Werk

Titel: ...-platitude des Structures de Contact.

Autor: Monna, Gilbert

Jahr: 1983

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0095|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mh. Math. 95, 221—227 (1983)

Monatshefte für
Mathematik
© by Springer-Verlag 1983

$\mathfrak{h}$-platitude des Structures de Contact

Par

Gilbert Monna, Montpellier

(Reçu le 2 Août 1982)

Abstract. $\mathfrak{h}$-flatness of Contact Structures. For most of the usual structures in differential geometry (foliations, complex structures, symplectic structures,...) the condition of integrability, that is to say the change from an almost structure to a structure, is given by the flatness of the associated structure of the first order. It is not the same for the contact structures. Meanwhile the condition of integrability for the structure defined by a contact form is found to be a condition of $\mathfrak{h}$-flatness in the sense of [2], $\mathfrak{h}$ being the Heisenberg Lie algebra. We give here some consequences of this property, particularly we show how some technics of geometry of the G-structures permit to obtain a new proof of a result of GRAY and SASAKI, showed in [3] and [6].

Introduction

Pour la plupart des structures usuelles en géométrie différentielle (feuilletages, structures complexes, structures symplectiques ...) la condition d«intégrabilité», c'est-à-dire le passage d'une presque structure à une structure, se traduit par la platitude de la structure du premier ordre associée. Il n'en est pas ainsi pour les structures de contact. Néanmoins la condition d«intégrabilité» pour les structures définies par une forme de contact se trouve être une condition de $\mathfrak{h}$-platitude, $\mathfrak{h}$ étant l'algèbre de Lie de Heisenberg. Nous donnons ici quelques conséquences de cette propriété, notamment nous montrons comment des techniques de géométrie des G-structures permettent d'obtenir une nouvelle démonstration d'un résultat de GRAY et SASAKI établi dans [3] et [6].

I. Variétés et G-structures $\mathfrak{h}$-plates

On ne rappelle ici que les notions essentielles, la référence systématique étant [2].

On désigne par $(e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$, et par $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de Heisenberg, c'est-à-dire $\mathbb{R}^{2n+1}$, muni de sa structure

0026—9255/83/0095/0221/$ 01.40

usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et du crochet de Lie suivant:

$$[\![e_i, e_j]\!] = 0, i < j, \text{ sauf si } i = 2k-1, j = 2k\,(k \geqslant 1)$$

$$\text{et } [\![e_{2k-1}, e_{2k}]\!] = e_0\,.$$

On dit qu'une variété est $\mathfrak{h}$-plate si chaque fibre $T_x V$ de TV, fibré vectoriel tangent de V, est munie d'une structure d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{h}$ et si de plus, au voisinage de tout point de V, il existe une trivialisation locale $\mathfrak{h}$-plate de TV, c'est-à-dire $2n+1$ champs de vecteurs locaux, linéairement indépendants, et qui vérifient:

$$[\![X_i, X_j]\!] = [X_i, X_j] = \tau_{ij} X_0$$

τ_{ij} désignant les constantes de structures de $\mathfrak{h}$. Si G_0 désigne l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{h}$ et G un sous-groupe de G_0, une G-structure $E_G(V)$ est dite $\mathfrak{h}$-plate si et seulement si elle est localement équivalente à $E_G H$, G-structure invariante à gauche sur H, groupe de Lie de Heisenberg. La donnée d'une structure $\mathfrak{h}$-plate est équivalente à celle d'une G_0-structure $\mathfrak{h}$-plate.

II. Variétés de contact strict et de presque contact

V désigne une variété de dimension $2n+1$.

