offenbar $\langle a_2, t x_2 + u y_2\rangle = R$ für gewisse Elemente $t, u \in R$, und es ist $x_1 (t x_2 + u y_2) y_3 \ldots y_{n+1} = 0$. Damit haben wir (iii) bewiesen.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Seien $I_1, \ldots, I_n \in \mathfrak{I}(R)$ Ideale mit R als Supremum und $a_i \in I_i$ Elemente, deren Summe $a_1 + \ldots + a_n = 1$ ist. Nach Voraussetzung existieren $x_i \in R$ mit $\langle a_i, x_i\rangle = R$ und $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$. Mittels einer erneuten Anwendung von (iii) gewinnen wir Elemente $y_i, z_i \in R$ derart, daß $\langle a_i, y_i\rangle = \langle x_i, z_i\rangle = R$ und $y_i z_i = 0$ ist. Wir definieren $J_i := \langle y_i\rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$. Aus $\langle a_i, y_i\rangle = R$ resultiert $I_i \vee J_i = R$. Also bleibt nur noch $J_1 \cap \ldots \cap J_n = \{0\}$ zu zeigen. Wegen $1 \in \langle x_i, z_i\rangle$ besitzt jedes $u \in J_1 \cap \ldots \cap J_n$ Darstellungen $u = r_i x_i u + t_i z_i u =$

$= s_i y_i$. Es ist dann $z_i u = s_i y_i z_i = 0$, $u = r_i x_i u$, und sukzessives Einsetzen liefert nun $u = r_1 x_1 u = \ldots = r_1 r_2 \ldots r_n x_1 x_2 \ldots x_n u = 0$, weil $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ ist.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Dies ist klar.

(v) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, ein Primideal P ist in zwei verschiedenen, maximalen Idealen $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(R)$ enthalten. Da $M_1 \vee M_2 = R$ ist, findet man nach (v) Ideale J_1, J_2 mit $M_1 \vee J_1 = M_2 \vee J_2 = R$ und $J_1 \cap J_2 = \{0\}$. Wir wählen Elemente $a_i \in M_i$, $b_i \in J_i$, so daß $a_i + b_i = 1$ ist. Aus $b_1 b_2 \in J_1 \cap J_2$ folgt $b_1 b_2 = 0$, $b_1 b_2 \in P$. Also gehört mindestens ein Faktor b_k zu P, was $b_k \in M_k$, $1 = a_k + b_k \in M_k$, $M_k = R$ nach sich zieht, im Widerspruch zu $M_k \neq R$. $\square$

Es sei R ein Halbring. Eine nichtleere Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *Primhalbideal* von R, wenn $R \cdot S \subseteq S$ gilt, $R \neq S$ ist und $ab \in S$ $(a, b \in R)$ stets $a \in S$ oder $b \in S$ impliziert. Wir bezeichnen die Menge aller Primhalbideale von R mit $\mathfrak{S}(R)$ und machen $\mathfrak{S}(R)$ zu einem T_0-Raum, indem wir das System der Mengen $\hat{a} := \{S \in \mathfrak{S}(R) \mid a \in S\}$ $(a \in R)$ als abgeschlossene Basis einer Topologie nehmen. Dies ist genau die Hülle—Kern Topologie, $\bar{\Delta} = \{S \in \mathfrak{S}(R) \mid \bigcap \Delta \subseteq S\}$ also der topologische Abschluß von $\Delta \subseteq \mathfrak{S}(R)$. Die Mengen $\mathfrak{M}(R)$, $\mathfrak{P}(R)$ und $\mathfrak{S}^*(R) := \{S \in \mathfrak{S}(R) \mid \langle S \rangle \neq R\}$ — jeweils mit der Spurtopologie bezüglich $\mathfrak{S}(R)$ versehen — tragen somit auch eine T_0-Topologie. Ist später von den Räumen $\mathfrak{S}(R)$, $\mathfrak{S}^*(R)$, $\mathfrak{P}(R)$ oder $\mathfrak{M}(R)$ die Rede, so sind ohne Ausnahme diese Topologien gemeint.

Lemma 2. *Seien R ein Halbring und $\mathfrak{E}(R)$ ein Unterraum von $\mathfrak{S}(R)$ mit $\mathfrak{M}(R) \subseteq \mathfrak{E}(R) \subseteq \mathfrak{S}^*(R)$. Dann gilt:*

(i) *$\mathfrak{E}(R)$ ist kompakt*[1].

