Werk

Titel: Die windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen I.

Autor: Meirer, Klaus

Jahr: 1981

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0091|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mh. Math. 91, 39—71 (1981)

Monatshefte für
Mathematik
© by Springer-Verlag 1981

Die windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen I

Von

Klaus Meirer, Wien

(Eingegangen am 7. Juli 1980)

Mit 2 Abbildungen

Abstract. The Ruled Surfaces with a Continuous Set of Plane Shade Lines. Already in 1933 J. BLANK found all ruled surfaces with two conjugated families of plane shade lines. In the late sixties H. BRAUNER solved a similar problem by determining all algebraic surfaces with only one family of plane shade lines. — We consider here only differentiable ruled surfaces with BRAUNER's condition, that carry at least one continuous family of plane shade lines. By using methods of projective differential geometry, algebra and synthetic projective geometry, it is possible to find all projective representatives of those surfaces. Although the assumption of BRAUNER is much weaker than BLANK's, each of these surfaces is an analytic, ruled surface of BLANK.

Windschiefe Flächen des dreidimensionalen reellen projektiven Raumes Π mit der geforderten Eigenschaft — wir werden diese Flächen abkürzend mit *ES-Regelflächen* bezeichnen — treten in der Literatur mehrfach auf. So bestimmt J. BLANK in [2] alle *differenzierbaren Regelflächen* mit einem *konjugierten Netz ebener Schattengrenzen* (*Kegellinien*), wobei er Methoden der *affinen Differentialgeometrie* benützt. Diese Regelflächen ergeben sich in der Arbeit [9] von O. MAYER als Sonderfälle *analytischer* Regelflächen mit *konjugierten Netzen aus Schattengrenzen*[1]. Sämtliche dieser analytischen Regelflächen mit einem Petersonschen Netz ebener Kurven sind *Regelflächen aus einem Geradennetz* [2], [9]. Da O. MAYER von analytischen Regelflächen in der komplexen Erweiterung von Π ausgeht, gibt es in seiner Arbeit nur *parabolische* und *hyperbolische*

[1] Nach A. VOSS heißen *konjugierte Netze aus Schattengrenzen (Kegellinien) Petersonsche Netze* und Flächen mit solchen Kurvennetzen dementsprechend *Petersonsche Flächen.*

0026—9255/81/0091/0039/$ 06.60

Netzregelflächen; weiters muß dann eine ebene Schattengrenze keinen reellen Ausschnitt haben. Die betrachteten Flächen aus einem parabolischen Geradennetz tragen genau ein konjugiertes Netz ebener Schattengrenzen, während es in hyperbolischen Geradennetzen zwei Typen gibt, solche mit genau einem und solche mit genau zwei derartigen Kurvennetzen. Über $\mathbb{R}$ gliedern sich die Mayerschen *hyperbolischen Netzregelflächen* auf in *elliptische* und *hyperbolische* mit nur *einem* Netz ebener Schattengrenzen sowie in *hyperbolische* mit *zwei* solchen Kurvennetzen.

Durch zweifache Änderung der Blankschen Voraussetzungen — eine Verschärfung und eine Abschwächung — ergibt sich die von H. BRAUNER in [5] gestellte Frage nach *algebraischen ES-Regelflächen*. Wie die Untersuchungen in [5] lehren, sind nichtquadratische, algebraische ES-Regelflächen stets *hyperbolische Netzregelflächen* mit *zwei konjugierten Netzen* aus ebenen Schattengrenzen. Demgemäß treten diese Flächen in den Arbeiten [2] und [9] als algebraische Beispiele auf.

In der vorliegenden Arbeit, die auf eine Anregung von H. BRAUNER zurückgeht, werden *alle differenzierbaren ES-Regelflächen* angegeben. Natürlich umfaßt die gewonnene Flächenklasse die algebraischen ES-Regelflächen. Überraschend stellt sich heraus, daß *jede ES-Regelfläche analytisch* ist und mit einer *Blankschen Regelfläche* übereinstimmt.

Die ersten Schritte zu diesem Ergebnis behandeln die analytische Fassung der auftretenden geometrischen Objekte (Abschnitt **1** und **2**). In **3** wird dann gezeigt, daß die Tangenten an die ebenen Schattengrenzen in den Punkten längs einer Erzeugenden einer *nichtquadratischen ES-Regelfläche* jeweils in der Erzeugendenschar einer *algebraischen Begleitregelfläche* dieser Schar ebener Schattengrenzen liegen (**Satz 1**); die gleiche Aussage (**Satz 2**) folgt rasch für die Begleitregelflächen der konjugierten Kurven der ebenen Schattengrenzen (*Streiflichtspuren*). Der nächste Schritt (*Abschnitt* **4**) besteht darin, einschränkende algebraische Bedingungen für diese Begleitregelflächen von höchstens 8. Grad abzuleiten, mit deren Hilfe ihr Zerfallen in Reguli gezeigt werden kann. Als erste Folge ergibt sich, daß die *ebenen Schattengrenzen* und ihre *Streiflichtspuren ein Paar konjugierter Doppelverhältnisscharen* auf der ES-Regelfläche bilden; entscheidend folgt weiter aus einem analytischen Ergebnis in **4.2**, daß *auch die Streiflichtspuren ebene Schattengrenzen* sind (**Satz 3**). Damit ist der Ausgangspunkt von BLANK erreicht, zugleich eröffnet

sich die Möglichkeit, die Blankschen Regelflächen auf rein synthetischem Weg zu finden*. — Die erste wesentliche Einsicht in die Geometrie der ES-Regelflächen wird durch das Studium der mit einer Schar ebener Schattengrenzen einer ES-Regelfläche definierten *Zentralbewegung* (vgl. [4, § 100, Lehrsatz 3] und [10]) gewonnen (Abschnitt **6**). Diese Zentralbewegung hat in mehrfacher Hinsicht spezielle geometrische Eigenschaften: Die *Zentralpunktmenge* (*Lichtpunktmenge*) *ist geradlinig*, die *Zentralebenen* (*Schattenebenen*) liegen in einem *Büschel*, und die *Kopplung* zwischen *Zentralpunkt* und *Zentralebene hat Platz in einer Projektivität* (**Satz 4**). Jede solche spezielle Zentralbewegung ist die Einschränkung einer *eingliedrigen, stetigen Gruppe halbaxialer, projektiver Kollineationen* auf eine Ebene durch die *Fixpunktachse* (**Satz 5**). Mit Hilfe dieser, *Projektivspiralung* mit *Fixachse* genannten Projektivbewegungen in Π gelingt es, die ES-Regelflächen als *doppelte Projektivspiralflächen* für *zwei speziell gekoppelte (konjugierte) Projektivspiralungen* zu kennzeichnen (**Satz 6** und **Satz 7**). Diese kinematische Erzeugungsweise der ES-Regelflächen liefert ein einfaches konstruktives Konzept für ihre graphische Behandlung. Weiters folgt daraus eine *einheitliche nichteuklidische Deutung* aller *ES-Regelflächen 1. Art* (das sind solche, deren Lichtpunktgerade zur Achse der Schattenebenen windschief liegt); nach Wahl einer geeigneten Maßquadrik für eine nichteuklidische Maßbestimmung in Π sind die ES-Regelflächen 1. Art *in sich bewegliche Clifford-Zylinder*.

Im letzten Abschnitt werden die ES-Regelflächen in Analogie zum Begriff *Affingesimsflächen* bei E. SALKOWSKI [11] als *Projektivgesimsregelflächen* interpretiert. Durch *affine Spezialisierung* der ES-Regelflächen können damit alle *Affingesimsregelflächen* gefunden werden, und zwar sind die *ES-Regelflächen 1. Art* die projektiven Repräsentanten für die Affingesimsregelflächen mit *einer Schar* bzw. mit *zwei Scharen* von *affin äquivalenten Profilkurven*, und die *ES-Regelflächen 2. Art* (Lichtpunktgerade und Achse der Schattenebenen schneiden einander), sind Repräsentanten für die anscheinend noch unbekannten, *nichtquadratischen Rückungsregelflächen* (das sind *Schiebregelflächen* mit *ebenen Schar- und Leitkurven*). Durch metrische Spezialisierung der ES-Regelflächen in einem *euklidischen* bzw. *pseudoeukli-*

---

* Hier endet der vorliegende erste Teil der Arbeit. Zur Orientierung des Lesers geben wir einen Überblick über den zweiten Teil, der im nächsten Band erscheinen wird.

dischen Raum findet man noch auf einfache Weise *alle Gesimsregelflächen* in diesen Räumen. Die Antwort auf diese Fragestellung — für euklidische Räume ist sie durch H. BRAUNER ([6], Satz 1) bereits gegeben — lautet: *Die einzigen Gesimsregelflächen in euklidischen und pseudoeuklidischen Räumen sind die Drehhyperboloide dieser Räume.*

R. WALTER wirft in [13, S. 361] die Frage nach windschiefen Flächen in Π auf, die *eine Schar ebener, projektiv äquivalenter Kurven*[2] tragen, wobei die Zuordnung zwischen diesen Kurven nicht durch die Erzeugenden der Regelfläche hergestellt wird. Die Antwort auf diese Frage folgt nun mit Kenntnis der ES-Regelflächen für den Sonderfall, daß die *ebenen Scharkurven auf der Regelfläche* speziell *durch* die *konjugierten Flächenkurven projektiv äquivalent* aufeinander bezogen werden. Denn nach einem von W. DEGEN für beliebige Flächen in Π bewiesenen Satz [8] müssen nämlich die ebenen Scharkurven in diesem Fall entweder Schattengrenzen sein — die Regelflächen sind also ES-Regelflächen bzw. Projektivgesimsregelflächen im Salkowskischen Sinn — oder erzeugende Kegelschnitte einer *parabolischen Kegelschnittfläche.* Die Regelflächen unter den zuletzt genannten Flächen hat H. BRAUNER in [7] angegeben, insbesondere jene, für welche die Kegelschnitte zusätzlich Schattengrenzen sind. Dabei erweisen sich alle windschiefen parabolischen Kegelschnittflächen als Flächen 3. Grades mit windschiefen getrennten Torsallinien. Zusammenfassend gilt: *Differenzierbare, windschiefe Regelflächen mit einer stetigen Schar ebener Kurven, welche durch ihre Konjugierten projektiv äquivalent aufeinander bezogen werden, sind stets analytisch und entweder windschiefe parabolische Kegelschnittflächen und damit kubisch oder Blanksche Regelflächen mit mindestens einem Petersonschen Netz ebener Kurven.*

1. Eine ebene Schattengrenze auf einer C^r-Fläche $\psi(G)$, $\psi: G(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathfrak{P}$, mit $\psi \in C^r(G)$, G ein Gebiet und $\mathfrak{P}$ ist die Punktmenge in Π, ist eine C^s-Flächenkurve $c := \psi \circ \gamma(I)$, $\gamma: I(\subset \mathbb{R}) \to$ $\to G(\subset \mathbb{R}^2), \gamma \in C^s(I), s \leqslant r$; sie ist einerseits Teil der Schnittkurve von $\psi(G)$ mit einer nicht auf $\psi(G)$ liegenden Ebene und andererseits Menge der Berührungspunkte aller Tangentialebenen von $\psi(G)$ durch einen festen, *Lichtpunkt* genannten Punkt L. Jede ebene

[2] R. WALTER nennt in [13, **2.5**] Flächen mit einer Schar projektiv äquivalenter Kurven ebenfalls *Projektivgesimsflächen.* Die Projektivgesimsregelflächen im Sinne von WALTER umfassen daher die oben angegebenen Projektivgesimsregelflächen im Salkowskischen Sinn.

Schattengrenze c kann daher auch durch die beiden lokal differentialgeometrischen, projektiv invarianten Eigenschaften,

„Stationäre Schmiegebene in jedem Punkt von c“ (1.1a)

„Stationärer Kehlpunkt in jeder Ebene der $\psi(G)$ längs c berührend angeschriebenen Torse“, (1.1b)

gekennzeichnet werden. Ist dann τ eine C^k-Abbildung eines reellen t-Intervalls $J \subset \mathbb{R}$ in die Ebenenmenge $\mathfrak{E}$ von Π

$$\tau: t(\in J) \mapsto \varepsilon^{(t)}(\in \mathfrak{E}), \quad \tau \in C^k(J),\ k \geqslant 0, \tag{1.2}$$

und $c^{(t_0)} = \psi \circ \gamma^{(t_0)}(I)$ mit $\gamma^{(t_0)}: I \times t_0 (\in J) \to G (\subset \mathbb{R}^2)$ eine ebene Schattengrenze auf der Schnittkurve $\varepsilon^{(t_0)} \cap \psi(G)$, so nennen wir die Menge $\Gamma := \{\varepsilon^{(t_0)} \in \mathfrak{E} \mid \varepsilon^{(t_0)} = \tau(t_0),\ t_0 \in J\}$ *Torse der Schattenebenen*; die Menge der durch $\varepsilon^{(t)}$ bestimmten, mit $t \in J$ variierenden Lichtpunkte $L^{(t)}$ heißt *Lichtkurve l* der Schar von Schattengrenzen. Die Menge der ebenen Schattengrenzen $[c^{(t)}] := \{c^{(t_0)} \subset \psi(G) \mid c^{(t_0)} = \psi \circ \gamma^{(t_0)}(\mathrm{I}),\ c^{(t_0)}$ erfüllt (1.1), $t_0 \in J\}$ ist wegen der Differenzierbarkeitsklasse von Γ, (1.2), eine $C^k(I)$-Schar von C^s-Flächenkurven.

Eine zweckmäßige analytische Fassung der Eigenschaften (1.1) einer ebenen Schattengrenze soll ihre duale Entsprechung wiedergeben. Diese Forderung erfüllen die von G. Bol in [4], § 100, mit Hilfe des Kalküls der halbinvarianten Differentiation abgeleiteten analytischen Bedingungen (100, 9) und (100, 14) für ebene Schattengrenzen auf beliebigen, von parabolischen Punkten freien C^r-Flächen. Da wir an mehreren Stellen der vorliegenden Arbeit das Verhalten der Schattengrenzen einer ES-Regelfläche nicht nur lokal, sondern in den Punkten längs einer ganzen Erzeugenden in Π betrachten, müssen wir zunächst den Begriff „Umgebung einer Regelfläche in Π längs einer windschiefen Erzeugenden“ definieren und analytisch fassen[3].