V sera une variété de contact strict si est définie sur V une forme de contact α, c'est-à-dire une 1-forme telle que $\alpha \wedge d\alpha^n$ soit une forme volume. V sera une variété de presque contact si est définie sur V un couple (α, β) où α est une 1-forme, β une 2-forme, telles que $\alpha \wedge \beta^n$ soit une forme volume. On note Y_α (respectivement $Y_{\alpha\beta}$) l'unique champ de vecteurs tel que $i_{Y_\alpha}\alpha = 1$, et $i_{Y_\alpha} d\alpha = 0$ (respectivement $i_{Y_{\alpha\beta}}\alpha = 1$ et $i_{Y_{\alpha\beta}}\beta = 0$). On l'appelle système dynamique de la forme de contact (respectivement de la structure de presque contact).

Proposition 1: *Toute variété de presque contact* (V, α, β), *telle que* β *soit une 2-forme fermée, est une variété* $\mathfrak{h}$*-plate.*

On définit sur V un crochet de champs de vecteurs par:

$$[\![X, Y]\!] = -\beta(X, Y)\, Y_{\alpha\beta}\,,$$

définissant ainsi une structure d'algèbre de Lie sur toute fibre $T_x V$ de TV.

Il existe un système de coordonnées locales, au voisinage de tout point de V, $(x^0, \ldots, x^{2n})$ dans lequel $Y_{\alpha\beta} = \partial/\partial x^0$. A cause de la

condition $i_{Y_\alpha \beta}\beta = 0$, β ne dépend pas de x^0. On peut donc, par un changement des coordonnées $(x^1, \ldots, x^{2n})$ et en restreignant l'ouvert de définition de ces coordonnées si nécessaire, définir des coordonnées $(y^1, \ldots, y^{2n})$ dans lesquelles β s'écrirait $dy^1 \wedge dy^2 + \ldots + dy^{2n-1} \wedge dy^{2n}$. On obtient ainsi, un système de coordonnées locales $(x^0, y^1, \ldots, y^{2n})$. On considère alors les champs de vecteurs locaux:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^0},\ X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y^2} + y^1 \frac{\partial}{\partial x^0}, \ldots$$

$$X_{2k} = \frac{\partial}{\partial y^{2k}} + y^{2k-1} \frac{\partial}{\partial x^0},\ X_{2k+1} = \frac{\partial}{\partial y_{2k+1}}, \ldots$$

$$X_{2n} = \frac{\partial}{\partial y^{2n}} + y^{2n-1} \frac{\partial}{\partial x^0}.$$

$(X_0, \ldots, X_{2n})$ définissent une trivialisation locale ϧ-plate de TV.

Corollaire: *Toute variété de contact strict est ϧ-plate le crochet de champs de vecteurs étant défini par:*

$$[\![X, Y]\!] = -d\alpha(X, Y)\, Y_\alpha.$$

On désigne par $CT(2n+1, R)$ le sous-groupe de Lie de $GL(2n+1, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix},\ A \in SP(2n, \mathbb{R}).$$

La donnée d'une structure de presque contact est équivalente à celle d'une $CT(2n+1, \mathbb{R})$-structure, $E_{CT(2n+1, \mathbb{R})}(V)$.

Théorème 1: *Une structure de presque contact est une structure de contact strict (c'est-à-dire $d\alpha = \beta$) si et seulement si la $CT(2n+1, \mathbb{R})$-structure associée est ϧ-plate.*

Si α est une forme de contact, il existe des coordonnées locales $(x^0, \ldots, x^{2n})$, au voisinage de tout point de V, dans lesquelles α s'écrit $dx^0 + x^1 dx^2 + \ldots + x^{2n-1} dx^{2n}$. On considère alors les champs de vecteurs utilisés dans la démonstration de la proposition 1, avec ici $\partial/\partial y^i = \partial/\partial x^i$. Ils définissent encore une trivialisation ϧ-plate de TV et

permettent en plus de construire une trivialisation $\mathfrak{h}$-plate de $E_{CT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$.