(ii) *$\mathfrak{E}(R)$ ist ein T_1-Raum $\Leftrightarrow \mathfrak{E}(R) = \mathfrak{M}(R)$.*

(iii) *Ist $\mathfrak{E}(R)$ ein T_4-Raum und $\bigcap \mathfrak{E}(R) \subseteq \bigcap \mathfrak{P}(R)$, so erfüllt R die pm-Bedingung.*

Beweis. (i). Wir benutzen den Subbasissatz von Alexander und betrachten dazu eine Familie $(a_t)^\wedge \cap \mathfrak{E}(R)$ $(t \in T)$ von Basismengen aus $\mathfrak{E}(R)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Endlich viele Elemente $a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}$ $(t_i \in T)$ können immer nur ein echtes Ideal erzeugen. Denn $\bigcap_{i=1}^{n} (a_{t_i})^\wedge$ enthält ja wenigstens ein $S \in \mathfrak{E}(R)$, und dies bedingt

[1] Ein kompakter Raum muß bei uns nicht hausdorffsch sein!

$\langle a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\rangle \subseteq \langle S\rangle$, $\langle a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\rangle \neq R$. Somit ist $\langle\{a_t \mid t \in T\}\rangle \neq R$. Demnach gehören alle a_t einem maximalen Ideal M an, und wir bekommen $M \in \bigcap_{t \in T} ((a_t)^\wedge \cap \mathfrak{E}(R))$, $\bigcap_{t \in T} ((a_t)^\wedge \cap \mathfrak{E}(R)) \neq \emptyset$.

(ii). Der topologische Abschluß $\overline{\{S\}}$ von $\{S\}$ $(S \in \mathfrak{E}(R))$ in $\mathfrak{E}(R)$ besteht aus genau denjenigen Primhalbidealen von $\mathfrak{E}(R)$, die S umfassen. Daher ist $\overline{\{S\}} = \{S\}$ gleichbedeutend mit $S \in \mathfrak{M}(R)$, was (ii) beweist.

(iii). Wir nehmen an, daß entgegen unserer Behauptung ein Primideal P in zwei verschiedenen, maximalen Idealen M_1, M_2 enthalten ist. Da sich die Mengen $\{M_1\}$, $\{M_2\}$ nicht schneiden und beide abgeschlossen in $\mathfrak{E}(R)$ sind, haben sie dort nach Voraussetzung disjunkte Umgebungen. Also gibt es Elemente $a_1, a_2 \in R$ mit $M_i \notin (a_i)^\wedge$ und $\mathfrak{E}(R) \subseteq (a_1)^\wedge \cup (a_2)^\wedge$. Hieraus folgt zum einen $a_1 a_2 \in \bigcap \mathfrak{E}(R)$, $a_1 a_2 \in P$, aber wegen $P \subseteq M_i$ und $a_i \notin M_i$ andererseits auch $a_1 a_2 \notin P$. Das ist natürlich absurd. □

Eine stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ von X in einen topologischen Raum Y wird hier T_1-*Retraktion* genannt, falls es eine stetige Funktion $\sigma: Y \to X$ gibt, so daß $\tau \circ \sigma$ die Identität auf Y ist und $\sigma(Y) = \{x \in X \mid \overline{\{x\}} = \{x\}\}$ gilt. Existiert eine solche T_1-Retraktion, dann ist Y ein T_1-*Retrakt* von X.

Lemma 3. *Ist R ein pm-Halbring, so folgt:*

(i) *$\mathfrak{M}(R)$ ist hausdorffsch.*

(ii) *Die Abbildung $\tau_R: \mathfrak{P}(R) \to \mathfrak{M}(R)$, die jedem Primideal $P \in \mathfrak{P}(R)$ das eindeutig bestimmte, P umfassende, maximale Ideal zuordnet, ist stetig (und damit sogar eine T_1-Retraktion).*

Beweis. (i). Zu verschiedenen, maximalen Idealen $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(R)$ existieren Elemente $a_i \in M_i (i = 1, 2)$ mit $a_1 + a_2 = 1$. Man wähle nun $x_1, x_2 \in R$ gemäß Satz 1 derart, daß $\langle a_1, x_1\rangle = \langle a_2, x_2\rangle = R$ und $x_1 x_2 = 0$ gilt. Die Mengen $\mathfrak{M}(R) - (x_i)^\wedge$ sind jeweils Umgebungen von M_i und disjunkt.