2. Eine Regelfläche Φ in Π, aufgefaßt als Teilmenge von $\mathfrak{P}$, wird erzeugt durch die Verbindungsgeraden zweier zu gleichem Parameterwert gehöriger Punkte[4] auf verschiedenen Leitkurven von Φ

[3] In Abschnitt **3** werden die analytischen Ausdrücke für die Eigenschaften (1.1) einer ebenen Schattengrenze auf einem Regelflächenstück $\varphi(G)$, $\varphi: G \to \mathfrak{P}$, „aus der Umgebung längs einer windschiefen Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche in Π“ direkt abgeleitet. Dabei ersparen wir uns die aufwendige Arbeit, die Bolschen Gleichungen für C^r-Regelflächenstücke zu spezialisieren.

[4] Punkte $X \in \Pi$ werden in der üblichen Weise mit eindimensionalen Vektorräumen $X := \{x\varrho \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \varrho \in \mathbb{R}\}$ des vierdimensionalen arithmetischen Vektorraumes $\mathbb{R}^4$ identifiziert.

$$\mathfrak{y}(u)\,\mathbb{R} \text{ bzw. } \mathfrak{z}(u)\,\mathbb{R}, \text{ mit } \mathrm{Rg}(\mathfrak{y}(u), \mathfrak{z}(u)) = 2 \,\forall\, u \in U \subset \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Damit hat die Punktmenge Φ in Π die Darstellung

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}(u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R})\,\mathbb{R} = (v_0\,\mathfrak{y}(u) + v_1\,\mathfrak{z}(u))\,\mathbb{R} \\ \text{für } (u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R}) \in U \times \Pi_1, \end{gathered} \quad (2.2)$$

Π_1 ist hier die reelle projektive Gerade. Die Menge

$$M := U \times \Pi_1 = \{(u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R}) \mid u \in \mathbb{R},\ (v_0, v_1)\,\mathbb{R} \in \Pi_1\}, \quad (2.3)$$

eine Teilmenge von $\Pi_1 \times \Pi_1$[5], ist eine *Mannigfaltigkeit* mit einem speziellen *zweikartigen Atlas*. Die beiden M überdeckenden *Koordinatenumgebungen*

$$W_\varkappa := \{(u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R}) \mid u \in U \subset \mathbb{R},\ (v_0, v_1)\,\mathbb{R} \in \Pi_1,\ v_\varkappa \neq 0\},\ \varkappa = 0, 1, \quad (2.4a)$$

zusammen mit den *Homöomorphismen*

$$\begin{gathered} \xi_\varkappa : (u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R}) \in W_\varkappa \mapsto (u, v_\alpha / v_\varkappa) \in \xi_\varkappa(W_\varkappa) \subset \mathbb{R}^2, \\ \alpha, \varkappa \in \{0, 1\} \text{ und } \alpha \neq \varkappa, \end{gathered} \quad (2.4b)$$

ergeben zwei C^∞-*verträgliche Karten* $(W_\varkappa, \xi_\varkappa), \varkappa = 0, 1$, eines *Atlas* von M.

Ein *Erzeugendenpaar* $e(u_1)$, $e(u_2)$ auf Φ, (2.2), heißt *windschief* bzw. *schneidend* bzw. *Doppelerzeugende*, wenn

$$\begin{aligned} &\mathrm{Rg}(e(u_1), e(u_2)) := \\ &:= \mathrm{Rg}(\mathfrak{y}(u_1), \mathfrak{z}(u_1), \mathfrak{y}(u_2), \mathfrak{z}(u_2)) = 4 \text{ bzw. } = 3 \text{ bzw. } = 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

für $u_1 \neq u_2$, $(u_1, u_2) \in U \times U$ gilt. Die durch (2.2) dargestellte globale Abbildung $f: M \to \mathfrak{P}$ mit

$$f: (u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R}) \in M \mapsto \mathfrak{x}(u; (v_0, v_1)\,\mathbb{R})\,\mathbb{R} \quad (2.6)$$

prägt der Regelfläche die Identifizierungstopologie bzgl. f auf. Ist dann $U_0 \subseteq U$ eine Umgebung in U, so daß $\Phi_0 := f(U_0 \times \Pi_1)$ *einfach* ist, so ist die Einschränkung von f auf $M_0 := U_0 \times \Pi_1$ injektiv. Infolgedessen ist $\Phi_0 = f(M_0)$ eine C^s-*Mannigfaltigkeit* mit einem *zweikartigen*

---

[5] Dieser zweifach projektive Raum hat die Struktur einer ringförmigen Quadrik Q in Π (*Segremannigfaltigkeit*) mit den beiden Erzeugendenscharen als Parameterlinien. Schlitzt man Q längs einer Erzeugenden, so bekommt man die Struktur von $\mathbb{R} \times \Pi_1$ mit den punktierten Erzeugenden als Bilder der u-Linien und den vollen Erzeugenden als Bilder der Parameterlinien u = konstant.

Atlas[6] $\{f(W_\varkappa^0),\ \xi_\varkappa \circ f^{-1}\}$, mit $W_\varkappa^0 := \xi_\varkappa^{-1}(U_0 \times \mathbb{R})$, $\varkappa = 0,1$. Die Bildmengen $V_\varkappa = f(W_\varkappa^0)$ überdecken $f(M_0)$. Jeder spezielle Weg

$$\varphi: G \subset \xi_\varkappa(W_\varkappa^0) \subset \mathbb{R}^2 \to \Phi_0,\ G \text{ offen und zusammenhängend,} \tag{2.7}$$

liefert ein *Regelflächenstück in* Π auf der *einfachen Regelfläche* Φ_0, (2.2) mit $\mathrm{Rg}(e(u_1), e(u_2)) = 4$ über U_0, mit der speziellen Parametrisierung

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}(u, v)\,\mathbb{R} = (\mathfrak{y}(u) + v\,\mathfrak{z}(u))\,\mathbb{R} \\ \forall (u, v) \in G \subset \xi_0(W_0^0) \subset \mathbb{R}^2,\ v := v_1/v_0 \end{gathered} \tag{2.8 a}$$

bzw.

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}(u, v)\,\mathbb{R} = (v\,\mathfrak{y}(u) + \mathfrak{z}(u))\,\mathbb{R} \\ \forall (u, v) \in G \subset \xi_1(W_1^0) \subset \mathbb{R}^2,\ v = v_1/v_0, \end{gathered} \tag{2.8 b}$$

wobei $\mathrm{Rg}(e(u_1), e(u_2)) = 4\ \forall (u_1, u_2) \in U_0 \times U_0$ gilt[7]. Da (2.8 a) über $\xi_0(W_0^0 \cap W_1^0)$ durch den Koordinatenwechsel $\xi_1^{-1} \circ \xi_0 : (u, v) \in \in U_0 \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto (u, 1/v) \in U_0 \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in (2.8 b) übergeht, werden wir abkürzend an Stelle von (2.8 a, b) auch

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}(u, v)\,\mathbb{R} = (\mathfrak{y}(u) + v\,\mathfrak{z}(u))\,\mathbb{R} \\ \forall (u, v) \in G \subset U_0 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ \infty := 1/0, \end{gathered} \tag{2.8 c}$$

schreiben.

Sind die Leitkurven (2.1) der Regelfläche Φ in Π aus $C^r(U)$, so nennen wir Φ eine C^r-Regelfläche in Π. Zu jeder Erzeugenden $e(u_0) \subset \Phi \subset \mathfrak{P}$ gehört dann eine gewisse Rangzahl

$$\begin{gathered} 2 \leqslant \mathrm{Rg}(e(u_0)) := \mathrm{Rg}(\mathfrak{y}(u_0),\ \mathfrak{z}(u_0),\ \dot{\mathfrak{y}}(u_0),\ \dot{\mathfrak{z}}(u_0)) \leqslant 4 \\ (\text{„}\cdot\text{“ bedeutet } d/du). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Ist diese Rangzahl 4 bzw. 3 bzw. 2, so heißt $e(u_0)$ *windschief* bzw. *torsal* bzw. *Rückkehrerzeugende*[8]

---

[6] Die Identifizierungstopologie von Φ_0 bzgl. f muß nicht mit der Spurtopologie der Quotiententopologie in $\mathfrak{P} \subset \Pi$ auf Φ_0 übereinstimmen.

[7] Gehören die Leitkurvendarstellungen (2.1) der Klasse $C^r(U)$, $r \geqslant 1$, an, so ist jede durch (2.8) dargestellte Fläche $\varphi(G)$ ein C^r-Regelflächenstück auf Φ_0. Jede zu $\mathfrak{x}(u, v)$ proportionale Vektorfunktion $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(u, v)\,\varrho(u, v)$, mit $\varrho(u, v)$ als eine von Null verschiedene C^r-Umnormungsfunktion auf G, stellt dieselbe C^r-Fläche $\varphi(G)$ in Π dar (vgl. [3], § 23 und § 28).

[8] Die Tangenten an die beiden Leitkurven in den Punkten einer windschiefen Erzeugenden sind demnach stets windschief und in den Punkten einer torsalen Erzeugenden — falls beide existieren — komplanar, mit der Torsalebene $\mathfrak{y}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \dot{\mathfrak{y}}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \dot{\mathfrak{z}}(u_0)\,\mathbb{R}$ als Trägerebene.

C^r-Regelflächen (2.2) mit nur windschiefen Erzeugenden

$$\det(\mathfrak{y}(u), \mathfrak{z}(u), \dot{\mathfrak{y}}(u), \dot{\mathfrak{z}}(u)) \neq 0 \quad \forall u = U \tag{2.10a}$$

und ohne Doppelerzeugenden

$$3 \leqslant \mathrm{Rg}(e(u_1), e(u_2)) \leqslant 4 \quad \forall (u_1, u_2) \in U \times U, \tag{2.10b}$$

werden im folgenden *rein windschief* genannt. Dazu gilt folgender

Hilfssatz 1: *Zu jeder windschiefen Erzeugenden $e(u_0)$ auf Φ, (2.2), gehört eine Umgebung $U_0 \subseteq U$, so daß Φ_0, (2.2), über $U_0 \times \Pi_1$ rein windschief ist*[9].

Zur Untersuchung lokaler Eigenschaften ebener Schattengrenzen auf windschiefen Regelflächen in Abschnitt **3**, werden wir uns stets auf solche rein windschiefen Teile Φ_0 von Φ „in der Umgebung einer windschiefen Erzeugenden" zurückziehen.

2.1. Jedes C^r-Flächenstück $\varphi(G)$, (2.8 c), aus einer rein windschiefen C^r-Regelfläche Φ_0, (2.2) mit (2.10), ist im Sinne der Differentialgeometrie *regulär* und trägt nur hyperbolische Flächenpunkte (vgl. [3], § 25). Daher können die Leitkurven (2.1) einer solchen Regelfläche Φ_0 und die Parameterlinie $(v_0, v_1)\,\mathbb{R} = (1, 1)\,\mathbb{R}$ als Schmieglinien gewählt werden. In diesem Fall gelten die Bedingungen

$$\det(\mathfrak{y}, \dot{\mathfrak{y}}, \ddot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{z}) = 0, \quad \det(\mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}) = 0 \; \forall u \in U \tag{2.11a}$$

und

$$\det(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{y}}) + \det(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{y}}, \ddot{\mathfrak{z}}) = 0 \; \forall u \in U. \tag{2.11b}$$

Als Folge davon ist das durch (2.8 c) mit (2.10) und (2.11) beschriebene Parameternetz ein *Schmieglinniennetz* für $\varphi(G) \subset \Phi_0$. Durch Umnormung der Leitkurvendarstellungen (2.1) mit einer gemeinsamen auf U_0 stets von Null verschiedenen C^r-Funktion $\varrho(u)$ kann die Bedingung (2.10 a) für eine reguläre, nichttorsale Fläche $\varphi(G) \subset \Phi_0$ noch durch

$$\det(\mathfrak{y}, \dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{z}}) = \varkappa = \text{konstant} \neq 0 \quad \forall u \in U_0 \subset \mathbb{R} \tag{2.12}$$

normiert werden. Diese gegenüber *Sterntransformationen* (siehe [3], § 28) invariante Normierung ist für das Rechnen zweckmäßig, weil die

[9] Da Doppelerzeugenden auf Φ diskret liegen, kann ein Intervall $U_1 \subseteq U$, $u_0 \in U_1$, so gewählt werden, daß $\mathrm{Rg}(e(u_1), e(u_2)) \geqslant 3 \; \forall (u_1, u_2) \in U_1 \times U_1$. Wegen der Stetigkeit von $G(u) := \det(\mathfrak{y}(u), \mathfrak{z}(u), \dot{\mathfrak{y}}(u), \dot{\mathfrak{z}}))$ auf U und $G(u_0) \neq 0$, existiert $U_0 \subseteq U_1$, $u_0 \in U_0$ mit $G(u) \neq 0 \; \forall u \in U_0$. □

Vektorfunktionen in den auftretenden Gleichungen nicht mehr mit einer C^r-Umnormungsfunktion $\varrho(u, v)$ behaftet sind. Für die Leitschmieglinien einer durch (2.8 c, 10, 11, 12) erfaßten Fläche $\varphi(G)$ folgen dann durch Vergleich der Ableitung von (2.11 a) mit (2.11 b) und wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{y}$, $\dot{\mathfrak{y}}$, $\mathfrak{z}$, $\dot{\mathfrak{z}}$ auf G nach (2.10 a) die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{y}} &= a(u)\,\mathfrak{y}(u) + b(u)\,\mathfrak{z}(u) \\ \ddot{\mathfrak{z}} &= c(u)\,\mathfrak{y}(u) + d(u)\,\mathfrak{z}(u) \quad \forall\, u \in U. \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2. Ein Punkt $\varphi(u_0, v_0)$ einer nichttorsalen, auf ihr Schmiegliniennetz bezogenen C^r-Regelfläche $\varphi(G)$, (2.8 c, 10 a, 11, 12), heißt *Fleknodalpunkt*, wenn in diesem Punkt die von der Erzeugenden verschiedene Schmieglinie $v_0 =$ konstant, $v_0 \in V$, einen *Wendepunkt* aufweist ([3], §26, S. 104). Der zweite Ableitungspunkt einer u-Schmieglinie auf $\varphi(G)$ hat wegen (2.13) die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= [a(u) + v\,c(u)]\,\mathfrak{y}(u) + [b(u) + v\,d(u)]\,\mathfrak{z}(u) \\ &\left(\text{„}\mathfrak{x}_u\text{“ bedeutet } \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Da $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + v\,\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_u = \dot{\mathfrak{y}} + v\,\dot{\mathfrak{z}} + \dot{v}\,\mathfrak{z}$ nach (2.12) für alle $(u, v) \in G$ linear unabhängig, jedoch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_{uu}$ in einem Wendepunkt einer u-Schmieglinie linear abhängig sind, ergibt sich wegen (2.14) für einen Fleknodalpunkt: $\mathfrak{x}_{uu}(u_0, v_0) = \varrho \cdot \mathfrak{x}(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in G$. Durch Koeffizientenvergleich dieser Vektorgleichung mit (2.14) finden wir als notwendige und hinreichende Bedingung für einen Fleknodalpunkt $\varphi(u_0, v_0)$ das Verschwinden der im projektiven Parameter v quadratischen Funktion[10]

$$\begin{aligned} \beta(u, v) &:= b(u) + [d(u) - a(u)]\,v - c(u)\,v^2, \\ \beta &: (u, v) \in G \mapsto \beta(u, v) \in \mathbb{R}, \text{ für } (u_0, v_0) \in G. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sind sämtliche Punkte einer Regelfläche $\varphi(G)$ Fleknodalpunkte, so muß $\beta(u, v)$ auf G identisch Null werden, oder gleichwertig dazu gilt

$$b(u) = c(u) = 0 \quad \text{und} \quad d(u) - a(u) = 0 \quad \forall\, u \in U. \tag{2.16}$$

---

[10] Nach [3], §28 und [4], §76 ist $\beta(u, v)$ die einzige wesentliche Halbinvariante, durch welche die auf Schmieglinien bezogene Regelfläche $\varphi(G) \subset \Phi$ bis auf kollineare Umformungen festgelegt ist.