Supposons réciproquement qu'il soit donné une $CT(2n+1,\mathbb{R})$ structure, $E_{CT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$, $\mathfrak{h}$-plate sur V. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de V tel qu'au dessus de chaque U_i soit définie une trivialisation locale $\mathfrak{h}$-plate de TV, $(X_0^i,\ldots,X_{2n}^i)$, définissant en plus une section locale du fibré des repères, à valeurs dans $E_{CT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$. On note $(\theta_i^0,\ldots,\theta_i^{2n})$ les 1-formes duales. La forme des matrices du groupe $CT(2n+1,\mathbb{R})$ montre que les 1-formes θ_i^0 et les 2-formes $\theta_i^1\wedge\theta_i^2+\ldots+\theta_i^{2n-1}\wedge\theta_i^{2n}$ se recollent en des formes globales sur V. La $\mathfrak{h}$-platitude permet d'établir que $d\theta^0=\theta^1\wedge\theta^2+\ldots+\theta^{2n-1}\wedge\theta^{2n}$ ce qui montre que θ^0 est une forme de contact.

Signalons enfin que dans [5] on a donné une condition nécessaire et suffisante portant sur le tenseur de Chern-Bernard de $E_{CT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$ pour que $E_{CT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$ soit $\mathfrak{h}$-plate.

III. Variétés de contact large

On appelle pseudo-groupe de contact, et on note Γ_H, l'ensemble des difféomorphismes locaux f de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tels que

$$f^*\alpha_0=\varrho\,\alpha_0,\ \text{où}\ \alpha_0=dx^0+x^1\,dx^2+\ldots+x^{2n-1}\,dx^{2n},\ (x^0,\ldots,x^{2n})$$

désignant les coordonnées de $\mathbb{R}^{2n+1}$ associées à sa base canonique et ϱ étant une fonction non nulle sur le domaine de définition de f et C^∞.

Une structure de contact large sur V est une Γ_H-structure, c'est-à-dire un atlas maximal $\mathfrak{A}$, contenant un atlas $\{(U_i,f_i)\}_{i\in I}$, où $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de V par des ouverts, et les f_i des difféomorphismes définis sur U_i, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, vérifiant:

$$f_i\circ f_j^{-1}\colon \mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}^{2n+1}$$

est un élément de Γ_H, pour tous les couples d'indices (i,j) tels que $f_i\circ f_j^{-1}$ ait un sens.

Une variété de contact large est donc un couple $(V,\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}$ étant une structure de contact large sur V. Désignons par $CCT(2n+1,\mathbb{R})$ le groupe conforme de contact, c'est-à-dire le sous-groupe de Lie de $GL(2n+1,\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \ldots & 0\\ b_1 & & & \\ \vdots & & a_\lambda & \\ b_{2n} & & & \end{pmatrix}$$

où $\beta_0(a_\lambda a,a_\lambda v)=\lambda\beta_0(u,v)$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et β_0 étant la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.

L'existence d'une Γ_H-structure entraîne celle d'une $CCT(2n+1, \mathbb{R})$-structure (voir [1]).

L'algèbre de Lie formelle de Γ_H n'est pas plate, mais la graduée associée est:

$$\operatorname{gr} L = \mathbb{R}^{2n+1} + \mathfrak{cct}(2n+1, \mathbb{R}) + \mathfrak{ct}^{(1)}(2n+1, \mathbb{R}) + \ldots .$$

m_1 et m_2 sont définis par les troncatures à l'ordre 1 et 2 de L, c'est-à-dire que m_1 et m_2 sont tels que:

$$0 \to \mathfrak{cct}(2n+1, \mathbb{R}) \to m^1 \to \mathfrak{h} \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{ct}^{(1)}(2n+1, \mathbb{R}) \to m^2 \to m^1 \to 0$$

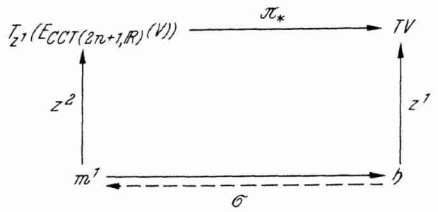
soient des suites exactes.