(ii). Seien $P \in \mathfrak{P}(R)$, $a \in R$ und $\tau_R(P) \in \mathfrak{M}(R) - \hat{a}$. Dann gibt es ein $b \in \tau_R(P)$ mit $\langle a, b\rangle = R$ und weiter, abermals nach Satz 1, Elemente $x, y \in R$, so daß $\langle a, x\rangle = \langle b, y\rangle = R$ und $xy = 0$ ist. Wegen $b \in \tau_R(P)$ und $\langle b, y\rangle = R$ folgt $y \notin \tau_R(P)$, $y \notin P$, $P \in \mathfrak{P}(R) - \hat{y}$. Die Funktion τ_R bildet $\mathfrak{P}(R) - \hat{y}$ in $\mathfrak{M}(R) - \hat{a}$ ab; denn $Q \in \mathfrak{P}(R) - \hat{y}$ impliziert $x \in Q$, $x \in \tau_R(Q)$, $\tau_R(Q) \notin \hat{a}$. Also ist τ_R in P stetig. □

Lemma 4. *Ist R ein Halbring, so sind die nachstehenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *R ist ein pm-Halbring.*

(ii) *$\mathfrak{M}(R)$ ist ein T_1-Retrakt von $\mathfrak{P}(R)$.*

(iii) *Jeder Unterraum $\mathfrak{E}(R)$ von $\mathfrak{S}(R)$ mit $\mathfrak{M}(R) \subseteq \mathfrak{E}(R) \subseteq \mathfrak{S}^*(R)$ genügt dem T_4-Axiom.*

(iv) *$\mathfrak{P}(R)$ ist ein T_4-Raum.*

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar (Lemma 3 (ii)). Existiert umgekehrt eine T_1-Retraktion $\tau: \mathfrak{P}(R) \to \mathfrak{M}(R)$, so ist die Einschränkung von τ auf $\mathfrak{M}(R)$ zwangsläufig injektiv und deshalb R ein pm-Halbring: Aus $P \subseteq M_1, M_2$ ($P \in \mathfrak{P}(R)$; $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(R)$) folgt nämlich $M_i \in \overline{\{P\}}$, $\tau(M_i) \in \overline{\{\tau(P)\}} = \{\tau(P)\}$, $\tau(M_1) = \tau(M_2)$, $M_1 = M_2$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Es seien Δ, θ zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von $\mathfrak{E}(R)$. Nach Lemma 2 (i) ist $\mathfrak{E}(R)$ kompakt. Wir können Δ und θ als Schnitte von Basismengen $\hat{a} \cap \mathfrak{E}(R)$ darstellen und finden dann aufgrund der Kompaktheit Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in R$ mit $\Delta \subseteq (a_1)\hat{} \cap \ldots \cap (a_n)\hat{}$, $\theta \subseteq (b_1)\hat{} \cap \ldots \cap (b_m)\hat{}$, $(a_1)\hat{} \cap \ldots \cap (a_n)\hat{} \cap$ $\cap (b_1)\hat{} \cap \ldots \cap (b_m)\hat{} \cap \mathfrak{E}(R) = \emptyset$. Hier muß $\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rangle = R$ sein, weil sonst alle a_i und b_j in einem maximalen Ideal M enthalten wären und dies $M \in (a_1)\hat{} \cap \ldots \cap (a_n)\hat{} \cap (b_1)\hat{} \cap \ldots \cap (b_m)\hat{} \cap \mathfrak{E}(R)$ zur Folge hätte. Daher gilt $\langle a_i, x_i \rangle = \langle b_j, y_j \rangle = R$ sowie $x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_m = 0$ für gewisse $x_i, y_j \in R$ (Satz 1). Offenbar sind $\bigcap_{i=1}^{n} (\mathfrak{E}(R) - (x_i)\hat{})$, $\bigcap_{j=1}^{m} (\mathfrak{E}(R) - (y_j)\hat{})$ disjunkte Umgebungen von Δ bzw. θ.

Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist trivial, und (iv) $\Rightarrow$ (i) ergibt sich sofort mit Lemma 2 (iii). $\square$

Zahlreiche schon bekannte Ergebnisse über pm-Ringe und pm-Verbände sind einfache Konsequenzen unserer Resultate (siehe [2], [4], [12; Lemma II 3.6 und Proposition II 3.7], [14]). Die zu den pm-Verbänden dualen Verbände werden zumeist (anders als in [12]) *normal* genannt. Man muß die „Verbandsversion" von Satz 1 nur dualisieren, um Kennzeichnungen der Normalität zu erhalten (vgl. hierzu [3]). Mit Satz 1 (ii) und Satz 1 (iii) haben wir auch ein Resultat aus [5] verallgemeinert; dort wurde gezeigt, daß die entsprechenden, dualen Aussagen für beschränkte, distributive Verbände äquivalent sind.

