## Werk

**Titel:** Notiz zu den quadratfreien Zahlen in arithmetischen Progressionen.

**Autor:** Fluch, W.

**Jahr:** 1976

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0082|log25


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 82, 269—274 (1976)
© by Springer-Verlag 1976

# Notiz zu den quadratfreien Zahlen in arithmetischen Progressionen

Von

**W. Fluch**, Graz

*(Eingegangen am 19. September 1975)*

**Abstract**

**A Notice on Squarefree Numbers in Arithmetic Progressions.** Some lower estimates for the number of squarefree (or nearly squarefree) numbers in arithmetic progressions are proved; it follows that a sharpened version of a result of PRACHAR on 3-free numbers holds true. For the least squarefree number of the series $km^2+l$ the estimate $<k^{3+\varepsilon}$ is proved. A very simple proof of a theorem of ERDÖS and PRACHAR is also given.

## § 0. Einleitung

In der folgenden Notiz werden einige untere Abschätzungen für die Anzahl quadratfreier (bzw. fast-quadratfreier) Zahlen in arithmetischen Progressionen bewiesen; es ergibt sich in § 1 das Theorem 2, für das man Analoga für $r$-freie Zahlen ($r>3$) und höhere Progressionen beweisen kann. In § 2 wird für die kleinste quadratfreie Zahl der Reihe $km^2+l$ die Abschätzung $<k^{3+\varepsilon}$ gegeben. Ferner wird noch (§ 4) ein Satz von ERDÖS—PRACHAR behandelt.

## § 1. Die lineare Progression

Seien $\mathfrak{W}$ die Menge der natürlichen Zahlen $\mathfrak{W}=\{n\leqq x\,|\,n=km+l,\ 0<l<k,\ (l,k)=1,\ m=0,1,2,\ldots\}$, $x$ reelle ($>0$), $l,k$ natürliche Zahlen,[1] $\omega(p)=1$ für $p\nmid k$ und $=0$ für $p\,|\,k$; $P_z=\prod\limits_{\substack{p<z\\ \omega(p)\neq 0}} p$.

[1] Mit $p$ bezeichnen wir durchwegs Primzahlen ($q,q_1$ etc. quadratfreie Zahlen). Leere Summen bedeuten null, leere Produkte 1. Ferner steht $p\,|\,k$ für „$p$ teilt $k$" und $p\nmid k$ für „$p$ teilt nicht $k$".

In diesem § setzen wir $N=x/k\geqq 1$ voraus, ferner ist $|\mathfrak{W}|=\sum_{n\in\mathfrak{W}} 1$. Mit der Bezeichnung $Q_{k,l}(x,z)=\sum_{n\in\mathfrak{W},(n,P_z^2)=\text{q. fr.}} 1$ gilt die Beziehung (welche man mittels Induktion nach $p$, $p\,|\,P_z$ beweist)

$$Q_{k,l}(x,z)=|\mathfrak{W}|-\sum_{p\,|\,P_z} Q_{k,l\bar{p}^2}(x/p^2,p) \tag{1}$$

(es ist dabei $p\bar{p}\equiv 1 \pmod k$); mit Hilfe der elementaren Ungleichung

$$Q_{k,l\bar{p}^2}(x/p^2,p)\leqq|\mathfrak{W}(p^2)|:=\sum_{\substack{n\in\mathfrak{W}\\ n\equiv 0(p^2)}} 1=N/p^2+O(1),\quad (p\nmid k)$$

erhalten wir für $z\leqq N$ aus (1)

$$Q_{k,l}(x,z)\geqq N+O(1)-\sum_{p\,|\,P_z}(N/p^2+O(1))=\alpha_0(z)\,N+O(\pi(z)) \tag{2}$$

mit der Konstanten $\alpha_0(z)=1-\sum_{p\,|\,P_z} 1/p^2>\alpha_0=1-\sum_p 1/p^2$ [2].