Pour toutes précisions sur les questions de pseudo-groupes de Lie et structures d'ordres supérieurs, on se réfera à [1] dont nous avons conservé les notations.

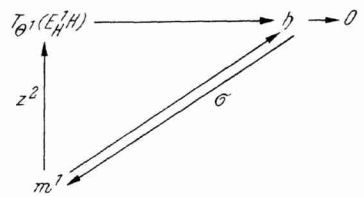
Soit U_i un ouvert de V sur lequel est défini un difféomorphisme f_i tel que $f_i^* \alpha_0$ soit une forme de contact sur U_i, représentant local de la structure de contact large définie sur V. Soit $(X_0, \ldots, X_{2n})$ une trivialisation locale $\mathfrak{h}$-plate de TV. L'application $\mathfrak{h} \to T_x V$ définie par $e_i \to X_i$ est un repère d'ordre 1 de V en x, on le note z^1.

$E_{CCT(2n+1, \mathbb{R})}(V)$ étant transitive, on a: $E_{CCT(2n+1, \mathbb{R})}(V) = \{\varphi^1(z^1), \varphi \in \Gamma_V\}$ où $\varphi^{(1)}$ désigne un relèvement de φ dans le fibré des repères de V et Γ_V l'ensemble des difféomorphismes de $V \to \mathbb{R}^{2n+1}$ qui soient une carte locale de l'atlas $\mathfrak{G}$. On note z^2 le repère d'ordre 2 en x défini par $j_0^2 f_i^{-1}$, jet d'ordre 2 en 0 de f_i^{-1}.

$\pi_* z^2 = z^1$ et on a le diagramme commutatif:



Dans lequel il reste à définir σ, qui est choisie de telle sorte que le diagramme:



commute, θ^1 étant le jet d'ordre 1 de l'identité, et $E^1_H H$ la structure d'ordre 1 définie sur H, groupe de Lie de Heisenberg, de manière analogue à $E_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$ sur V.

Le choix de σ revient à celui d'une torsion de tenseur de torsion $-\tau_0$. Pour un tel choix de σ et pour tout élément z^2 de $E^2_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$, l'application $\sigma \circ z^2$, définie de

$$\mathfrak{h} \to T_{z^1}(E_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V))$$

définit un élément horizontal tangent à $E_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$ en z^1, de torsion $-\tau_0$.

Soit C le champ d'éléments de contact défini par: C_{z^1} est la somme des espaces horizontaux définis par $z^2 \circ \sigma$, pour tous les z^2 de $E^2_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$.

Proposition 2: *Si $\mathfrak{H}_{z^1}$ est un espace horizontal défini par une application $z^2 \circ \sigma$, alors $C_{z^1} = \mathfrak{H}_{z^1} \oplus \tilde{\mathfrak{ct}}(2n+1,\mathbb{R})_{(1)z^1}$.*

On a vu que le noyau de la troncature $m_2 \to m_1$ est $\mathfrak{ct}(2n+1,\mathbb{R})^{(1)}$. D'autre part $< \mathfrak{ct}(2n+1,\mathbb{R})^{(1)}, \mathfrak{h} > = \mathfrak{ct}(2n+1,\mathbb{R})_1$.

En faisant un raisonnement identique à celui fait dans [1], on démontre que pour tout $z^1 \in E_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$, $C_{z^1} = \mathfrak{H}_{z^1} + \tilde{\mathfrak{ct}}(2n+1,\mathfrak{r})_{(1)z^1}$.