Erweiterungen topologischer Räume. Wir kommen jetzt zum Hauptanliegen unserer Arbeit, den topologischen Erweiterungen. Zunächst formulieren wir dazu ein allgemeines Prinzip und demonstrieren anschließend seine Universalität an einigen Beispielen.

Ist Y ein topologischer Raum und $e: X \to Y$ eine dichte, topologische Einbettung, so heißt das Paar (Y, e) eine *Erweiterung* von X, und (Y, e) ist eine *Kompaktifizierung* von X, wenn Y zusätzlich kompakt ist. Die Begriffe *T_0-Erweiterung* (*T_1-Kompaktifizierung* etc.) gebrauchen wir in der üblichen Bedeutung. Zwei Erweiterungen (Y_1, e_1) und (Y_2, e_2) von X sind *äquivalent*, falls ein Homöomorphismus $h: Y_1 \to Y_2$ mit $h \circ e_1 = e_2$ existiert.

Es seien nun R ein Halbring, $\mathfrak{E}(R)$ irgendein Unterraum von $\mathfrak{S}(R)$ und $e_R: X \to \mathfrak{E}(R)$ eine Abbildung, so daß die beiden folgenden Bedingungen zutreffen:

(E 1) Die Mengen $B_a := \{x \in X \mid a \in e_R(x)\}$ $(a \in R)$ bilden gemeinsam eine abgeschlossene Basis von X.

(E 2) $\bigcap_{x \in X} e_R(x) = \{0\}$.

Offenbar gilt $e_R(B_a) = \hat{a} \cap e_R(X)$ für alle $a \in R$. Zum Nachweis der Injektivität von e_R wählen wir zwei verschiedene Elemente $x, y \in X$. Da X ein T_0-Raum ist (dies war ja eingangs von uns so vereinbart worden!), folgt $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, sagen wir $y \notin \overline{\{x\}}$. Nach (E 1) gibt es dann ein $a \in R$ mit $x \in B_a$ und $y \notin B_a$. Hieraus resultiert $a \in e_R(x) - e_R(y)$, $e_R(x) \neq e_R(y)$. Der topologische Abschluß von $e_R(X)$ in $\mathfrak{E}(R)$ ist $\overline{e_R(X)} = \{S \in \mathfrak{E}(R) \mid \bigcap e_R(X) \subseteq S\} = \{S \in \mathfrak{E}(R) \mid 0 \in S\} = \mathfrak{E}(R)$, d. h., $e_R(X)$ liegt dicht in $\mathfrak{E}(R)$. Insgesamt haben wir damit $(\mathfrak{E}(R), e_R)$ als eine T_0-Erweiterung von X erkannt. Allein (E 1) und (E 2) stellen also sicher, daß $(\mathfrak{E}(R), e_R)$ eine T_0-Erweiterung ist. Durch nur eine weitere Forderung erhalten wir automatisch Kompaktifizierungen:

(*K*) $\mathfrak{M}(R) \subseteq \mathfrak{E}(R) \subseteq \mathfrak{S}^*(R)$.

Der nächste Satz geht näher darauf ein. Mit unseren allgemeinen Resultaten über Halbringe wird der Beweis geradezu trivial.

Satz 5. *Ist R ein Halbring und erfüllen $\mathfrak{E}(R) \subseteq \mathfrak{S}(R)$, $e_R: X \to \mathfrak{E}(R)$ die Bedingungen* (E 1), (E 2) *und* (*K*), *so gilt:*

(i) *$(\mathfrak{E}(R), e_R)$ ist eine T_0-Kompaktifizierung von X.*

(ii) *$(\mathfrak{E}(R), e_R)$ ist eine T_1-Kompaktifizierung $\Leftrightarrow \mathfrak{E}(R) = \mathfrak{M}(R)$.*

(iii) $(\mathfrak{E}(R), e_R)$ *ist eine* T_4*-Kompaktifizierung* $\Leftrightarrow$ R *hat die* pm*-Eigenschaft.*

(iv) $(\mathfrak{E}(R), e_R)$ *ist eine* T_2*-Kompaktifizierung* $\Leftrightarrow \mathfrak{E}(R) = \mathfrak{M}(R)$, *und* R *besitzt die* pm*-Eigenschaft.*