Die von den Erzeugenden verschiedenen Schmieglinien tragen in diesem Fall nur Wendepunkte, sie sind also geradlinig, und $\varphi(G) \subset \Phi_0$ ist infolgedessen ein Flächenstück auf einer ringförmigen Quadrik.

Verschwindet $\beta(u, v)$ identisch in v an einer festen Stelle u_0, $u_0 \in U$, so besteht die ganze Erzeugende $e(u_0)$ der Trägerregelfläche Φ_0 von $\varphi(G)$ aus Fleknodalpunkten. Eine solche Erzeugende $e(u_0)$ heißt *reguloid.* Jede *windschiefe, nichtreguloide* Erzeugende von Φ_0 trägt daher *höchstens zwei Fleknodalpunkte.*

2.3. Für die analytische Fassung der dualen Eigenschaften (1.1) einer ebenen Schattengrenze auf einer C^r-Regelfläche $\varphi(G)$ in Π benötigen wir noch eine Darstellung der mit der Punktfläche $\varphi(G) \subset \Phi$ verknüpften Tangentialebenenmenge $\Phi^* \subset \mathfrak{E}$. Die Tangentialebene in einem Punkt $\mathfrak{x}\,\mathbb{R}$ einer nichttorsalen C^r-Regelfläche $\varphi(G)$, (2.8c, 10a), hat mit $\mathfrak{p}\,\mathbb{R}$ als laufendem Punkt die Gleichung

$$\det(\mathfrak{p}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{y}}) + v \cdot \det(\mathfrak{p}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{z}}) = 0. \tag{2.17}$$

Deutet man diese Ebene (2.17) in Π als Punkt $X^* := \{\varrho\,\mathfrak{x}^* \in \mathbb{R}^4 \mid \mathfrak{x}^* \in \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\},\ \varrho \in \mathbb{R}\}$, in dem zu Π dualen projektiven Raum Π^*, so sind die Tangentialebenenmengen $\mathbb{R}\,\mathfrak{y}^*(u)$ bzw. $\mathbb{R}\,\mathfrak{z}^*(u)$ von $\varphi(G)$ längs der Leitkurven $v = 0$ bzw. $v = \infty$,

$$\det(\mathfrak{p}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{y}}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathfrak{p}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dot{\mathfrak{z}}) = 0 \quad \forall u \in U, \tag{2.18}$$

bereits geeignete Leitkurven für die zu Φ duale Regelfläche Φ^* in $\mathfrak{E}$ von der Art, daß jedes Flächenstück $\varphi^*(G)$, $\varphi^*: G \mapsto \Pi^*$, auf der Regelfläche Φ^* als Menge der Tangentialebenen von $\varphi(G)$ die Darstellung

$$\mathbb{R}\,\mathfrak{x}^*(u, v) = \mathbb{R}\left(\mathfrak{y}^*(u) + v\,\mathfrak{z}^*(u)\right) \quad \forall (u, v) \in G,\ G \subset U \times \mathbb{R} \tag{2.19}$$

bekommt. Wird $\varphi(G)$ auf ein Schmiegparameternetz (2.8c, 10, 11) bezogen, so ist auch das durch (2.19) beschriebene Parameternetz auf $\varphi^*(G)$ ein Schmiegnetz, weil das Begriffspaar {Punkt, Schmiegebene} für einen Nichtwendepunkt einer Flächenkurve beim Übergang von $\varphi(G)$ zur dualen Fläche $\varphi^*(G) \subset \Pi^*$ nur vertauscht wird[11].

---

[11] Beim Dualisieren geht ein Schmiegstreifen längs einer wendepunktfreien Schmiegparameterlinie $v_0 =$ konstant, $v_0 \in V$, von $\varphi(G)$ in einen Schmiegstreifen der dualen Fläche $\varphi^*(G)$ über. Isolierte Wendepunkte auf einer Schmieglinie von $\varphi(G)$ verursachen isolierte Wendepunkte auf der Leitkurve des dualen Streifens von $\varphi^*(G)$. — Die analytischen Bedingungen für das Schmiegliniennetz von $\varphi^*(G)$, (2.19), müssen daher aus (2.11) folgen und haben natürlich dieselbe Bauart.

Ist das Schmiegliniennetz von $\varphi(G)$ zusätzlich nach (2.12) normiert, so nimmt diese Determinante beim Dualisieren den Wert $\det(\mathfrak{y}^*, \dot{\mathfrak{y}}^*, \mathfrak{z}^*, \dot{\mathfrak{z}}^*) = 1/\varkappa = \text{konstant}$, $u \in U$, an (vgl. [4], § 79). Die Ableitungsgleichungen der Leitschmieglinien $\mathfrak{y}^*(u)$ bzw. $\mathfrak{z}^*(u)$ des zu $\varphi(G)$, (2.8c, 10, 11, 12), dualen Flächenstücks $\varphi^*(G)$ auf Φ^* haben daher die Gestalt (2.13)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{y}}^* &= a^*(u)\,\mathfrak{y}^*(u) + b^*(u)\,\mathfrak{z}^*(u) \\ \ddot{\mathfrak{z}}^* &= c^*(u)\,\mathfrak{y}^*(u) + d^*(u)\,\mathfrak{z}^*(u) \quad \forall u \in U. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Der Zusammenhang zwischen den Koeffizientenfunktionen in (2.13) und (2.20) ergibt sich sofort, wenn man die zu $\mathbb{R}\,\ddot{\mathfrak{y}}^*$ bzw. $\mathbb{R}\,\ddot{\mathfrak{z}}^*$ gehörigen, aus (2.18) folgenden Gleichungen der Punktfelder in Π betrachtet. Es muß gelten

$$a^*(u) = d(u),\ b^*(u) = -b(u),\ c^*(u) = -c(u),\ d^*(u) = a(u). \tag{2.21}$$

3. Eine Schattengrenze c auf einer rein windschiefen C^r-Regelfläche Φ_0, (2.2, 10), Hilfssatz **1**, deren Lichtzentrum L auf keiner Erzeugenden von Φ_0 liegt, hat

mit jeder Erzeugenden von Φ_0 genau einen Punkt gemeinsam (3.1a)

und berührt keine Erzeugende[12]. (3.1b)

Gehört das Lichtzentrum L einer Erzeugenden $e \subset \Phi_0$ an, so spaltet sich die Schattengrenze c auf in e und einen „*eigentlichen Teil*" c_1 von c; c_1 besitzt L als „*Grenzpunkt*" und die von e verschiedene Schmiegtangente von Φ_0 in L als „*Grenztangente*"[13]. Auch der eigentliche Teil c_1 einer solchen Schattengrenze hat somit die Eigenschaften (3.1 a und b).

Ist $\varphi(G)$ ein reguläres, nichttorsales C^r-Regelflächenstück mit den Erzeugenden als v-Linien, (2.8c, 10), auf Φ_0, und ist ferner $k := \varphi \circ \gamma(I)$ eine Flächenkurve auf $\varphi(G)$ mit den Eigenschaften (3.1a, b), so ist das Urbild $\gamma(I)$ von k in G Graph einer Funktion

$$g: u \in U \subset \mathbb{R} \mapsto g(u) \in \mathbb{R} \tag{3.2a}$$

[12] Die Schattengrenze c schneidet eine nicht mit L inzidente, windschiefe Erzeugende $e \subset \Phi_0$ in dem zur Tangentialebene Le gehörigen Berührungspunkt X, und die Tangente an c in X ist als konjugierte Flächentangente zum Lichtstrahl $LX (\neq e)$ stets von e verschieden.

[13] Wenn c_1 als ebene Kurve vorausgesetzt wird, muß c_1 nach [5], S. 2, sogar geradlinig sein, wobei c_1 keine Erzeugende von Φ_0 ist.

und kann durch den speziellen Weg

$$\gamma\colon u\in U\mapsto (u, g(u))\in\mathbb{R}^2 \tag{3.2b}$$

beschrieben werden.

Das Urbild in G jeder ebenen Schattengrenze $c^{(t_0)}$, $t_0\in J$, einer stetigen Schar auf einem regulären, nichttorsalen C^r-Flächenstück einer rein windschiefen Regelfläche Φ_0 gestattet daher eine Parametrisierung der Gestalt (3.2b); insbesondere gilt das auch für jeden eigentlichen Teil $c_1^{(t_0)}$ einer Schattengrenze, wenn das zugehörige Lichtzentrum $L^{(t_0)}$ auf einer Erzeugenden e von $\Phi_0(\supset\varphi(G))$ liegt. Benützt man wie oben zwei Abbildungen $g\colon K\to\mathbb{R}$ und $\gamma\colon K\to\mathbb{R}^2$, wobei jetzt K eine offene Menge aus $U\times J$ ist

$$g\colon (u,t)\in U\times J\mapsto g(u,t)\in\mathbb{R}, \tag{3.3a}$$

$$\gamma\colon (u,t)\in U\times J\mapsto (u, g(u,t))\in\mathbb{R}^2, \tag{3.3b}$$

so ist $\gamma^{(t_0)}:=\gamma\,|\,U\times\{t_0\}$ ein spezieller Weg in G vom Typ (3.2b),

$$\gamma^{(t_0)}\colon (u,t_0)\in U\times\{t_0\}\mapsto (u, g_0(u))\in\mathbb{R}^2, \tag{3.4a}$$

mit

$$\begin{aligned} &g_0:=g\,|\,U\times\{t_0\}\colon (u,t_0)\mapsto g_0(u)\in\mathbb{R}\\ &\overset{(j)}{g_0}:=\left.\frac{\partial^j g}{\partial u^j}\right|U\times\{t_0\}\colon (u,t_0)\mapsto \overset{(j)}{g_0}(u):=\frac{\partial^j g(u,t_0)}{\partial u^j},\ j\in\mathbb{N},\ t_0\in J. \end{aligned} \tag{3.4b}$$

Nach den obigen Überlegungen kann das Urbild einer Schattengrenze $c^{(t_0)}$ bzw. eines eigentlichen Teiles $c_1^{(t_0)}$ aus einer stetigen Schar auf einer rein windschiefen Regelfläche Φ_0 über $U_0\times\Pi_1$ durch den speziellen Weg $\gamma^{(t_0)}(U_0\times\{t_0\})$ erfaßt werden.

3.1. Eine Flächenkurve k auf einem regulären, torsallinienfreien C^r-Regelflächenstück $\varphi(G)$, (2.8, 10) einer rein windschiefen Regelfläche Φ_0 mit einem Urbild (3.4) ist genau dann eben, wenn (1.1a), also

$$\Delta(g_0(u)):=\det\left(x(u,g_0(u)),\frac{dx}{du},\frac{d^2x}{du^2},\frac{d^3x}{du^3}\right)=0\ \forall\, u\in U_0 \tag{3.5a}$$

gilt. Die Bedingung (1.1b) für die Kegelgestalt der Streifentorse k^* längs $k\subset\varphi(G)$ geht beim Dualisieren von k^* und $\varphi(G)$ über in die Eigenschaft (1.1a) der zu k^* dualen Kurve auf $\varphi^*(G)$. Gleichwertig zu (1.1b) ist daher

$$\Delta^*(g_0(u)) := \det\left(x^*(u, g_0(u)), \frac{dx^*}{du}, \frac{d^2x^*}{du^2}, \frac{d^3x^*}{du^3}\right) = 0 \;\forall u \in U_0. \quad (3.5\text{b})$$

Die Gleichungen (3.5a) und (3.5b) sind Differentialgleichungen 3. Ordnung für die Funktion $g(u)$, (3.4b). Wird $\varphi(G)$ auf das Schmiegparameternetz bezogen, (2.8c, 10, 11), und nach (2.12) normiert, so findet man unter Benützung der Ableitungsgleichungen (2.13) für (3.5a) nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned}\Delta(g_0(u)) &= b^2 + 2b(d-a)g_0(u) + (a^2 - 2ad + d^2 - 2bc)g_0^2(u) - \\ &- 2c(d-a)g_0^3(u) + c^2 g_0^4(u) - 2\dot{b}\dot{g}_0(u) - 2(\dot{d}-\dot{a})g_0(u)\dot{g}_0(u) + \\ &+ 2\dot{c}g_0^2(u)\dot{g}_0(u) + (2a - 6d)\dot{g}_0^2(u) + 8c g_0(u)\dot{g}_0^2(u) + 4b\ddot{g}_0(u) + \\ &+ 4(d-a)g_0(u)\ddot{g}_0(u) - 4c g_0^2(u)\ddot{g}_0(u) + 3\ddot{g}_0^2(u) - 2\dot{g}_0(u)\dddot{g}_0(u) = 0 \\ &\forall u \in U_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wählt man für die zusammengesetzten Abbildungen $\beta \circ \gamma^{(t_0)}: U \to \mathbb{R}$ und $\frac{\partial^j \beta}{\partial u^k \partial v^l} \circ \gamma^{(t_0)}: U \to \mathbb{R}$ die abkürzenden Bezeichnungen

$$\tilde{\beta} := \beta \circ \gamma^{(t_0)} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\beta}_{u..v..} := \beta_{u..v..} \circ \gamma^{(t_0)}, \quad (3.7)$$

so kann (3.6) auf die übersichtlichere Gestalt

$$\begin{aligned}0 = \Delta(g_0(u)) &= \tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\beta}_u \dot{g}_0(u) - 2\tilde{\beta}_v \dot{g}_0^2(u) + (4c\,g_0(u) - 4d)\dot{g}_0^2(u) + \\ &+ 4\tilde{\beta}\ddot{g}_0(u) + 3\ddot{g}_0^2(u) - 2\dot{g}_0(u)\dddot{g}_0(u) \;\; \forall u \in U_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

gebracht werden.