Proposition 3: *Le champ d'éléments de contact C est en involution.*

En effet, soit z^1 un point de $E_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$, X_{z^1} et Y_{z^1} deux éléments de C_{z^1}. Il existe z^2 élément de $E^2_{CCT(2n+1,\mathbb{R})}(V)$ tel que:

$$X_{z^1} = z^2 \circ \sigma(u),\ u \in \mathfrak{h}, \quad Y_{z^1} = z^2 \circ \sigma(v),\ v \in \mathfrak{h}$$

$$[\![X_{z^1}, Y_{z^1}]\!] = [j^2_0 f_i^{-1}(\sigma(u)), j^2_0 f_i^{-1}(\sigma(v))]$$

$$= j^1_0 f_i^{-1}([\![\sigma(u), \sigma(v)]\!]) \quad \text{d'après [1]},$$

j^1_0 et j^2_0 désignant les jets d'ordre 1 et 2 de f_i^{-1} en 0.

Donc $[\![X_{z^1}, Y_1]\!]$ est un élément de C_{z^1}, puisque

$$[\![\sigma(u), \sigma(v)]\!] = -d\alpha_0(u,v)\, Y_{\alpha_0}$$

à cause du choix de σ, et $j^1_0 f_i^{-1} Y_{\alpha_0} \in C_{z^1}$.

D'après le théorème de Frobenius, C est intégrable, il admet donc une variété intégrale, qui est une sous-variété E de $B^1(V)$. V est connexe et simplement connexe, donc E est connexe. Le groupe structural de E est donc un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{ct}(2n+1,\mathbb{R})$. $CT(2n+1,\mathbb{R})$ est connexe, donc le groupe

structural de E est $CT(2n+1, \mathbb{R})$ et E est une $CT(2n+1, \mathbb{R})$-structure. E est ɧ-plate, étant par construction localement équivalente à $E_G H$. Donc d'après le théorème 1, il existe une forme de contact sur V, qui est un représentant de la structure de contact large de V. On a donc montré le

Théorème 2: *Sur une variété différentiable connexe et simplement connexe, toute structure de contact large admet un représentant de contact strict.*

On a vu qu'une structure de contact large détermine une $CCT(2n+1, \mathbb{R})$-structure. On peut établir (voir [4] pour une démonstration détaillée) que le sous-groupe compact maximal de la composante connexe de l'élément neutre de $CCT(2n+1, \mathbb{R})$ est $1 \times U(2n, \mathbb{R})$. Donc sur une variété connexe et simplement connexe, toute $CCT(2n+1, \mathbb{R})$-structure admet des $(1 \times U(2n))$-réductions (c'est-à-dire des structures de presque contact), donc des $CT(2n+1, \mathbb{R})$-structures.

On obtient ainsi une nouvelle forme du théorème 2:

Théorème 2': *V étant une variété connexe et simplement connexe, une $CCT(2n+1, \mathbb{R})$-structure détermine sur V une structure de contact large si et seulement si l'une de ses $CT(2n+1, \mathbb{R})$ réductions est ɧ-plate.*

Références

[1] ALBERT, C., MOLINO, P.: Pseudo-groupes de Lie et structures différentiables. Tome 1. Université des Sciences et Techniques du Languedoc. 1980.

[2] ALBERT, C.: Some properties of ɬ-flat manifolds. J. Diff. Geom. **11**, 103—128 (1976).

[3] GRAY, J. W.: Some properties of contact structures. Ann. Math. **29**, 421—450 (1959).

[4] MONNA, G.: Techniques de ɧ-platitude en géométrie de contact. Thèse. Université des Sciences et Techniques du Languedoc. 1981.

[5] MONNA, G.: Intégrabilité des structures de presque contact. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **291**, 215—217 (1980).

[6] SASAKI, S.: Almost Contact Manifolds. Lecture Notes. Tohoku University. Vol. 1. 1965. Vol. 2. 1967. Vol. 3. 1968.

Dr. G. MONNA
Université des Sciences et
Techniques du Languedoc
Institut de Mathématiques
Place Eugène Bataillon
F-34060 Montpellier Cedex, France