Beweis. (i), (ii). Lemma 2 (i), (ii). (iii). Lemma 2 (iii) und Lemma 4. (iv). „$\Rightarrow$" Als kompakter T_2-Raum genügt $\mathfrak{E}(R)$ dem T_4-Axiom, und damit ist R nach (iii) ein pm-Halbring. Aus (ii) folgt $\mathfrak{E}(R) = \mathfrak{M}(R)$. „$\Leftarrow$" Lemma 3 (i). □

Den Ring aller stetigen, reellwertigen Abbildungen auf X bezeichnen wir mit $C(X)$. Ein *Unterring* von $C(X)$ enthält bei uns grundsätzlich die konstante Funktion 1. Wir sagen, ein Unterring $R \subseteq C(X)$ *trennt Punkte und abgeschlossene Mengen*, wenn es zu einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ und einem Element $x \in X - A$ stets ein $f \in R$ mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(x) \neq 0$ gibt. Für den Verband aller offenen Teilmengen von X schreiben wir $\mathcal{O}(X)$. Unter einem *Mengenring* auf X verstehen wir ein System $\mathcal{R}$, bestehend aus Teilmengen von X, das die leere Menge enthält, außerdem X selbst und mit zwei Mengen U, V auch immer deren Vereinigung $U \cup V$ und Durchschnitt $U \cap V$. Ein Mengenring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O}(X)$ heißt *Ringbasis* von X, falls $\mathcal{R}$ eine offene Basis ist.

Wir kommen nun zu den angekündigten Beispielen. Dabei wird deutlich, daß ganz unterschiedliche Erweiterungen Spezialfälle des oben angegebenen Prinzips sind. Unsere Konstruktion stimmt lediglich manchmal nicht mit der ursprünglichen überein, sondern führt auf eine äquivalente Version. Zuerst betrachten wir einen Tychonoffraum X sowie dazu einen alle konstanten Funktionen enthaltenden Unterring $R \subseteq C(X)$, der Punkte und abgeschlossene Mengen trennt. Durch die Festlegung $e_R(x) := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ wird jedem $x \in X$ ein maximales Ideal $e_R(x) \in \mathfrak{M}(R)$ zugeordnet (falls $f \in R - e_R(x)$, dann ist

$g := 1 - \dfrac{1}{f(x)} f$ ein Element von $e_R(x)$ mit $\langle f, g \rangle = R$, also $e_R(x)$ in der Tat maximal). Die so definierte Abbildung $e_R : X \to \mathfrak{M}(R)$ erfüllt fraglos (E 1) und (E 2). Nach Satz 5 ist $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ eine T_1-Kompaktifizierung von X und genau dann hausdorffsch, wenn R der pm-Bedingung genügt.

Es sei $\mathcal{R}$ eine Ringbasis von X (jetzt bezeichnet X wieder einen beliebigen T_0-Raum). Gehören sämtliche Primideale $\mathcal{P}_x :=$ $:= \{U \in \mathcal{R} \mid x \notin U\}$ $(x \in X)$ einem Unterraum $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{R})$ an, so erfüllt

$$e_{\mathscr{R}}: X \to \mathfrak{E}(\mathscr{R}), \quad x \to \mathscr{P}_x$$

gleichfalls (E 1) und (E 2). Hier gilt $\overline{e_{\mathscr{R}}(X-U)} = \hat{U} \cap \mathfrak{E}(\mathscr{R})$ für alle $U \in \mathscr{R}$. Demzufolge sind derartige Erweiterungen $(\mathfrak{E}(\mathscr{R}), e_{\mathscr{R}})$ von X durchweg strikt. (Allgemein heißt eine Erweiterung (Y, e) von X *strikt*, wenn die Mengen $\overline{e(A)}$, $A \subseteq X$, zusammen eine abgeschlossene Basis von Y bilden.) Mit speziellen Unterräumen $\mathfrak{E}(\mathscr{R}) \subseteq \mathfrak{S}(\mathscr{R})$ ergeben sich bekannte Kompaktifizierungen. Die aus $\mathfrak{E}(\mathscr{R}) := \mathfrak{P}(\mathscr{R})$ resultierenden Kompaktifizierungen wurden z. B. in [15] untersucht. Über $\mathfrak{E}(\mathscr{R}) := \mathfrak{M}(\mathscr{R}) \cup \{\mathscr{P}_x \mid x \in X\}$ gewinnt man die Kompaktifizierungen von SHANIN [16]. Sind alle Primideale $\mathscr{P}_x$, $x \in X$, maximal (X muß dann notwendig ein T_1-Raum sein!), so erhält man mittels $\mathfrak{E}(\mathscr{R}) := \mathfrak{M}(\mathscr{R})$ die Wallman-Typ Kompaktifizierungen. Es läßt sich aber noch mehr sagen. Sei (Y, e) eine strikte T_0-Erweiterung von X. Der aus allen Primhalbidealen $\mathscr{S}_y := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid y \in \overline{e(X-U)}\}$ $(y \in Y)$ bestehende Unterraum $\mathfrak{E}(\mathcal{O}(X)) \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{O}(X))$ induziert die Erweiterung $(\mathfrak{E}(\mathcal{O}(X)), e_{\mathcal{O}(X)})$, welche — der Leser überzeuge sich selbst davon — vermöge $y \to \mathscr{S}_y$ $(y \in Y)$ äquivalent zu (Y, e) ist. Also liefert unsere Methode (bis auf Äquivalenz) jede strikte T_0-Erweiterung.