Also

**Theorem 1:** *In einer arithmetischen Progression $km+l$, mit $0<l<k$, $(k,l)=1$ gilt die untere Abschätzung* ($N=x/k\geqq 1$)

$$Q_{k,l}(x,z)\geqq\alpha_0(z)\,N+O(\pi(z))>\alpha_0 N+O(N/\lg 2N), \tag{3}$$

*wobei $\pi(z)=\sum_{p<z} 1$ und $z\leqq N$.*

Setzt man in (3) $z=N\geqq N_0$ (= absolute Konstante) $>1$ voraus, so wird (wegen $\alpha_0>0$) $Q_{k,l}(x,N)\geqq 1$, d. h. $\exists$ ein $n_1$ aus der Progression mit $q_1 N^{r\alpha}\leqq n_1\leqq kN$ ($r=$ Anzahl der $p^\alpha\,|\,n_1$, $q_1=$ quadratfreie Zahl); für $k<\frac{1}{3}N^3$ ist notwendig $r=1$, $\alpha=2$ oder 3. Die Zahlen der Form $p^3q$ lassen sich wie folgt eliminieren: ihre Anzahl $A$ ist offenbar $(v(k)=\sum_{p\,|\,k} 1)$

$$A\leqq\sum_{\substack{d^3n\equiv l(k)\\ d^3n<x,\,d\geqq y}} 1=O\Big(3^{v(k)}\Big(\sum_{n<x/y^3}(1/k)\sqrt[3]{x/n}+O(1)\Big)\Big)=$$

$$=O\big(3^{v(k)}\,(x/k\,y^2+x/y^3)\big)<\tfrac{1}{2}\,\alpha_0 N\,,$$ [3]

für $y=c_1\,3^{1/3\,v(k)}\,k^{1/3}=N$ ($c_1\geqq 1$, absolute Konstante); dabei ist auch $k<\frac{1}{3}N^3$ erfüllt. Es verbleibt somit der Satz

---

[2] Es ist $\alpha_0>1-\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2=2-\pi^2/6>0$.

[3] Bei festem $n$, $(n,k)=1$, hat die Kongruenz $d^r n\equiv l \pmod k$ höchstens $r^{v(k)} \bmod k$ verschiedene Lösungen.

**Theorem 2:** *Zu jedem Modul $k \geqq k_0$ einer arithmetischen Progression $km+l$, $0<l<k, (k,l)=1$ existiert eine kleinste natürliche Zahl*

$$n_1(k,l) \leqq c_1 3^{1/3\, v(k)} k^{4/3} \tag{4}$$

*von der Gestalt $n_1 = q_1$ oder $p^2 q$ (wobei $q_1, q$ quadratfreie Zahlen sind, $p$ eine Primzahl $\geqq N$ und $c_1 \geqq 1$ eine absolute Konstante ist)*[4].

## § 2. Die arithmetische Progression $km^2+l$ zweiten Grades

Es sei $\mathfrak{W}_2$ die Menge $\mathfrak{W}_2 := \{n \leqq x, n = km^2+l, 0<l<k, (k,l)=1\}$ und $k$ kein vollständiges Quadrat, $x =$ reell $>0$, $k,l,m$ natürliche Zahlen ($m \leqq N$); ferner $Q_{k,l}^{(2)}(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen in $\mathfrak{W}_2$, d. h.

$$Q_{k,l}^{(2)}(x) = \sum_{n \in \mathfrak{W}_2} \mu^2(n) = \sum_{n \in \mathfrak{W}_2} \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \sum\sum_{d<y} + \sum\sum_{d>y} = \sum_1 + \sum_2;$$

für die Teilsumme $\sum_2$ haben wir

$$|\sum_2| \leqq \sum_{d>y} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{W}_2 \\ n \equiv 0 (d^2)}} 1 = O\left(\tau(l)(x/y^2) \lg 2x\right) = O_\varepsilon\left(k^\varepsilon (x/y^2) \lg 2x\right)^5, \tag{5}$$

wobei $\tau(d) =$ Anzahl der Teiler von $d$ ist; $\bar{n}d^2 - km^2 = l$ hat nämlich nach einem Hilfssatz von ESTERMANN[6], da $\bar{n}k =$ kein vollständiges Quadrat (weil $(\bar{n},k)=1$ ist), und da $\bar{n}d^2 \leqq x$, bei festem $\bar{n}$ höchstens $2\tau(l)(\lg x+1)$ Lösungen. Die Anzahl der $\bar{n}$ ist aber $O(x/y^2)$ und $\tau(l) = O_\varepsilon(l^\varepsilon)$, so daß die Behauptung (5) folgt.