Wegen der Dualität der Begriffspaare {Punktfläche $\varphi(G)$, ebene Kurve auf $\varphi(G)$} und {Tangentialebenenmenge von $\varphi(G)$, Tangentialebenen von $\varphi(G)$ aus einem Bündel} in Π, ergibt sich eine aus (3.5b) folgende Differentialgleichung für das Urbild einer Schattengrenze auf einer Fläche $\varphi(G)$, (2.8c, 10, 11, 12), indem man in (3.6) die ungesternten Funktionen a, b, c, d in u durch die gesternten nach (2.21) ersetzt. Auf diese Weise finden wir

$$\begin{aligned}0 = \Delta^*(g_0(u)) &= \tilde{\beta}^2 + 2\tilde{\beta}_u \dot{g}_0(u) + 2\tilde{\beta}_v \dot{g}_0^2(u) - (4c\,g_0(u) + 4a)\dot{g}_0^2(u) \\ &- 4\tilde{\beta}\ddot{g}_0(u) + 3\ddot{g}_0^2(u) - 2\dot{g}_0(u)\dddot{g}_0(u) \;\; \forall u \in U. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die aus (3.8) und (3.9) folgende notwendige Bedingung $\Delta(g_0(u)) - \Delta^*(g_0(u)) = 0$ für ebene Schattengrenzen mit dem Urbild (3.4a) hat die einfache Bauart

$$0 = \Delta(g_0(u)) - \Delta^*(g_0(u)) = \\ = -\tilde{\beta}\ddot{g}_0(u) + \tfrac{1}{2}\tilde{\beta}_u \dot{g}_0(u) + \tilde{\beta}_v \dot{g}_0^2(u) \quad \forall u \in U.^{14} \tag{3.10}$$

Das Verschwinden von β an einer festen Stelle $(u_0, v_0) \in G$ kennzeichnet nach **2.2** einen Fleknodalpunkt. Insbesondere liegt $\varphi(G)$ für $\beta(u, v) = 0 \; \forall (u, v) \in G$ auf einer ringförmigen Quadrik. Weil jeder ebene Schnitt einer Quadrik auch Schattengrenze ist, schließen wir windschiefe, quadratische Regelflächen im folgenden aus. Ferner schneiden wir das Definitionsgebiet G einer nichtquadratischen, nichttorsalen Regelfläche längs des Urbildes der Fleknodalpunktmenge $\beta^{-1}0$ auf; ist dann

$$H \subset G, \; H \text{ offen und } \beta(H) \neq 0, \tag{3.11}$$

so ist $\varphi(H) (\subset \varphi(G))$ frei von Fleknodalpunkten. Wir verstehen im folgenden unter $\varphi(H)$ stets ein *nichtquadratisches, nichttorsales, fleknodalpunktfreies C^r-Regelflächenstück* (2.8 c, 10, 11, 12) mit (3.11) auf einer *rein windschiefen Regelfläche* (2.2, 10).

Auf der Definitionsmenge H von $\varphi(H)$ folgt nun aus (3.10) eine in $g_0(u)$ und $\dot{g}_0(u)$ rationale Darstellung von $\ddot{g}_0(u)$ längs jeder Kurve (3.4 a) in der Form

$$\ddot{g}_0(u) = \frac{\tilde{\beta}_u}{2\tilde{\beta}} \dot{g}_0(u) + \frac{\tilde{\beta}_v}{\tilde{\beta}} \dot{g}_0^2(u) \quad \forall u \in U_0. \tag{3.12}$$

Da aus jeder, längs einer ebenen Schattengrenze auf $\varphi(H)$ geltenden Identität in u, $\Delta = 0$, $\Delta^* = 0$, $\Delta - \Delta^* = 0$ durch Ableiten nach u eine zusätzliche, für ebene Schattengrenzen notwendige Bedingung folgt, kann aus $\Delta - \Delta^* = 0$ zusammen mit (3.12) auch $\dddot{g}_0(u)$ rational durch $g_0(u)$ und $\dot{g}_0(u)$ ausgedrückt werden, und zwar ist

$$\dddot{g}_0(u) = \frac{2\tilde{\beta}\tilde{\beta}_{uu} - \tilde{\beta}_u^2}{4\tilde{\beta}^2} \dot{g}_0(u) + \frac{3\tilde{\beta}_{uv}}{2\tilde{\beta}} \dot{g}_0^2(u) + \\ + \frac{\tilde{\beta}\tilde{\beta}_{vv} + \tilde{\beta}_v^2}{4\tilde{\beta}^2} \dot{g}_0^3(u) \; \forall u \in U_0. \tag{3.13}$$

---

[14] Diese Differentialgleichung folgt aus [4], Gl. (100, 18), wenn als Fläche speziell eine Regelfläche mit den Grundhalbinvarianten $\beta = \beta(u, v) \neq 0$ und $\gamma = \gamma(u, v) \equiv 0$ $\forall (u, v) \in G$ und als Normalensystem für den halbinvarianten Differentiationsprozeß das β-Sullivannormalensystem gewählt wird. In der Bolschen Schreibweise hat (3.10) die Gestalt $D_u(g_0(u)) = 0$, das ist die Differentialgleichung der *Pseudogeodätischen* von $\varphi(G)$.

Mit Gl. (3.12) — im wesentlichen $\Delta - \Delta^* = 0$ — und Gl. (3.13) — im wesentlichen $\dot{\Delta} - \dot{\Delta}^* = 0$ — lassen sich die Gleichungen (3.8), $\Delta = 0$, bzw. (3.9), $\Delta^* = 0$, zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung 4. Grades für die gesuchte Funktion $g_0(u) = g(u, t_0)$ umschreiben

$$0 = \Delta_I(g_0(u)) := \tilde{\beta}^4 + 4\tilde{\beta}^2 \tilde{l} \dot{g}_0^2(u) - 3\tilde{\beta}^2 \tilde{B}_{uv} \dot{g}_0^3(u) + \\ + 4\tilde{\beta}^2 \tilde{m} \dot{g}_0^4(u) \quad \forall u \in U_0; \tag{3.14}$$

dabei wurden folgende Abkürzungen[15] verwendet:

$$4\beta^2 l := (5/4)\beta_u^2 - \beta\beta_{uu} - 2(d+a)\beta^2, \quad \tilde{l} := l \circ \gamma^{(t_0)} \tag{3.14a}$$

$$4\beta^2 m := \beta_v^2 - 2\beta\beta_{vv} = (d-a)^2 + 4bc =: W(u), \\ W := u \in U \mapsto W(u) \in \mathbb{R}, \quad \tilde{m} := m \circ \gamma^{(t_0)} \tag{3.14b}$$

$$B_{uv} := (\log\beta)_{uv}, \quad \tilde{B}_{uv} := B_{uv} \circ \gamma^{(t_0)}. \tag{3.14c}$$

3.2. Die spezielle Kurve (3.4a) aus der stetigen Schar $[c(t)]$ ist genau dann ebene Schattengrenze auf $\varphi(H)$, wenn (3.8) und (3.9) oder die beiden daraus abgeleiteten Bedingungen (3.12) und (3.14) zugleich gelten. Daher folgt zunächst aus Gl. (3.14) für jede Stelle $(u_0, v_0 := g(u_0, t_0)) \in H$ eine nur notwendige Bedingung für den Richtungskoeffizient einer ebenen Schattengrenze

$$\alpha(u_0, v_0) := \dot{g}_0(u_0) = \frac{\partial g(u,t)}{\partial u}(u_0, v_0), \\ v_0 := g(u_0, t_0), (u_0, v_0) \in H. \tag{3.15}$$

Das reelle Polynom 4. Grades in α, Gl. (3.14), erlaubt für $(u_0, v_0) \in H$ über $\mathbb{C}$ höchstens 4 mögliche Richtungen für Urbilder ebener Schattengrenzen. Variiert v_0 in $\mathbb{R}$, während $u_0 \in U_0$ fest bleibt, so beschreibt das aus (3.14) abgeleitete Polynom 4. Grades in α, 8. Grades in v,

---

[15] Im Bolschen Kalkül sind l bzw. m Halbvarianten vom Gewicht (2,0) bzw. (0,2); auch Δ_I ist eine Halbvariante, und zwar vom Gewicht (8,4).

$$h_1(v,\alpha) := \beta^4(u_0,v) + 4\beta^2(u_0,v)\,l(u_0,v)\,\alpha^2 - \tag{3.16}$$
$$-3\beta^2(u_0,v)\,B_{uv}(u_0,v)\,\alpha^3 + W(u_0)\,\alpha^4,\ v_0 \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

eine algebraische Korrespondenz in $\mathbb{R}^2$ zwischen der Punktreihe (u_0, v) auf dem Urbild $u = u_0$ der Erzeugenden $e(u_0)$ von Φ_0 und der zweiparametrigen Menge von Linienelementen zu diesen Punkten. Durch diese Korrespondenz werden jedem Punkt (u_0, v) über $\mathbb{C}$ vier Tangenten für Urbilder möglicher ebener Schattengrenzen zugeordnet. Als Lösung der algebraischen Gleichung $h_1(v,\alpha) = 0$ ist der *Richtungskoeffizient einer ebenen Schattengrenze* an einer festen Stelle (u_0, v_0) daher notwendig eine *algebraische Funktion* in dem *projektiven Parameter* v_0 des Ausgangspunktes auf der Erzeugenden.

Das Polynom (3.16) kann als Polynom in α

$$h_1(\alpha) = 0 \tag{3.17a}$$

über dem Körper

$$\mathbb{P}_1 := \mathbb{R}\left(\beta(u_0,v), \beta_u(u_0,v), \beta_v(u_0,v), \beta_{uu}(u_0,v), \beta_{uv}(u_0,v)\right), \tag{3.17b}$$

der rationalen Funktionen in v über $\mathbb{R}$ aufgefaßt werden. Weil für das absolute Glied $\beta^4(u_0, v)$ über H die Voraussetzung (3.11) gilt, ist $h_1(\alpha)$ über $\mathbb{P}_1$ stets von Null verschieden. Außerdem ist der Koeffizient des linearen Gliedes von $h_1(\alpha)$ für alle $(u, v) \in H$ stets Null, so daß

$$2 \leqslant \deg h_1(\alpha) \leqslant 4 \tag{3.18}$$

ist. Jede Lösung $\hat{\alpha} := \hat{\alpha}(u_0, v)$ von $h_1(\alpha)$ ist eine algebraische Funktion in v, also ein Element aus einem geeigneten Erweiterungskörper $\mathbb{P}_1(\hat{\alpha})$ von $\mathbb{P}_1$. Das definierende Polynom $p(\alpha)$ von $\mathbb{P}_1(\hat{\alpha})$ bzw. der algebraischen Funktion $\hat{\alpha}$ hat nach [12], § 43, die Eigenschaften:

$$p(\alpha) \text{ ist irreduzibel über } \mathbb{P}_1,\ p(\hat{\alpha}) = 0 \text{ und } p(\alpha) \text{ teilt } h_1(\alpha). \tag{3.19}$$

Deuten wir jetzt $p(\alpha)$ über $\mathbb{P}_1$ als Polynom $p(v,\alpha)$ über $\mathbb{R}$, so folgt aus (3.19): *Die Nullstellenmenge r über* $\mathbb{R}$ *der zu* $p(v,\alpha)$ *assoziierten Form* $p(x_0, x_1, x_2)$ *mit* $v := x_1/x_0, \alpha := x_2/x_0$ *ist eine Komponente der Nullstellenmenge* r_1 *über* $\mathbb{R}$ *der zu* $h_1(v,\alpha)$, (3.16), *assoziierten Form* $h_1(x_0, x_1, x_2)$ *niedrigsten Grades*; also gilt

$$r \subset r_1,\ r := p^{-1}0,\ r_1 := h_1^{-1}0. \tag{3.20}$$

3.3. Die Tangenten der ebenen Schattengrenzen in den Punkten der nichttorsalen Erzeugenden $\varphi(u_0, v) \subset e(u_0) \subset \Phi_0$ sind Erzeugenden einer gewissen parabolischen Netzregelfläche $\Omega(u_0)$ aus dem para-

bolischen Tangentennetz $\mathfrak{N}(u_0)$ von Φ_0 längs $e(u_0)$. Eine solche Netzregelfläche ist festgelegt durch die Leitkurve $\mathfrak{x}(u_0, v)\,\mathbb{R} = (\mathfrak{y}(u_0) + v\,\mathfrak{z}(u_0))\,\mathbb{R}$, $v \in V \subset \mathbb{R}$, auf der Netzachse $e(u_0)$ und jene mit v parametrisierte Kurve, die aus den Ableitungspunkten für mögliche ebene Schattengrenzen besteht,

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(u_0, v)\,\mathbb{R} &= \left[\frac{\partial \mathfrak{x}(u, g(u,t))}{\partial u}(u_0)\right]\mathbb{R} = \\ &= [\dot{\mathfrak{y}}(u_0) + v\,\dot{\mathfrak{z}}(u_0) + \hat{\alpha}(u_0, v)\,\mathfrak{z}(u_0)]\,\mathbb{R}, \\ \hat{\alpha}(u_0, v) &\text{ ist Lösung von (3.16), } v \in V \subset \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Diese Leitkurve (3.21) liegt in der Verbindungsebene

$$\pi := \dot{\mathfrak{y}}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \dot{\mathfrak{z}}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R} \tag{3.22}$$

der nach (2.12) linear unabhängigen Punkte $\dot{\mathfrak{y}}(u_0)\,\mathbb{R}$ bzw. $\dot{\mathfrak{z}}(u_0)\,\mathbb{R}$ bzw. $\mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R}$ und hat in dem projektiven Koordinatensystem mit diesen Punkten als Grundpunkten und $(\dot{\mathfrak{y}} + \dot{\mathfrak{z}} + \mathfrak{z})\,\mathbb{R}$ als Einheitspunkt die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} &(x_0, x_1, x_2)\,\mathbb{R} = (1, v, \hat{\alpha}(u_0, v))\,\mathbb{R}, \\ &\hat{\alpha} \text{ ist Lösung von (3.16) und } v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Wegen der Algebraizität von $\hat{\alpha}$ in v und wegen (3.19) ist der durch (3.23) dargestellte Punkt der *allgemeine Punkt* für die Nullstellenmenge r in π der Form $p(x_i)$.