Ist $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, so nennen wir einen Unterring $R \subseteq C(X)$ *ψ-abgeschlossen*, falls mit f auch stets $\psi \circ f$ wieder zu R gehört. Dies verallgemeinert einen Begriff ("closed under composition") von ISBELL [11]. Lemma 6 dient uns als Vorbereitung für Satz 7.

Lemma 6. *Bildet $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alle $t \geqslant \frac{1}{2}$ jeweils auf $1/t$ ab, dann ist jeder ψ-abgeschlossene Unterring $R \subseteq C(X)$ ein pm-Ring.*

Beweis. Wir wählen zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R$ mit $f_1 + f_2 = 1$ und setzen $g_i := \psi \circ f_i$, $h_i := 1 - f_i g_i$ $(i = 1, 2)$. Aufgrund unserer Voraussetzung sind g_i, h_i Elemente von R. Ist $x \in X$, so existiert wegen $f_1(x) + f_2(x) = 1$ ein $k \in \{1, 2\}$ mit $f_k(x) \geqslant \frac{1}{2}$, $h_k(x) = 0$, und das bedeutet $h_1 h_2 = 0$. Offenbar gilt $\langle f_i, h_i \rangle = R$. Folglich ist R nach Satz 1 ein pm-Ring. □

Alle Ringe $C(X)$ haben die pm-Eigenschaft (ein Beweis hierzu ergibt sich unmittelbar aus Lemma 6, indem man dort ein stetiges ψ nimmt; vgl. auch [2]). Im Falle eines Tychonoffraumes X induzieren sie immer eine Stone—Čech Kompaktifizierung von X und dasselbe trifft für die jeweiligen Unterringe der beschränkten Abbildungen zu ([6; Problem 3.12.21 (c)]). Bleibt dies analog bei Ringen differenzierbarer Funktionen richtig? Satz 7 gibt darauf eine vollständige

Antwort. Für die folgenden Überlegungen fixieren wir eine nichtleere, offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Die k-mal (stetig) bzw. unendlich oft differenzierbaren Funktionen von D in $\mathbb{R}$ bilden jeweils einen Unterring von $C(D)$ und desgleichen die entsprechenden beschränkten Funktionen. Wir greifen einen heraus und bezeichnen ihn mit R. Zweifelsohne trennt R Punkte und abgeschlossene Mengen (vgl. [13; Corollary 1.2.6]). Zudem enthält R alle konstanten Abbildungen und führt mithin auf die Kompaktifizierung $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ von D.

Satz 7. *R ist ein pm-Ring und $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ eine Stone—Čech Kompaktifizierung.*

Beweis. Es sei

$$\psi_1 : \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \to \mathbb{R}, \quad t \to 1/t\,.$$

Nach einem Satz von Borel (siehe [13; Theorem 1.5.4]) existiert eine auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich häufig differenzierbare Funktion $\psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß die Folgen $(\psi_1^{(k)}(\frac{1}{2}))$ und $(\psi_2^{(k)}(\frac{1}{2}))$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ der Ableitungen von ψ_1 und ψ_2 an der Stelle $\frac{1}{2}$ übereinstimmen. Die zusammengesetzte Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \to \begin{cases} \psi_1(t) & (t \geqslant \frac{1}{2}) \\ \psi_2(t) & (t < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