Im Bereich $m \leqq N$, mit $x \leqq kN^2+l (\leqq 2kN^2)$, hat man für die andere Summe

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{d<y} \mu(d) \sum_{\substack{n \in \mathfrak{W}_2 \\ n \equiv 0 (d^2)}} 1 = \sum_{d<y} \mu(d)\, \omega(d^2)\left(N/d^2 + O(1)\right) = \\ &= N \prod_{\omega(p^2) \neq 0} (1 - \omega(p^2)/p^2) + O\Big(N \sum_{d \geqq y} \omega(d^2)/d^2 + \sum_{d<y} \omega(d^2)\Big)^7, \end{aligned} \tag{6}$$

---

[4] Dies ist eine Verschärfung eines Satzes von PRACHAR über 3-freie Zahlen (siehe [5], S. 176), denn es ist $p \nmid q$, also $n_1$ 3-frei.

[5] $O_\varepsilon$ bedeutet natürlich, daß die $O$-Konstante von $\varepsilon$ abhängt.

[6] ESTERMANN, TH.: Einige Sätze über quadratfreie Zahlen. Math. Ann. **105**, 654—662 (1931) (Anhang, Hilfssatz 2, S. 660).

[7] Es ist $\sum_{d<y} \tau(d) = O(y \lg y)$, $\sum_{d>y} \tau(d)/d^2 = O(\lg y/y)$.

wobei $\omega(d)$ die Anzahl der Lösungen $\bmod d$ der Kongruenz $n = km^2 + l \equiv 0 \pmod d$ ist; $d$ ist quadratfrei und $\omega(p^2) \leqq 2$ für $p \nmid k$ und $\omega(p^2) = 0$ für $p \mid k$. Daher ist $\omega(d^2) \leqq \tau(d)$.

$$\sum\nolimits_1 = P_k \cdot N + O(N/y \lg y + y \lg y),$$

$$P_k = \prod_p (1 - \omega(p^2)/p^2) > \prod_p (1 - 2/p^2).$$

Sei weiters $y = c_1 k^{\varepsilon/3} x^{\frac{1}{3}} (> y_0)$. Dann erhält man den Satz

**Theorem 3:** *Die Anzahl der quadratfreien Zahlen der Progression zweiten Grades $km^2 + l$ $(0 < l < k, (k,l) = 1$, $k$ kein vollständiges Quadrat$)$ ist*

$$Q_{k,l}^{(2)}(x) = P_k \cdot N + O_\varepsilon(N/y \lg y + k^{\varepsilon/3} x^{\frac{1}{3}} \lg 2x) \tag{7}$$

*(mit $y > y_0$ wie oben festgesetzt). Insbesondere ist $Q_{k,l}^{(2)}(x) > 1$ für $N = c_2(\varepsilon) k^{\varepsilon/3} x^{\frac{1}{3}} \lg x$ $(> N_0)$, d. h. die kleinste quadratfreie Zahl $q_1^{(2)}(k,l)$ ist*

$$q_1^{(2)}(k,l) \leqq c_3(\varepsilon) k^{3+2\varepsilon} \lg^6 k < k^{3+\varepsilon'} \text{ (mit } k \geqq k_0(\varepsilon')). \tag{8}$$

## § 3. Quadratfreie Zahlen in kurzen Intervallen

Nun sei wieder $n = km + l$ $(0 < l < k, (k,l) = 1)$ und $\mathfrak{W}$ die Intervall-Menge $\mathfrak{W} = \{x \leqq n \leqq x + y\}$ mit reellen Zahlen $x, y (> 0)$; das Intervall sei kurz d. h. $x + y \leqq 2x$. Für die Anzahl $Q(\mathfrak{W})$ der quadratfreien Zahlen aus $\mathfrak{W}$ gilt dann

$$Q(\mathfrak{W}) = \sum_{\substack{d < z \\ (d,k)=1}} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{W} \\ n \equiv 0 (d^2)}} \mu(d) + \sum_{\substack{z < d < x+y \\ (d,k)=1}} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{W} \\ n \equiv 0 (d^2)}} \mu(d) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2; \tag{9}$$

$$\sum\nolimits_1 = (y/k) \sum_{\substack{d < z \\ (d,k)=1}} \mu(d)/d^2 + O(z) = A_k (y/k) + O(y/kz + z) \tag{10}$$

mit $A_k = \prod_{p \nmid k} (1 - 1/p^2)$, und

$$|\sum\nolimits_2| \leqq \sum_{d > z} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{W} \\ n \equiv 0 (d^2)}} 1 \leqq \sum_{m < 2x/z^2} \sum_{z < d < \sqrt{2x/m}} 1 = O\left(2^{v(k)} (x/kz + x/z^2)\right); \tag{11}$$

dabei ist $2^{v(k)}$ die Anzahl der Restklassen $l_i \pmod k$[8] mit $v(k) = \sum_{p \mid k} 1$. Wir setzen $z = (2^{v(k)} x)^{\frac{1}{3}}$ und erhalten das

[8] Siehe [5], S. 175!