Nach Voraussetzung existiert eine stetige Schar reeller ebener Schattengrenzen $[c^{(t)}]$ auf $\varphi(H)$, deren Richtung in den Punkten $(u_0, v_0) \in H$ durch eine gemeinsame Lösung $\hat{\alpha}(u_0, v_0)$ von (3.16) und (3.12) angezeigt wird. Dementsprechend gibt es eine dichte Menge a reeller Punkte auf der irreduziblen Leitkurve r, (3.20), von $\Omega(u_0)$ in π (vgl. dazu Abb. 1 und Abb. 2); zusammen mit (3.20) muß daher gelten:

$$a \subset r \subset r_1. \tag{3.24}$$

Wir nennen die Regelfläche $\Omega(u_0)$, $u_0 \in U$, künftighin *Begleitregelfläche* der stetigen Schar ebener Schattengrenzen und deren Spurkurve r in π, (3.20), die *Richtungsindikatrix* zum Wert u_0. Die algebraische Kurve r_1, die mit r die Punktmenge a gemeinsam hat, heißt 1. *Richtungsindikatrix*.

Nun kann folgender Satz gezeigt werden:

Satz 1: *In den Punkten einer windschiefen, nicht reguloiden Erzeugenden $e(u_0)$ einer ES-Regelfläche sind die Tangenten an die ebenen Schattengrenzen die Erzeugenden einer algebraischen Begleitregelfläche $2n$-ten Grades, $1 \leqslant n \leqslant 4$, aus einem parabolischen Geradennetz mit $e(u_0)$ als n-facher Leitgerade. Die Torse der Schattenebenen ist Teil einer algebraischen Torse.*

Beweis: a) Die Begleitregelfläche $\Omega(u_0)$ in dem parabolischen Geradennetz $\mathfrak{N}(u_0)$ durch die irreduzible, algebraische Leitkurve $r \in \pi$, (3.20), (3.24), ist das Erzeugnis einer algebraischen Korrespondenz $\mathfrak{K}(u_0)$ zwischen der Punktreihe auf $e(u_0)$ und dem parabolischen Geradennetz $\mathfrak{N}(u_0)$. In der komplexen Erweiterung $\Pi(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ des 3-dimensionalen, projektiven Raumes Π ordnet $\mathfrak{K}$ jedem Punkt $X_0 := x(u_0, v_0)\,\mathbb{C}$ aus $e(u_0)$ genau jene n Geraden aus $\mathfrak{N}(u_0)$ durch X_0 zu, welche die Kurve r in den Punkten auf der Spur $v = v_0$ der Tangentialebene τ_X von Φ_0 in X_0 treffen (vgl. dazu Abb. 1). Daher schneidet jede Ebene η durch $e(u_0)$ — d. i. eine Tangentialebene von Φ_0 in $X \in e(u_0)$ — die Regelfläche $\Omega(u_0)$ in den n Treffgeraden von r durch X und in der n-fach zu zählenden Leitgeraden $e(u_0)$. Wegen (3.20) und (3.18) ist $\deg p(\alpha) \leqslant \deg h_1(\alpha) \leqslant 4$, also $1 \leqslant n \leqslant 4$, und folglich ist

$$\deg \Omega(u_0) = 2n,\ 1 \leqslant n \leqslant 4. \tag{3.25}$$

b) Jede Tangente einer ebenen Schattengrenze $c^{(t_0)}$ ist Erzeugende einer bestimmten Begleitregelfläche $\Omega(u_0)$ aus der einparametrigen Schar $\{\Omega(u_0) \mid u_0 \in U\}$. Die Trägerebene $\varepsilon^{(t_0)}$ von $c^{(t_0)}$ ist daher Tangentialebene jeder dieser algebraischen windschiefen Regelflächen $\Omega(u_0)$, $u_0 \in U$. Infolgedessen muß die Torse Γ, (1.2), der Schattenebenen zumindest einem irreduziblen Bestandteil $\theta_1(u, \bar{u})$ der eventuell über $\mathbb{R}$ reduziblen algebraischen Verbindungstorse $\theta(u, \bar{u})$ zweier Flächen aus der Schar $\Omega(u)$, u und $\bar{u}$ aus U, $u \neq \bar{u}$, angehören. Weil diese Aussage unabhängig von der Auswahl von $\Omega(u)$ und $\Omega(\bar{u})$ in der einparametrigen Schar dieser algebraischen, parabolischen Netzregelflächen gelten muß, liegt Γ im Schnitt aller dieser Zerfallskomponenten $\theta_1(u, \bar{u})$, wenn u und $\bar{u}$ in U variieren. Das ist jedoch nur so möglich, daß jede dieser Γ tragenden Torsen $\theta_1(u, \bar{u})$ mit einer festen, für alle Regelflächen $\Omega(u)$, $u \in U$, gemeinsamen Leittorse θ_1 zusammenfällt. □

Die zu den ebenen Schattengrenzen der stetigen Schar $[c^{(t)}]$ auf $\varphi(H) \subset \Phi_0$ konjugierten Flächenkurven $[\bar{c}^{(s)}] := \{\bar{c}^{(s_0)} \mid s_0 \in K \subset \mathbb{R}\}$ besit-

zen als Tangenten stets Lichtstrahlen. Wir übernehmen für diese Kurven die von R. WALTER in [13] geprägte Bezeichnung *Streiflichtspuren*. Wegen der Konjugiertheit von Streiflichttangente $t_{\bar{c}}$ und Tangente t_c an die entsprechende Schattengrenze im Punkt $\varphi(u_0, v_0) \in \varphi(H)$ wird die Erzeugendenschar einer Regelfläche $\Omega(u_0)$ durch Polarisieren an der Trägerquadrik $\Sigma(u_0)$ des Schmiegtangentenregulus $\Sigma_f(u_0)$ von Φ_0 längs $e(u_0)$ in die Erzeugendenschar einer ebenfalls parabolischen Netzregelfläche $\bar{\Omega}(u_0)$ vom gleichen Grad $2n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$, mit $e(u_0)$ als n-fache Leitgerade abgebildet. Diese Fläche $\bar{\Omega}(u_0)$ trägt sämtliche Streiflichttangenten von $\varphi(H)$ in den Punkten von $e(u_0)$ und somit auch die Lichtkurve l. Dual zu den obigen Überlegungen im Beweisschritt b des Satzes **1** muß l einer festen, allen Flächen $\bar{\Omega}(u_0)$, $u_0 \in U$, gemeinsamen, algebraischen Leitkurve angehören. Das ergibt

Satz 2: *Entlang einer windschiefen, nichtreguloiden Erzeugenden $e(u_0)$ einer ES-Regelfläche liegen die Streiflichttangenten auf einer parabolischen, algebraischen Netzregelfläche $2n$-ten Grades, $1 \leqslant n \leqslant 4$, mit $e(u_0)$ als n-fache Leitgerade. Die Lichtkurve l ist Teil einer algebraischen Kurve.*

4. Nun ist zu beachten, daß zur Gewinnung von Gl. (3.14), $\Delta_{\mathrm{I}} = 0$, nur die längs einer ebenen Schattengrenze geltenden Identitäten, $\Delta = 0$, $\Delta^* = 0$ und $\Delta - \Delta^* = 0$, also nur das Verhalten einer ebenen Schattengrenze $c^{(t_0)}$ in der Umgebung 4. Ordnung von $\varphi(H)$ in einem Punkt $\varphi(u_0, v_0)$ ausgenützt wurden. Für C^r-Regelflächen mit $r \geqslant 5$ gelten jedoch längs jeder ebenen Schattengrenze zusätzlich die Identitäten $\dot{\Delta} = \det(x(u, g_0(u)), \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}) = 0$, $\dot{\Delta}^* = 0$, $\ddot{\Delta} - \ddot{\Delta}^* = 0$ und $\dot{\Delta}_{\mathrm{I}} = 0$. Aus diesen neuen Identitäten in u kann eine weitere, für den Richtungskoeffizient $\dot{g}_0(u)$ der ebenen Schattengrenzen $c^{(t_0)}$ notwendige Bedingung von ähnlicher Bauart wie (3.14) abgeleitet werden. Und zwar ist der Ausdruck

$$0 = \Delta_{\mathrm{II}}(g_0(u)) := \tilde{\beta}\,\dot{\Delta}_{\mathrm{I}} - 4(\tilde{\beta}_u + \tilde{\beta}_v \dot{g}_0(u))\,\Delta_{\mathrm{I}} \quad \forall u \in U_0, \qquad (4.1)$$

wieder ein Polynom in $\dot{g}_0(u)$, dessen formaler Grad in $\dot{g}_0(u)$ sogar nur 2 ist. In der gleichen Weise wie in **3.2** halten wir jetzt die Variable u fest und lassen $v_0 = g(u_0, t_0)$ in V variieren; dann bekommen wir neben $h_1(v, \alpha)$ ein weiteres, die algebraische Richtungsfunktion $\alpha(u_0, v)$ ebener Schattengrenzen an der Stelle u_0 definierendes Polynom $h_2(\alpha)$,

$$0 = h_2(\alpha) := D(u_0, v) + E(u_0, v)\,\alpha + F(u_0, v)\,\alpha^2 \qquad (4.2)^{16}$$

$$D(u_0, v) := 4(l_u - B_u l) \qquad (4.2a)$$

$$E(u_0, v) := 2(2B_{uuv} - B_u B_{uv}) \qquad (4.2b)$$

$$F(u_0, v) := 5(B_{uvv} + B_v B_{uv}), \qquad (4.2c)$$

über einem von $\mathbb{P}_1$ i. a. verschiedenen Funktionenkörper

$$\mathbb{P}_2 := \mathbb{R}\left(D(u_0, v), E(u_0, v), F(u_0, v)\right). \qquad (4.2d)$$

Da $h_2(\alpha)$ höchstens den Grad 2 hat und im Gegensatz zu $h_1(\alpha)$ auch das Nullpolynom in $\mathbb{P}_2$ sein kann, entsteht für die Richtungsindikatrix r, (3.20 und 23), zusätzlich zu (3.24) die Bedingung

$$a \subset r \subseteq r_2, \quad r_2 \neq \emptyset \qquad (4.3a)$$

oder

$$r_2 = \emptyset \text{ über } \mathbb{R}, \qquad (4.3b)$$

wobei r_2 die Nullstellenmenge über $\mathbb{R}$ der zum Polynom $h_2(v, \alpha)$ gehörigen assoziierten Form niedrigsten Grades $h_2(x_0, x_1, x_2)$ ist. Wir nennen die Nullstellenmenge r_2 von $h_2(x_0, x_1, x_2)$ in π die 2. *Richtungsindikatrix*.

Von diesen beiden Bedingungen für die Richtungsindikatrizen in π, (3.24) mit (4.3 a) bzw. mit (4.3 b), wird sich die erste mit $r_2 \neq \emptyset$ als widersprüchlich erweisen. Der Nachweis dafür gestaltet sich schwierig, weil die Resultantengleichung der definierenden Polynome $h_1(v, \alpha)$, $h_2(v, \alpha)$ von r_1 und r_2 — das ist eine Differentialgleichung 3. Ordnung für die Grundhalbinvariante $\beta(u_0, v)$ — wegen ihrer außerordentlichen Länge als Entscheidungshilfe ausfällt. Um die Widersprüchlichkeit der Annahme $r_2 \neq \emptyset$ zu zeigen, werden wir in einzelnen Schritten überprüfen, ob die Polynome $h_1(\alpha)$ über $\mathbb{P}_1$ und $h_2(\alpha)$ über $\mathbb{P}_2$ wegen der speziellen Bauart ihrer Koeffizientenfunktionen einen gemeinsamen, irreduziblen, die Indikatrix r definierenden Faktor zulassen. Diesem Problem ist der nächste Abschnitt gewidmet.

4.1. Wir zeigen: *Die Annahme eines gemeinsamen Teilers für die vom Nullpolynom verschiedenen Polynome $h_1(\alpha)$ über $\mathbb{P}_1$ und $h_2(\alpha)$ über $\mathbb{P}_2$ führt zum Widerspruch.*

---

[16] Im Bolschen Kalkül hat Gl. (4.2) die Gestalt $0 = 4l_1 + 4(B_{uv})_1\,\alpha + 5(B_{uv})_2\,\alpha^2$.

Weil das Polynom $h_2(\alpha)$ über $\mathbb{P}_2$, (4.2), für $u = u_0 =$ konstant, $u_0 \in U$ vom Nullpolynom verschieden ist, können nicht beide Koeffizienten $E(u_0, v)$, (4.2 b), und $F(u_0, v)$, (4.2 c), gleichzeitig Null sein in $\mathbb{P}_2$. Nimmt man das nämlich an, so reduziert sich das Polynom $h_2(\alpha)$ auf die Konstante $D(u_0, v)$ in $\mathbb{P}_2$, und diese muß Null sein in $\mathbb{P}_2$ für alle $(u_0, v) \in H$ wegen (4.2). Im Widerspruch zur Voraussetzung wäre $h_2(\alpha)$ das Nullpolynom in $\mathbb{P}_2(\alpha)$. Der Grad von $h_2(\alpha)$ ist also mindestens eins. Nach dieser Vorbemerkung führen wir den Nachweis für die obige Behauptung getrennt für die Fälle, h_2 *reduzibel* bzw. h_2 *irreduzibel* über $\mathbb{P}_2$.

Fall 1: Das Polynom $h_2(\alpha)$ ist reduzibel über $\mathbb{P}_2$.