ist überall beliebig oft differenzierbar, und es gilt $\psi(t) = 1/t$ für alle $t \geqslant \frac{1}{2}$. Unser Ring R ist in jedem Fall ψ-abgeschlossen, damit ein pm-Ring (Lemma 6) und $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ eine T_2-Kompaktifizierung (Satz 5 (iv)). Seien nun A_1, A_2 zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von D. Ihre offenen Komplemente $U_1 := D - A_1$, $U_2 := D - A_2$ überdecken D. Wir wählen eine U_1, U_2 untergeordnete Partition der Eins und erhalten so Funktionen $f_1, f_2 \in R$ mit $f_i(A_i) \subseteq \{0\}$ und $f_1 + f_2 = 1$. Die abgeschlossenen Teilmengen $\Delta_i := \{M \in \mathfrak{M}(R) \mid f_i \in M\}$ $(i = 1, 2)$ von $\mathfrak{M}(R)$ haben wegen $f_1 + f_2 = 1$ einen leeren Schnitt. Da $e_R(A_i) \subseteq \Delta_i$ gilt, können deshalb die topologischen Abschlüsse der Mengen $e_R(A_i)$ keine gemeinsamen Elemente besitzen. Demzufolge ist $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ tatsächlich eine Stone—Čech Kompaktifizierung ([7; Theorem 6.5]). □

Abschließend bringen wir noch eine Charakterisierung der kompakten Hausdorffräume als gewisse Retrakte und kennzeichnen auf analoge Weise auch die T_2-Kompaktifizierungen. Ein T_0-Raum Y ist *nüchtern*, falls im Verband der abgeschlossenen Teilmengen von Y nur die Punktabschlüsse $\overline{\{y\}}$ $(y \in Y)$ $\cup$-irreduzibel sind; Y heißt *Stone-*

raum, wenn darüber hinaus die kompakt-offenen Teilmengen eine Ringbasis bilden. Die Primidealräume $\mathfrak{P}(R)$ aller Halbringe R sind Stoneräume, und jeder Stoneraum ist zum Primidealraum $\mathfrak{P}(L)$ eines beschränkten, distributiven Verbandes L homöomorph. In der Literatur wurden die Primidealräume von Ringen und Verbänden schon intensiv untersucht (siehe etwa [8], [9]). Wir verzichten daher auf Beweise. Eine Kompaktifizierung (Y, e) von X, bei der Y ein Stoneraum ist, wird hier kurz *S-Kompaktifizierung* genannt.

Lemma 8. *Die kompakten Hausdorffräume sind genau die T_1-Retrakte der Stoneräume.*

Beweis. Es sei X ein kompakter T_2-Raum. Der Mengenring $\mathcal{O}(X)$ hat die pm-Eigenschaft, und $e_{\mathcal{O}(X)}: X \to \mathfrak{M}(\mathcal{O}(X))$ ist ein Homöomorphismus. Mit Lemma 4 erweist sich X als T_1-Retrakt des Stoneraumes $\mathfrak{P}(\mathcal{O}(X))$. Ist X umgekehrt T_1-Retrakt eines Stoneraumes Y, so können wir Y mit dem Primidealraum $\mathfrak{P}(L)$ eines beschränkten, distributiven Verbandes L identifizieren, und X entspricht dann dem Unterraum $\mathfrak{M}(L)$. Nach Lemma 4 muß L ein pm-Verband sein. Folglich ist $\mathfrak{M}(L)$ und damit ebenso X ein kompakter Hausdorffraum (Lemma 2 (i), Lemma 3 (i)). □

Satz 9. *Eine Erweiterung (Y, e) von X ist genau dann eine T_2-Kompaktifizierung, wenn es eine S-Kompaktifizierung $(\tilde{Y}, \tilde{e})$ von X und eine T_1-Retraktion $\tau: \tilde{Y} \to Y$ mit $e = \tau \circ \tilde{e}$ gibt.*

Beweis. Wir nehmen an, daß (Y, e) eine Hausdorffkompaktifizierung von X ist und setzen $R := \{g \circ e \mid g \in C(Y)\}$. Mit Lemma 6 folgt sofort, daß R ein pm-Unterring von $C(X)$ ist. Natürlich enthält R sämtliche konstanten Abbildungen. Außerdem trennt R Punkte und abgeschlossene Mengen. Gemäß unseren früheren Überlegungen induziert R somit die T_2-Kompaktifizierung $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ von X. Nun sind (Y, e) und $(\mathfrak{M}(R), e_R)$ äquivalent (siehe [6; Problem 3.12.21 (e)]). Offenbar existiert daher nach Lemma 3 (ii) zu der S-Kompaktifizierung $(\tilde{Y}, \tilde{e}) := (\mathfrak{P}(R), e_R)$ von X eine T_1-Retraktion $\tau: \tilde{Y} \to Y$ wie behauptet. Die andere Richtung folgt aus Lemma 8. □