**Theorem 4:** *Die Menge* $\mathfrak{W} = \{n \equiv l(k) \,|\, x \leqq n \leqq x+y, 0<l<k, (k,l)=1\}$ *enthält für* $y = c_1 \max\{(2^{v(k)}x)^{\frac{1}{3}}k;\ (2^{v(k)}x)^{\frac{2}{3}}\}$ $(\leqq x)$ *eine quadratfreie Zahl (sobald* $x \geqq x_0(k) = c_2 2^{v(k)/2} k^{\frac{1}{2}}$; $c_1, c_2 =$ *abs. Konstanten).*

## § 4. Ein statistischer Satz

Wir geben einen überaus einfachen Beweis eines Satzes (in abgeschwächter Form) von Erdös—Prachar [6]. Dazu greifen wir auf § 1 zurück: $\mathfrak{W} := \{n \leqq x \,|\, n = km+l,\ 0<l<k,\ (l,k)=1,\ x$ reell $>0\}$. Offenbar gilt folgende Ungleichung $(z = N)$:

$$\sum_{\substack{l \bmod k \\ (l,k)=1}} \{Q_{k,l}(x,z) - Q_{k,l}(x)\} \leqq \sum_{d \geqslant z} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{W}_0 \\ n \equiv 0(d^2)}} 1 = \sum\nolimits_1, \tag{12}$$

wobei $\mathfrak{W}_0 = \sum_{l \bmod k, (l,k)=1} \mathfrak{W}$ und

$$\sum\nolimits_1 \leqq \sum_{m < x/z^2} \sum_{z < d < \sqrt{x/m}} 1 \leqq 6x/z \text{ ist; } (x \geqq x_0). \tag{13}$$

Ist nun $B$ die Anzahl der Restklassen $l \bmod k$, für welche $Q_{k,l}(x) = 0$ ist, so folgt aus (12) und (3): $(N \geqq N_0,\ N = x/k)$

$$\tfrac{1}{2}\alpha_0 B \cdot N < \tfrac{1}{2}\alpha_0(z)\, B \cdot N \leqq 6x/z\,, \tag{14}$$

also mit $z = N$, $N = C_\varepsilon^0 = 12/\varepsilon\alpha_0 \geqq C_0 (\geqq 1)$ die Abschätzung

$$B < \varepsilon k\,. \tag{15}$$

**Theorem 5:** *In einer arithmetischen Progression* $km+l, (0<l<k, (k,l)=1)$ *ist bis auf* $B < \varepsilon k$ *Restklassen* $l \bmod k$ *die kleinste quadratfreie Zahl*

$$q_1(k,l) \leqq C_\varepsilon k \leqq 12/\varepsilon\alpha_0 \cdot k$$

*(mit* $k \geqq k_0, \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\alpha_0 =$ *absolute Konstante).*

### Literatur

[1] Erdös, P.: Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe. Mh. Math. **64**, 314—316 (1960).

[2] Fluch, W.: Bemerkung über quadratfreie Zahlen in arithmetischen Progressionen. Mh. Math. **72**, 427—430 (1968).

[3] Fluch, W.: Verwendung der Zeta-Funktion beim Sieb von Selberg. Acta Arith. **5**, 381—405 (1959).

[4] Jurkat, W., and H. Richert: An improvement of Selberg's sieve method I. Acta Arith. **11**, 217—240 (1965).

[5] PRACHAR, K.: Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe. Mh. Math. **62**, 173—176 (1958).

[6] PRACHAR, K.: Sätze über quadratfreie Zahlen. Mh. Math. **66**, 306—312 (1962).

[7] WARLIMONT, R.: On squarefree numbers in arithmetic progressions. Mh. Math. **73**, 433—448 (1969).

Dr. W. FLUCH
Ungergasse 40/1/6
A-8010 Graz, Österreich