Damit ist $h_2(\alpha)$ entweder linear über $\mathbb{P}_2$, falls $F(u_0, v)$ das Nullelement in $\mathbb{P}_2$ ist, oder $h_2(\alpha)$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{P}_2$

$$h_2(\alpha) = \varrho(u) \cdot (\alpha - \alpha_1(u_0, v)) \cdot (\alpha - \alpha_2(u_0, v)) \quad \text{mit } \alpha_j(u_0, v) \in \mathbb{P}_2,\ j = 1, 2. \tag{4.4}$$

Die irreduzible Komponente r von $r_2 \subset \pi$ ist daher Nullstellenmenge über $\mathbb{R}$ eines Linearfaktors von (4.4), etwa von

$$h(\alpha) := \alpha - \alpha_1(u_0, v). \tag{4.5}$$

Da r nach (3.24) auch Teilmenge von r_1 ist, muß $\alpha_1(u_0, v)$ auch Element in $\mathbb{P}_1$ sein; $\alpha_1(u_0, v)$ ist daher sicher eine rationale Funktion in v über $\mathbb{R}$. Durch die Korrespondenz $\mathfrak{R}(u_0)$ (Beweisschritt *a* zu Satz 1 in 3.3) wird in diesem Fall jedem Punkt $\varphi(u_0, v)$ auf $e(u_0)$ genau ein Punkt $(1, v_0, \alpha_1(u_0, v_0))\,\mathbb{R}$ auf r und damit genau eine Erzeugende auf der Begleitregelfläche $\Omega(u_0)$ zugewiesen; $\Omega(u_0)$ ist daher eine *ringförmige Quadrik* mit den Tangenten an die ebenen Schattengrenzen als Erzeugenden eines Regulus $\Omega_t(u_0)$ auf $\Omega(u_0)$. Die Schar der ebenen Schattengrenzen muß deshalb eine Doppelverhältnisschar auf Φ_0 sein[17]. Die Trägervarietät r von a stimmt dann mit der Schnittkurve $\Omega(u_0) \cap \pi$ überein, falls diese irreduzibel und daher ein Kegelschnitt (durch $\mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R} = e(u_0) \cap \pi$) ist; wenn $\Omega(u_0) \cap \pi$ zerfällt, muß r die von der Erzeugenden $\mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \dot{\mathfrak{z}}(u_0)\,\mathbb{R}$ auf $\Omega(u_0)$ verschiedene Erzeugende auf dem konkordanten Regulus $\Omega_k(u_0)$ sein, so daß gilt

$$1 \leqslant \deg r \leqslant 2. \tag{4.6}$$

---

[17] Nach [1] ist $\Omega_t(u_0) \subset \Omega(u_0)$ der zu $e(u_0)$ *transversale* Regulus der Begleitquadrik $\Omega(u_0)$ der Doppelverhältnisschar. Der ergänzende Regulus $\Omega_k(u_0)$ von $\Omega_t(u_0)$ enthält $e(u_0)$ und heißt *konkordant* zu $e(u_0)$.

Wir erweitern nun die projektive Ebene π ins Komplexe und betrachten die Spurpunkte F_i, $i = 1, 2$, von r_1 auf der v-Achse $\alpha = 0$. Wegen (3.16) sind diese Punkte F_i identisch mit den vierfach zu zählenden Nullstellen von $\beta(u_0, v)$ über $\mathbb{C}$. Das in v quadratische Polynom $\beta(u_0, v)$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in die Linearfaktoren

$$\beta_{(i)}(u_0, v) = c_{(i)}(u_0) \cdot (v - v_{(i)}(u_0)), \quad i = 1, 2, \tag{4.7}$$

so daß $\beta(u_0, v) = \beta_{(1)}(u_0, v)\,\beta_{(2)}(u_0, v)$. Nun kann jede Komponente von r_1, insbesondere r, die v-Achse nur in den Punkten F_i schneiden, und zusätzlich muß (4.6) erfüllt sein. Das absolute Glied von $h(\alpha)$, (4.5), kann daher für $\deg r = 1$ nur die Gestalt

$$\alpha_1(u_0, v) = \sigma(u_0)\,\beta_{(i)}(u_0, v), \quad \beta_{(i)} \text{ nach (4.7)}, \tag{4.8 a}$$

haben, und falls $\deg r = 2$ ist, muß

$$\alpha_1(u_0, v) = \sigma(u_0)\,\beta(u_0, v) \tag{4.8 b}$$

sein, da r wegen (3.19) irreduzibel ist.

In (4.8 a) ist $\alpha_1(u_0, v)$ für jeden Wert $u_0 \in U$ eine reelle, lineare Funktion aus $\mathbb{P}_1$. Die Spurkurve von $\Omega(u_0)$ in π zerfällt also in die Trägergerade r der Leitkurve $(1, v, \alpha_1(u_0, v))\,\mathbb{R}$ und in die zum Parameterwert $v_0 = \infty$ gehörige Erzeugende $\mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \dot{\mathfrak{z}}(u_0)\,\mathbb{R}$ von $\Omega(u_0)$ (siehe Abb. 1).

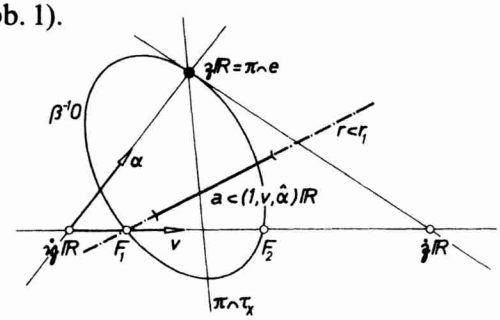

Abb. 1

Die Punktmenge $a \subset r$, $(1, v, \alpha_1(u_0, v))\,\mathbb{R}$ mit $v \in V_0 \subset V$, ist laut Voraussetzung *Zielpunktmenge für Tangenten ebener Schattengrenzen*, das bedeutet: Die Richtungsfunktion $\alpha_1(u_0, v)$, (4.8 a), erfüllt in V_0 nicht nur die notwendigen Bedingungen (3.16) und (4.2) für eine ebene Schattengrenze, sondern auch die hinreichende, $\Delta - \Delta^* = 0$, (3.10),

$$0 = \beta(u_0, v_0)\,\frac{\partial \beta_{(i)}}{\partial u}(u_0, v_0) - \tfrac{1}{2}\beta_u(u_0, v_0)\,\beta_{(i)}(u_0, v_0) - \beta_v(u_0, v_0)\,\beta_{(i)}^2(u_0, v_0).$$

Weil diese Gleichung in v von 3. Grad ist und für alle $v_0 \in V_0$ gilt, verschwindet dieses Polynom sogar identisch in v. Die gemeinsame Lösung $\alpha_1(u_0, v)$ von (3.16) und (4.2) gibt daher nicht nur über $V_0 \subset V$, sondern in jedem Nichtfleknodalpunkt $\varphi(u_0, v)$, mit $v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\beta(u_0, v) \neq 0$, die Richtung einer ebenen Schattengrenze an. Es kommt nun darauf an, ob die Schmieglinie $\varphi(u_0, v = \infty)$ eine Fleknodalkurve ist oder nicht. Ist $\varphi(u_0, v = \infty)$ eine Fleknodalkurve, so ist sie als Schmiegfleknodalkurve geradlinig, $\varphi(H)$ ist Gebüschregelfläche und $\beta(u_0, v)$ hat die Bauart

$$\beta(u, v) = \lambda(u)\,\beta_{(1)}(u, v) = L(u) + M(u)\,v \quad \forall (u, v) \in G. \tag{4.8 c}$$

Im zweiten Fall ist die zum Wert $v = \infty$ gehörige Erzeugende aus $\Omega_t(u_0) \subset \Omega(u_0)$, $\mathfrak{z}(u_0)\,\mathbb{R} \vee \dot{\mathfrak{z}}(u_0)\,\mathbb{R}$, stets Tangente an eine ebene Schattengrenze. Da $\mathfrak{z}(u_0) \vee \dot{\mathfrak{z}}(u_0)$ auch Schmiegtangente von $\varphi(H)$ ist, muß die Schmieglinie $\mathfrak{z}(u)\,\mathbb{R}$ ebene Schattengrenze sein. Ebene Schmieglinien auf C^r-Flächen in Π sind geradlinig, also ist $\varphi(H)$ auch in diesem Fall eine Gebüschregelfläche mit $\mathfrak{z}(u)\,\mathbb{R}$ als Leitkurve auf der Gebüschachse, und $\beta(u, v)$ hat die obige Bauart (4.8 c).

Der Ansatz (4.8 a) für die Richtungsfunktion einer ebenen Schattengrenze gilt also nur für den Sonderfall einer Gebüschregelfläche mit $\mathfrak{z}(u)\,\mathbb{R}$ als geradliniger Leitkurve, so daß (4.8 a) als Sonderfall von (4.8 b) anzusehen ist.

Es gelingt nun leicht, die Annahme (4.8 b) bzw. (4.8 a mit c) auf einen Widerspruch zu führen. Die Funktion (4.8 a) muß nach **3.2** zusätzlich die Differentialgleichung $\Delta - \Delta^* = 0$, (3.10), erfüllen. Da $\alpha_1(u_0, v)$ nun proportional zu $\beta(u_0, v)$ ist, folgt zunächst die Differentialgleichung $2\,\dot{\sigma}\beta + \sigma\beta_u = 0$ mit $\sigma = \sigma(u)$ und daraus $(\log\beta)_{uv} = B_{uv} = 0$ $\forall (u, v) \in H$. Damit sind jetzt die Koeffizientenfunktionen $E(u, v)$ und $F(u, v)$ von $h_2(\alpha)$ identisch Null im Widerspruch zur einleitenden Bemerkung. □

Fall 2: Das Polynom $h_2(\alpha)$ ist über $\mathbb{P}_2$ irreduzibel für alle $u_0 =$ konstant, $u_0 \in U$, und besitzt den wirklichen Grad 2, also $F(u_0, v) \neq$ Null in $\mathbb{P}_2$ über U.

Als erste Folge dieser Voraussetzung muß gelten

$$B_{uv}(u_0, v) \neq 0 \text{ in } \mathbb{P}_2 \qquad \forall u = u_0, u_0 \in U. \tag{4.9}$$

Ist nämlich $B_{uv}(u_0, v)$, (3.14 c), stets Null in $\mathbb{P}_2$ auf U, so ist $B_{uv}(u, v) = 0$ $\forall (u, v) \in H$. Aus den Gleichungen (4.2 b) bzw. (4.2 c) folgt sofort,

daß $E(u_0, v)$, insbesondere $F(u_0, v)$ Nullpolynome in $\mathbb{P}_2$ sind, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ferner muß die algebraische Varietät r als irreduzibler Teil der nun als irreduzibel vorausgesetzten algebraischen Varietät r_2 mit r_2 übereinstimmen. Daher ist das irreduzible Polynom $h_2(\alpha)$ über $\mathbb{P}_2$ ein

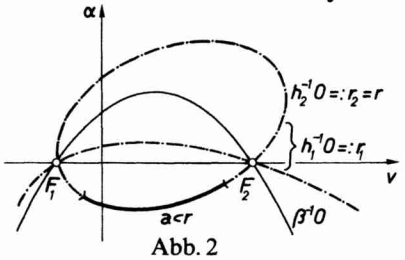

Abb. 2

Teiler von $h_1(\alpha)$ über $\mathbb{P}_1$ (siehe Abb. 2); also ist $h_2(\alpha)$ ein irreduzibles Polynom über $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_1$. Je nachdem, ob nun der Koeffizient $W(u_0)$ des Polynoms $h_1(\alpha)$ in einem Teilintervall $U_0 \subset U$ verschwindet oder nicht, ergeben sich folgende Unterfälle:

1. $W(u) = 0 \; \forall u \in U_0 \subset U$. Wegen Gl. (3.14 b) gilt damit die Identität

$$\beta \beta_{vv} = (1/2)\beta_v^2 \qquad \forall (u, v) \in H \tag{4.10}$$

und die aus (4.10) durch partielles Differenzieren nach u gewonnene Bedingung

$$\beta \beta_{uvv} = \beta_v \beta_{uv} - \beta_u \beta_{vv} \; \forall (u, v) \in H. \tag{4.11}$$

Ersetzt man jetzt in

$$B_{uvv} = \frac{\beta_{uvv}\beta^2 - \beta\beta_u\beta_{vv} - 2\beta\beta_v\beta_{uv} + 2\beta_u\beta_v^2}{\beta^3} \tag{4.12}$$

die Polynome $\beta\beta_{vv}$ und $\beta\beta_{uvv}$ in v durch die aus $W(u) = 0$ folgenden, (4.10) und (4.11), so finden wir

$$B_{uvv} = -\frac{\beta_v}{\beta} \cdot \frac{\beta\beta_{uv} - \beta_u\beta_v}{\beta^2} = -B_v B_{uv}.$$

Der Koeffizient $F(u_0, v)$, (4.2 c), von $h_2(\alpha)$ ist daher das Nullpolynom in $\mathbb{P}_1$ für jeden Wert $u_0 \in U$ im Widerspruch zur Annahme.

2. $W(u_0) \neq 0, u_0 \in U$. Wegen der Stetigkeit von $W(u)$ in U existiert eine Umgebung U_0 von u_0, $u_0 \in U_0 \subset U$, so daß $W(u) \neq 0$ in U_0. Unter dieser Annahme ist 4 der wirkliche Grad von $h_1(\alpha)$ für $u_0 \in U_0$. Die beiden Voraussetzungen, $W(u_0)$ und $F(u_0, v)$ verschieden vom Nullpolynom in $\mathbb{P}_1$, erlauben es, von $h_1(\alpha)$ und $h_2(\alpha)$ zu Polynomen über $\mathbb{P}_1$

$$H_1(\alpha) := h_1(\alpha)/W(u_0), \; h_1(\alpha) \text{ nach (3.16)} \tag{4.13 a}$$

$$H_2(\alpha) := h_2(\alpha)/F(u_0),\ h_2(\alpha) \text{ nach (4.2)} \tag{4.13 b}$$

mit demselben Anfangskoeffizient 1 überzugehen. Die Irreduzibilität von $h_2(\alpha)$ in $\mathbb{P}_1$ vererbt sich dabei auf $H_2(\alpha)$. Ist dann $\mathbb{P}^*$ ein $\mathbb{P}_1$ umfassender Zerfällungskörper von $H_2(\alpha)$ und $H_1(\alpha)$, so lauten die Faktordarstellungen dieser beiden Polynome bei entsprechender Indizierung ihrer Wurzeln über $\mathbb{P}^*$

$$H_1(\alpha) = H_2(\alpha)\cdot(\alpha - \alpha_3)\cdot(\alpha - \alpha_4) \tag{4.14 a}$$

$$H_2(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)\cdot(\alpha - \alpha_2), \tag{4.14 b}$$

wobei wegen der Irreduzibilität von $H_2(\alpha)$ über $\mathbb{P}_1$ die Wurzeln $\alpha_i(u_0, v)$ für $i = 1, 2$ dann nicht aus $\mathbb{P}_1$ sind. Die Koeffizienten der $H_j(\alpha)$ sind elementarsymmetrische Funktionen ihrer Nullstellen in $\mathbb{P}^*$. An jeder Stelle $u = u_0 \in U$ gelten daher folgende Gleichungen über $\mathbb{P}^*$:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \beta^4/W(u) \tag{4.15 a}$$

$$\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \tag{4.15 b}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4 = (4\,l\,\beta^2)/W(u), \tag{4.15 c}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (3\,B_{uv}\beta)/W(u), \tag{4.15 d}$$

sowie

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{D(u,v)}{F(u,v)} = \frac{4(l_u - B_u l)}{5(B_{uvv} + B_v B_{uv})}, \tag{4.16 a}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-E(u,v)}{F(u,v)} = \frac{-2(2B_{uuv} - B_u B_{uv})}{5(B_{uvv} + B_v B_{uv})} =: Q(u,v). \tag{4.16 b}$$