Sind (Y_1, e_1) und (Y_2, e_2) Erweiterungen von X, so schreibt man $(Y_1, e_1) \leqslant (Y_2, e_2)$, falls eine stetige Abbildung $h: Y_2 \to Y_1$ mit $e_1 = h \circ e_2$ existiert. Diese Notation erlaubt es, Satz 9 folgendermaßen zu interpretieren: Eine Erweiterung (Y, e) von X ist genau dann eine Hausdorffkompaktifizierung, wenn (Y, e) „unter" einer S-Kompakti-

fizierung liegt und die $\leqslant$-Beziehung durch eine T_1-Retraktion vermittelt wird.

Bemerkung. Es sei X ein kompakter T_2-Raum mit einer Ringbasis $\mathscr{R}$. Da Ringbasen kompakter Hausdorffräume stets die pm-Eigenschaft besitzen (vgl. [1; Theorem 2.2]), hat insbesondere $\mathscr{R}$ sie. Folglich ergibt sich, indem man den entsprechenden Beweis zu Lemma 8 mit $\mathscr{R}$ statt $\mathcal{O}(X)$ nachvollzieht: X ist ein T_1-Retrakt des Stoneraumes $\mathfrak{P}(\mathscr{R})$. Nun ist $\hat{\mathscr{R}} := \{\mathfrak{P}(\mathscr{R}) - \hat{U} \mid U \in \mathscr{R}\}$ gerade der Mengenring aller kompakt-offenen Teilmengen von $\mathfrak{P}(\mathscr{R})$ und $U \to \mathfrak{P}(\mathscr{R}) - \hat{U}\,(U \in \mathscr{R})$ ein Isomorphismus von $\mathscr{R}$ auf $\hat{\mathscr{R}}$. Mithin läßt sich unser Resultat, daß jeder kompakte T_2-Raum X T_1-Retrakt eines Stoneraumes Y ist, wie folgt ergänzen: Zu einer beliebig vorgelegten Ringbasis $\mathscr{R}$ von X kann der Stoneraum Y immer so gewählt werden, daß $\mathscr{R}$ und die Ringbasis aller kompakt-offenen Teilmengen von Y isomorph sind (vgl. hierzu auch [10; Proposition 5.33]).

Literatur

[1] BILES, C. M.: Wallman-type compactifications. Proc. Amer. Math. Soc. **25**, 363—368 (1970).

[2] CONTESSA, M.: On pm-rings. Comm. Algebra **10**, 93—108 (1982).

[3] CORNISH, W. H.: Normal lattices. J. Austral. Math. Soc. **14**, 200—215 (1972).

[4] DE MARCO, G., ORSATTI, A.: Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal. Proc. Amer. Math. Soc. **30**, 459—466 (1971).

[5] DOBBERTIN, H.: Normal lattices and Wallman-type compactifications (unveröffentlichtes Manuskript).

[6] ENGELKING, R.: General Topology. Monografie Matematyczne, Tom **60**. Warszawa: PWN — Polish Sci. Publ. 1977.

[7] GILLMANN, L., JERISON, M.: Rings of Continuous Functions. Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1976.

[8] HOCHSTER, M.: Prime ideal structure in commutative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **142**, 43—60 (1969).

[9] HOFMANN, K. H., KEIMEL, K.: A general character theory for partially ordered sets and lattices. Memoirs Amer. Math. Soc. **122** (1972).

[10] HOFMANN, K. H., THAYER, F. J.: Approximately finite-dimensional C^*-algebras. Dissert. Math. **174** (1980).

[11] ISBELL, J. R.: Algebras of uniformly continuous functions. Ann. Math. **68**, 96—125 (1958).

[12] JOHNSTONE, P. T.: Stone Spaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1982.

[13] NARASIMHAN, R.: Analysis on Real and Complex Manifolds. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1968.

[14] PAWAR, Y. S., THAKARE, N, K.: pm-Lattices. Algebra Univ. **7**, 259—263 (1977).

[15] SCHRÖDER, J.: Das Wallman-Verfahren und inverse Limites. Quaest. Math. **2**, 325—333 (1977).

[16] SHANIN, N. A.: On special extensions of topological spaces. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **38**, 6—9 (1943).

G. WILKE
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
D-3000 Hannover 1, Bundesrepublik Deutschland