Die Nullstellen über $\mathbb{C}$ des absoluten Gliedes von $H_2(\alpha)$, (4.16 a), für $u = u_0$, sind die v-Werte der Spurpunkte von $r = r_2$ auf der v-Achse $\alpha = 0$ in π. Da jede Komponente von r_1, insbesondere $r = r_2$, die v-Achse nur in den Punkten F_i, $i = 1, 2$, von r_1, also in den Nullstellen über $\mathbb{C}$ von $\beta(u_0, v)$ schneiden kann (vgl. Abb. 2), muß $\alpha_1\alpha_2$ auf $H(\subseteq G)$ die Gestalt

$$\begin{gathered}\alpha_1\alpha_2 = \varrho(u)\,\beta_{(1)}^{\lambda}\beta_{(2)}^{\mu},\ \beta_{(i)} = \beta_{(i)}(u_0, v) \text{ nach (4.7)} \\ \text{und } \varrho(u) \neq 0\ \forall u \in U,\end{gathered} \tag{4.17}$$

haben. Aus den Gleichungen (4.15 b) und (4.15 c) folgen mit (4.17) und (4.15 a, d) zwei quadratische Gleichungen in $\varrho(u)$ über $\mathbb{P}^*$ (da $\alpha_1\alpha_2$ für $\lambda \neq \mu$ nicht notwendig aus $\mathbb{P}_1$ ist),

$$\varrho^2(u)\,S(u,v) + Q(u,v)\,\beta_{(1)}^{4-2\lambda}\,\beta_{(2)}^{4-2\mu} = 0 \tag{4.18 a}$$

bzw.

$$\varrho^2(u)\,\beta_{(1)}^{\lambda}\beta_{(2)}^{\mu}\,W(u) - [4\,l\beta^2 - S(u,v)\,Q(u,v)]\,\varrho(u) + \beta_{(1)}^{4-\lambda}\,\beta_{(2)}^{4-\mu} = 0\,, \tag{4.18 b}$$

mit

$$S(u,v) := 3\,B_{uv}\beta^2 - Q(u,v)\,W(u)\,. \tag{4.19}$$

An jeder festen Stelle $u = u_0$, $u_0 \in U$ müssen die Polynome (4.18) in $\varrho(u)$ über $\mathbb{P}^*$ eine gemeinsame Nullstelle aufweisen. Für die weitere Diskussion kommt es nun auf die Koeffizientenfunktion (4.19) an.

a) Ist $S(u,v)$ das Nullpolynom in $\mathbb{P}_1$ für alle $u = u_0 =$ konstant, $u_0 \in U$, so wird zunächst wegen (4.18 a) die Funktion $Q(u,v)$ und dann wegen (4.19), die Funktion B_{uv} zum Nullpolynom in $\mathbb{P}_1$ an jeder Stelle $u_0 \in U$, im Widerspruch zu (4.9).

b) Ist $S(u,v)$ nicht das Nullpolynom in $\mathbb{P}_1$ für $u = u_0 \in U$, so ist auch der Anfangskoeffizient des Polynoms in $\varrho(u)$, (4.18 a), vom Nullpolynom in $\mathbb{P}_1$ verschieden. Dividiert man die Polynome in $\varrho(u)$, (4.18 a) bzw. (4.18 b), durch ihren Anfangskoeffizienten, so gestatten die neuen Polynome in $\varrho(u)$ mit dem Anfangskoeffizienten 1 über $\mathbb{P}^*$ folgende Zerlegung:

$$\varrho^2 - \varrho_1^2(u) = 0 \text{ bzw. } [\varrho - \varrho_1(u)]\cdot[\varrho - \varrho_2(u)] = 0\,. \tag{4.20}$$

Für die absoluten Glieder dieser Polynome (4.20) finden wir

$$\varrho_1^2(u) = (Q(u,v)\,\beta_{(1)}^{4-2\lambda}\,\beta_{(2)}^{4-2\mu})/S(u,v) \text{ bzw.} \tag{4.21 a}$$

$$\varrho_1(u)\,\varrho_2(u) = (\beta_{(1)}^{4-2\lambda}\,\beta_{(2)}^{4-2\mu})/W(u)\,. \tag{4.21 b}$$

Aus Gl. (4.21 b) liest man ab: Unter den für *Fall* 2, 2 b geltenden Voraussetzungen haben die Gleichungen (4.18) nur dann eine gemeinsame, von Null verschiedene Lösung $\varrho_1(u)$ an jeder Stelle $u = u_0$, $u_0 \in U$, wenn entweder

$$\lambda = \mu = 2\,, \tag{4.22 a}$$

also nach (4.17)

$$\alpha_1\,\alpha_2 = \varrho(u_0)\,\beta^2(u,v) \in \mathbb{P}_1 \tag{4.22 b}$$

gilt, oder $\beta(u,v)$ ist eine Funktion in u allein. Im zweiten Fall folgt $B_{uv}(u,v) = 0\ \forall\,(u,v) \in H$, was nach (4.9) nicht sein darf.

Wegen der einschränkenden Bedingung (4.22 b) für das absolute Glied (4.17) von $H_2(\alpha)$, (4.14 b), hat die Bedingung (4.2), welche für $u = u_0 \in U$ das Polynom $H_2(\alpha)$ liefert, die Gestalt

$$D_{\mathrm{II}}(g_0(u)) := \varrho(u)\,\tilde{\beta}^2 + Q(u, g_0(u))\,\alpha + \alpha^2 = 0. \tag{4.23}$$

Die spezielle Bauart des nicht mit α behafteten Gliedes in dieser längs einer ebenen Schattengrenze (3.4a) einer ES-Regelfläche $\varphi(H)$ geltenden Identität (4.23) erlaubt es, für ES-Regelflächen aus $C^r(G)$, $r \geqslant 6$, eine weitere, längs jeder ebenen Schattengrenze verschwindende, in α nur mehr lineare Identität zu konstruieren, nämlich

$$D_{\mathrm{III}}(g_0(u)) := \tilde{\beta}\,\tilde{D}_{\mathrm{II}} - 2\,(\tilde{\beta}_u + \tilde{\beta}_v \dot{g}_0(u))\,D_{\mathrm{II}} - (\log\varrho(u))^{\cdot}\,\tilde{\beta}\,D_{\mathrm{II}} \quad \forall u \in U. \tag{4.24}$$

Für $u = u_0 \in U$, und $v_0 := g_0(u_0)$ variiert in $V \subset \mathbb{R}$, geht (4.24) über in ein Polynom 1. Grades für den Richtungskoeffizient α der ebenen Schattengrenzen über dem Körper $\mathbb{P}_1$

$$\begin{aligned} 0 = h_3(\alpha) := [Q_u\beta - \tfrac{3}{2}Q\beta_u - (\log\varrho)^{\cdot}\beta Q] + \\ + [Q_v\beta - Q\beta_v - \beta_u - (\log\varrho)^{\cdot}\beta]\,\alpha. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Richtungen der ebenen Schattengrenzen einer ES-Regelfläche aus $C^r(H)$, $r \geqslant 6$, müssen nun auch Lösungen von $h_3(\alpha) = 0$ sein. Andererseits aber darf $h_3(\alpha)$, als Linearfaktor über $\mathbb{P}_1$, kein Faktor des über $\mathbb{P}_1$ irreduziblen Polynoms 2. Grades $h_2(\alpha)$ sein. Der Linearfaktor $h_3(\alpha)$ muß infolgedessen über H identisch verschwinden.

Unter der obigen Voraussetzung $S(u, v) \neq 0$ bewirkt Gl. (4.21a) zusammen mit $\varrho(u) \neq 0$, (4.17), und (4.22a), daß

$$Q(u_0, v) \text{ in } V \subset \mathbb{R} \text{ nicht identisch Null ist.} \tag{4.26}$$

Weil (4.25) identisch verschwindet, muß das absolute Glied von $h_3(\alpha)$ Null sein in $\mathbb{P}_1$, und wegen (4.26) findet man nach partieller Integration nach u

$$Q(u, v) = \varrho(u)\,e^{G(v)}\,\beta^{3/2},\ G(v) \text{ ist eine Funktion in } v \text{ allein.} \tag{4.27}$$

Außerdem gilt wegen (4.18a) mit (4.19) und (4.22)

$$Q(u, v)\,\sigma(u) = \beta^2 B_{uv}, \tag{4.28}$$

wobei $\sigma(u) := (W(u)\varrho^2(u) - 1)/3\,\varrho^2(u)$ ist. Da $\sigma(u) \neq 0\ \forall u \in U$ gilt — wegen Gl. (4.28) zusammen mit der Voraussetzung (3.11) und Gl. (4.9) —, liefert der Vergleich von (4.27) und (4.28)

$$\beta B_{uv}^2 = 1/g(u)\,h(u) \text{ mit } h(v) \in \mathbb{P}_1 \quad \forall (u, v) \in H \subseteq G. \tag{4.29}$$

Benützt man jetzt das quadratische Polynom in $\mathbb{P}_1$

$$\beta^2 B_{uv}=\beta_{uv}\beta-\beta_u\beta_v=\begin{vmatrix} b & (d-a) \\ \dot{b} & (\dot{d}-\dot{a}) \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} b & c \\ \dot{b} & \dot{c} \end{vmatrix} v+\begin{vmatrix} c & (d-a) \\ \dot{c} & (\dot{d}-\dot{a}) \end{vmatrix} v^2=:\beta^*(u,v), \tag{4.30}$$

und bildet $\beta^4 B_{uv}^2$, so folgt mit (4.29) und (4.30)

$$\beta^3(u,v)=g(u)\,h(v)\,\beta^{*2}(u,v),\quad h(v)\in\mathbb{P}_1\quad\forall(u,v)\in H\subseteq G. \tag{4.31}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß diese Faktordarstellung für β^3 einen Widerspruch zu (4.9) in sich birgt. Dazu gehen wir von der Diskriminantenfunktion $(d-a)^2+4\,bc$ von $\beta(u,v)$ aus und beachten, daß diese nach (3.14 b) mit $W(u)$ übereinstimmt. Wegen der Voraussetzungen zum *Fall* 2, 2, ist $W(u)\neq 0\,\forall\,u\in U$, weshalb die Nullstellen von $\beta(u,v)$ über $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ stets verschieden sein müssen. Mit der Bezeichnung (4.7) für die Linearfaktoren von β über $\mathbb{C}$ gilt dann stets

$$\beta(u,v)=c(u)\cdot(v-v_{(1)})\cdot(v-v_{(2)})\ \text{ mit }\ v_{(1)}\neq v_{(2)}\ \ \forall\,u\in U.$$

Im weiteren kommt es auf die wirklichen Gradzahlen von β und β^* an.

Ist $c(u)\neq 0\ \forall\,u\in U$, also $\deg\beta=2$, so folgt zunächst aus $W(u)\neq 0$: $(d-a,b)\neq(0,0)\ \forall\,u\in U$.

Für $c(u)\neq 0$ und $d-a=0$ ist $\beta^*=G(u)\,v$, also $\deg\beta^*=1$, womit Gl. (4.31) übergeht in $\beta^3=g(u)\,G(u)\,h(v)\,v^2$; daraus folgt $\beta=q(u)\,p(v)$ oder $B_{uv}=0$, im Widerspruch zu (4.9).

Für $c(u)\neq 0$, $d-a\neq 0$ und $b=0$ oder $b\neq 0$ ist $\deg\beta=\deg\beta^*=2$. Die aus (4.31) folgende Faktordarstellung von $h(v)\,\beta^{*2}$ lautet dann $h(v)\,\beta^{*2}(u,v)=C(u)\cdot(v-v_{(1)})^3\cdot(v-v_{(2)})^3$ mit $\deg h(v)=2$. Wegen dieser Faktordarstellung und $v_{(1)}\neq v_{(2)}$ kann β^* nicht das Quadrat eines einzigen Linearfaktors $v-v_{(j)}$ sein, also muß gelten $\beta^*(u,v)=c^*(u)\,\beta(u,v)$ und somit ist auch in diesem Fall $\beta(u,v)=$ $=q(u)\,p(v)$ oder $B_{uv}=0$ im Widerspruch zu (4.9).

Ähnlich findet man für $c(u)=0$, $b(u)\neq 0$, $(d-a)\neq 0$ einen Widerspruch zu (4.9). Mehr als eine Koeffizientenfunktion von $\beta(u,v)$ kann nicht verschwinden, da sonst $\beta(u,v)$ von vornherein die Bauart $q(u)\,p(v)$ hat, im Widerspruch zu (4.9).

Die wesentliche Voraussetzung für *Fall* 1 und *Fall* 2, daß $h_2(\alpha)$ für $u=u_0=$ konstant, $u_0\in U$, vom Nullpolynom in $\mathbb{P}_2$ verschieden ist, hat sich damit insgesamt als widersprüchlich erwiesen. □

4.2. Jetzt ist noch die Bedingung (4.3 b), $r_2=\emptyset$, zu überprüfen. Gleichbedeutend damit muß $h_2(\alpha)$, (4.2), an jeder festen Stelle $u=u_0$, $u_0\in U$, das Nullpolynom über $\mathbb{P}_2$, (4.2 d), sein. Aus dem Verschwinden

der Koeffizientenfunktionen $E(u_0, v)$, (4.2 b), bzw. $F(u_0, v)$, (4.2 c), für jedes $u_0 \in U$, finden wir nach partieller Integration von $E(u, v)$ nach u,

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2} B = \log B_{uv} + V(v), \\ V(v) \text{ ist eine Funktion in } v, \quad \forall (u, v) \in H \subseteq G, \end{gathered} \tag{4.32 a}$$

bzw. nach partieller Integration von $F(u, v)$ nach v,

$$\begin{gathered} B = -\log B_{uv} + U(u), \\ U(u) \text{ ist eine Funktion in } u, \quad \forall (u, v) \in H \subseteq G. \end{gathered} \tag{4.32 b}$$

Die Summe dieser Ausdrücke (4.32 a, b) ergibt

$$\tfrac{3}{2} B = U(u) + V(v), \text{ also } B_{uv} = 0, \quad \forall (u, v) \in H, \tag{4.33}$$

und $\beta(u, v)$ muß daher auf $H \subseteq G$ die Bauart

$$\beta(u, v) = q(u)\, p(v)$$

mit $p(v) = b_0 + (d - a)_0\, v - c_0\, v^2$ und $b_0, (d - a)_0, c_0 \mid \in \mathbb{R}$ (4.34)

haben. Jetzt nützen wir das Verschwinden des absoluten Gliedes $D(u_0, v)$, (4.2 a), von $h_2(\alpha)$ an jeder Stelle $u_0 \in U$ aus und betrachten dazu zwei Fälle.

1. Ist zunächst $l(u, v) \neq 0 \; \forall (u, v) \in H$, so kann $l(u, v)$ in der Form

$$l(u, v) = \frac{\beta(u, v)}{J(v)}, \; J(v) \text{ ist eine Funktion in } v \text{ allein}, \tag{4.35}$$

geschrieben werden. Gl. (3.14 a) und die spezielle Bauart von β, (4.34), liefern

$$4 \beta^2 l = [-\tfrac{5}{4} q_u^2 + q\, q_{uu} + 2(d + a)\, q^2]\, p^2(v). \tag{4.36}$$

Aus (4.35) und (4.36) ergibt sich für die Funktion $J(v)$

$$J(v) = \frac{p(v)}{l_0}, \; l_0 = \text{konstant}, \; l_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{4.37}$$

und somit für $l(u, v)$

$$l(u, v) = l_0\, q(u) \;\; \forall (u, v) \in H. \tag{4.38}$$

Schließlich hat auch noch der Koeffizient $W(u_0)$, (3.14 b), wegen (4.34) die spezielle Bauart

$$W(u_0) = w_0\, q^2(u), \; w_0 = (d - a)_0^2 + 4\, b_0\, c_0, \; w_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.39}$$

so daß das Polynom $h_1(\alpha)$, (3.17), für $l \neq 0$ auf H, lautet

$$\bar{h}_1(\alpha) = q^2(u_0)p^4(v) + 4l_0p^2(v)\alpha^2 + w_0\alpha^4, \text{ mit } l_0 \neq 0. \quad (4.40)$$

Für die Nullstellen von $\bar{h}_1(\alpha)$ finden wir nun im Fall, $w_0 \neq 0$,

$$\alpha_1(u_0, v) = -\alpha_2(u_0, v) = c_1\sqrt{q(u_0)}\,p(v), \quad c_1 = \sqrt{\frac{-2l_0 + \sqrt{4l_0^2 - w_0}}{w_0}} \quad (4.41)$$

$$\alpha_3(u_0, v) = -\alpha_4(u_0, v) = c_2\sqrt{q(u_0)}\,p(v), \quad c_2 = \sqrt{\frac{-2l_0 - \sqrt{4l_0^2 - w_0}}{w_0}}$$

und im Fall, $w_0 = 0$,

$$\alpha_1(u_0, v) = -\alpha_2(u_0, v) = c_3\sqrt{q(u_0)}\,p(v), \; c_3 = \frac{1}{\sqrt{-2l_0}}. \quad (4.42)$$

2. Ist $l(u, v) = 0 \; \forall (u, v) \in H$, und ist $W(u_0) \neq 0$ an jeder Stelle $u = u_0 =$ konstant, $u_0 \in U_0 \subset U$, so hat $W(u_0)$ wieder die Gestalt (4.39) mit $w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; als Nullstellen des Polynoms (3.17) mit diesen Koeffizienten

$$\bar{\bar{h}}_1(\alpha) = q^2(u)p_4(v) + w_0\alpha^4, \text{ mit } w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.43)$$

ergeben sich wieder rationale Funktionen in $p(v)$ von der einfachen Gestalt

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_0, v) &= -\alpha_2(u_0, v) = c_4\sqrt{q(u_0)}\,p(v) \\ \alpha_3(u_0, v) &= -\alpha_4(u_0, v) = ic_4\sqrt{q(u_0)}\,p(v), \; c_4 = 1/\sqrt{-w_0}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Richtungsfunktionen (4.41) und (4.42) bzw. (4.44) für die *Fälle* 1 und 2 haben alle die Bauart

$$\alpha(u_0, v) = \varrho(u_0)\beta(u_0, v), \text{ für } \beta \text{ nach (4.34) und } (u_0, v) \in H. \quad (4.45)$$

Als Lösungen von $\Delta_I = 0$, (3.14), zeigen diese Funktionen auf H, (3.11), genau dann die Richtung einer ebenen Schattengrenze an, wenn sie zusätzlich die Differentialgleichung (3.12) lösen — genau dann sind diese Richtungsfunktionen auch Lösungen der beiden, für ebene Schattengrenzen notwendigen und hinreichenden Bedingungen $\Delta = 0$, $\Delta^* = 0$. Wegen der speziellen Bauart von β, (4.34), verschwindet $\Delta(\alpha) - \Delta^*(\alpha)$ auf H für eine Funktion (4.45) genau dann identisch in v, wenn $\varrho(u_0)$ die Gestalt

$$\varrho(u_0) = c/\sqrt{q(u_0)},\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{4.46}$$

annimmt, womit dann α, (4.45), tatsächlich die in (4.41), (4.42) und (4.44) auftretende Form

$$\alpha(u_0, v) = c\sqrt{q(u_0)}\, p(v),\ p(v) \text{ nach (4.34) und } (u_0, v) \in H \tag{4.47}$$

findet.

4.3. Die reellen Konstanten l_0 und w_0 sowie die reelle Funktion $q(u)$ in (4.40) und (4.43) können so gewählt werden, daß mindestens ein Paar der unter (4.41), (4.42) und (4.44) angeführten, negativ gleichen Richtungsfunktionen $\alpha_j(u_0, v) = -\alpha_{j+1}(u_0, v)$, $j \in \{1, 3\}$, reelle Funktionen auf $U_0 \subset U$ werden.

Da die Richtungsfunktion (4.47) einer ebenen Schattengrenze mit dem Urbild (3.4a) auf einem nichtquadratischen, nichttorsalen C^r-Regelflächenstück $\varphi(H)$, $r \geqslant 6$, einer ES-Regelfläche Φ eine rationale Funktion in v über $\mathbb{R}$ ist, muß jede Begleitregelfläche der stetigen Schar ebener Schattengrenzen längs einer Erzeugenden $e(u_0) \subset \Phi$ — analog zu den Überlegungen in **4.1**, *Fall* 1 — der zu $e(u_0)$ transversale Regulus $\Omega_t(u_0)$ auf einer ringförmigen Quadrik $\Omega(u_0)$ sein. Jede Erzeugende aus $\Omega_t(u_0)$ in einem Nichtfleknodalpunkt, $\varphi(u_0, v_0)$ mit $\beta(u_0, v_0) \neq 0$, der Regelfläche $\varphi(G)$ ist dann Tangente an eine ebene Schattengrenze. Da auch die konjugierten Flächentangenten von $\varphi(G)$ zu den Erzeugenden von $\Omega_t(u_0)$ in den Punkten der Erzeugenden $\varphi(u_0, v)$ auf einem Regulus $\bar{\Omega}_t(u_0)$ liegen und dabei wegen (4.41), (4.42), (4.44) in jedem Nichtfleknodalpunkt auch die Richtung einer ebenen Schattengrenze anzeigen, ist *mit jeder stetigen Schar ebener Schattengrenzen auf einer ES-Regelfläche auch die konjugierte Kurvenschar, das System der Streiflichtspuren, ebenfalls eine einparametrige Schar ebener Schattengrenzen.* Alle ES-Regelflächen tragen also mindestens ein konjugiertes Kurvennetz mit ebenen Schattengrenzen[18]. (Bei geeigneter Wahl der Konstanten l_0 und w_0 in (4.41) sind sogar zwei konjugierte Kurvennetze mit ebenen Schattengrenzen möglich).

---

[18] Das ist genau die Voraussetzung, die BLANK in [2] zugrunde legt. Im zweiten Teil dieser Arbeit werden diese Blankschen Regelflächen auf Grund der vorliegenden Ergebnisse mit synthetischen Mitteln hergeleitet.

Nach BOL [4], § 101, bildet jede Schar ebener Schattengrenzen auf $\varphi(H)$ wegen $\log(\alpha(u, v))_{uv} = 0\ \forall (u, v) \in H$ mit dem Schmiegliniennetz ein *Sechseckgewebe*, und das *konjugierte Netz ebener Schattengrenzen liegt zum Schmiegliniennetz diagonal.*

Die Tangente an eine ebene Schattengrenze ist wegen (3.11) nur in einem Nichtfleknodalpunkt erklärt; wegen Gl. (4.47) kann sie niemals mit der konjugierten Flächentangente, also mit einer Streiflichttangente, übereinstimmen; sie ist daher keine Schmiegtangente. Die gemeinsamen Erzeugenden der bzgl. der Schmiegquadrik $\Sigma(u_0)$ polar liegenden, transversalen Reguli $\bar{\Omega}_t(u_0)$ und $\Omega_t(u_0)$ sind Schmiegtangenten von Φ und müssen daher stets die Fleknodalpunkte von $e(u_0)$ enthalten. Da Φ als nichtquadratisch vorausgesetzt wurde, liegen auf jeder nichtreguloiden Erzeugenden über $\mathbb{C}$ höchstens zwei Fleknodalpunkte (vgl. Abschnitt **2.2**); daraus folgt schließlich, daß $\bar{\Omega}_t(u_0)$ und $\Omega_t(u_0)$ i. a. verschieden sind.

Die Eigenschaften jeder Streiflichtspur, selbst eben und Schattengrenze zu sein, haben weitreichende Folgen. Fürs erste muß der nach Satz **2** als algebraisch erkannte Träger der Lichtpunktmenge l eine Punktreihe $\mathfrak{P}_z$ auf einer reellen Geraden z sein, denn sämtliche Tangenten einer Streiflichtspur $\bar{c}^{(s)}$ treffen l; die dichte Menge reeller Punkte l liegt daher in allen Trägerebenen $\bar{\varepsilon}^{(s)}$ dieser ebenen Flächenkurven $\bar{c}^{(s)}$. Zweitens muß die nach Satz **1** algebraische Ebenenschar Γ der reellen Schattenebenen ein Büschel $\mathfrak{E}_{\bar{z}}$ mit der reellen Geraden $\bar{z}$ als Achse sein; denn die zu den Streiflichtspuren $\bar{c}^{(s)}$ als Schattengrenzen gehörigen Lichtpunkte $\bar{L}^{(s)}$ inzidieren mit jeder Ebene $\varepsilon^{(t)}$ einer Schattengrenze $c^{(t)}$. Die Ebenenschar der Schattenebenen $[\varepsilon^{(t)}]$ liegt also in einem Büschel $\mathfrak{E}_{\bar{z}}$ mit der Trägergeraden $\bar{z}$ der Lichtpunktmenge $\bar{l} = \{\bar{L}^{(s)}\}$ aller Streiflichtspuren als Achse.

Wir fassen das Ergebnis dieses Abschnittes zusammen:

Satz 3: *Eine nichtquadratische, windschiefe C^r-Regelfläche, $r \geqslant 6$, trägt eine stetige Schar ebener Schattengrenzen genau dann, wenn die nicht identisch verschwindende Grundhalbinvariante $\beta(u, v)$ die Bauart*

$$\beta = q(u)\,p(v),\ q(u) \in C^{r-2},\ p(v) = b_0 + (d-a)_0\, v - c_0\, v^2$$

$$\text{mit } b_0, (d-a)_0, c_0 \mid \in \mathbb{R},$$

hat, und weiters für die Koeffizienten $l(u_0, v)$, $W(u_0)$ der Richtungsindikatrix r_1

$$0 = h_1(\alpha) := \beta^4 + 4\,l\,\beta^2\,\alpha^2 + W\alpha^4$$

an jeder Stelle $u = u_0 =$ konstant, $u_0 \in J \subset U$ gilt:

$$l(u_0, v) = l_0\, q(u_0),\ W(u_0) = w_0\, q^2(u_0)$$

$$\text{mit } l_0, w_0 \mid \in \mathbb{R} \text{ und } (l_0, w_0) \neq (0, 0).$$

Mit jeder stetigen Schar ebener Schattengrenzen einer nichtquadratischen, windschiefen C^r-Regelfläche ist zugleich die Schar der dazu konjugierten Streiflichtspuren ebenfalls ein einparametriges System ebener Schattengrenzen. Die Begleitregelflächen jeder Schar ebener Schattengrenzen sind Reguli. Die Ebenen des konjugierten Kurvennetzes ebener Schattengrenzen liegen in zwei Ebenenbüscheln $\mathfrak{E}_{\bar{z}}$ bzw. $\mathfrak{E}_z$, deren reelle Achsen $\bar{z}$ bzw. z die Lichtpunkte für die Flächenkurven in den Ebenen des jeweils anderen Büschels tragen.

Literatur

[1] BARNER, M.: Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen. Math. Z. **62**, 50—93 (1955).

[2] BLANK, J.: Über geradlinige Flächen mit einem konjugierten Netz ebener Kegellinien. Commun. Soc. Math., Kharkow 7, 15—24 (1933).

[3] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Bd. I. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1950.

[4] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Bd. II, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1954.

[5] BRAUNER, H.: Die algebraischen windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen. Math. Ann. **176**, 1—14 (1968).

[6] BRAUNER, H.: Die Flächen, welche stetige Scharen ebener geodätischer Linien tragen. Jahresber. DMV **71**, 160—166 (1969).

[7] BRAUNER, H.: Die windschiefen Kegelschnittflächen. Math. Ann. **183**, 33—44 (1969).

[8] DEGEN, W.: Eine Kennzeichnung ebener Kegelschattengrenzen. Arch. Math. XVII, 465—467 (1966).

[9] MAYER, O.: Sur les surfaces réglées de Peterson. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine **50**, 61—74 (1958).

[10] ÖZKAN, A.: Integralfreie Darstellung der Zentralbewegung. Arch. Math. XI, 378—381 (1960).

[11] SALKOWSKI, E.: Zur Theorie der Affingesimsflächen. Math. Z. **17**, 144—148 (1923).

[12] WAERDEN, B. V. D.: Algebra I, 8. Auflage, Heidelberger T. B. Bd. **12**, Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1971.

[13] WALTER, R.: Zur allgemeinen und projektiven Kinematik einparametriger Ebenenscharen. Math. Z. **110**, 339—374 (1969).

[14] WALTER, R.: Zur projektiven Kinematik konjugierter Systeme des n-dimensionalen Raumes. Arch. Math. XIX, 313—324 (1969).

K. MEIRER
1. Institut für Geometrie
Gußhausstraße 27
Technische Universität Wien,
A-1040 Wien, Österreich