Werk

Titel: Die Verteilung der schlichten Funktionen in einem Funktionenraum.

Autor: Umgeher, Karl

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0081|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 81, 311—314 (1976)
© by Springer-Verlag 1976

Die Verteilung der schlichten Funktionen in einem Funktionenraum

Von

Karl Umgeher, Wien

(Eingegangen am 14. April 1975)

Abstract

Distribution of Univalent Functions in a Function Space. We consider the set of regular functions $H=\{f: f=z+\sum_{n=2}^{\infty} n b_n z^n,\ |b_n|\leqslant 1\}$ on $|z|<1$. We construct a Borel measure μ and a class of outer measures μ_h on H. With these μ and μ_h we show that: $\mu(H\cap S)=0$ and $\mu_h(H\cap S)=0$, (S is the set of normed univalent functions). From $\mu_h(H\cap S)=0$ follows — for $h=t^\alpha$ — that the Hausdorff—Billingsley-dimension of $H\cap S$ is zero.

Es soll hier mit Hilfe eines Maßes μ die Verteilung der normierten schlichten Funktionen in der auf $D=\{z: |z|<1\}$ regulären Funktionsmenge

$$H=\{f: f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} n b_n z^n, |b_n|\leqslant 1\}$$

untersucht werden.

Aus den Sätzen von Montel und Vitali [1] folgt:

(1) *H ist eine kompakte normale Familie in der Topologie der kompakten Konvergenz.*

(2) *Die Topologie der kompakten Konvergenz und der koeffizientenweisen Konvergenz sind auf H äquivalent.*

Wir bezeichnen mit K die Menge der Koebefunktionen $f(z)=z/(1-e^{i\alpha}z)^2$. Es sei $T=(S\cap H)-K$ (S Menge der durch $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normierten schlichten Funktionen). Wir betrachten nun den Produktraum $G=\prod_{n=2}^{\infty}\bar{D}_n$ mit $\bar{D}_n=\bar{D}\ \forall n$. Nimmt man auf $\bar{D}$ die durch die euklidische Metrik erzeugte Topologie und das auf 1 normierte Lebesguesche Maß λ^2, so wird G mit der Produkttopologie ein topologischer Raum ([6]) bzw. ein Maßraum mit normiertem

Maß λ $(\lambda(G)=1)$ ([3]). Es gilt: G ist ein kompakter Hausdorffraum ([6]). λ ist ein Borelsches Maß auf G ([3]).

Zur genaueren Untersuchung von Nullmengen führen wir auf folgende Weise eine Klasse äußerer Maße λ_h ein.

a) $h(t)$ sei auf einem Intervall $[0,a)$ stetig und monoton wachsend mit $h(0)=0$.

b) Sei $E \subset G$. Unter einer *ϱ-Überdeckung* $(0<\varrho<1)$ von E versteht man eine Überdeckung von E mit abzählbar vielen Zylindermengen E_i, für die gilt: $\lambda(E_i)<\varrho$. Es sei U_ϱ die Menge aller ϱ-Überdeckungen.

c) Wir setzen $\lambda_h^{(\varrho)}(E)=\inf\limits_{U_\varrho}\sum\limits_i h(\lambda(E_i))$, wobei $\inf\limits_{U_\varrho}$ das Infimum über alle ϱ-Überdeckungen von E bedeutet.

Da $\lambda_h^{(\varrho)}(E)$ für $\varrho\to 0$ monoton wachsend ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varrho\to 0}\lambda_h^{(\varrho)}(E)=\lambda_h(E).$$

λ_h ist ein äußeres Maß auf G und heißt das Hausdorff—Billingsley-Maß in bezug auf die Funktion h.

d) Spezialfall $h(t)=t^\alpha$. Man nennt dann $\lambda_h=\lambda_\alpha$ das α-dimensionale Maß. Für dieses gilt [2]:

Es gibt ein α_0 mit

$$\lambda_\alpha(E)=\begin{cases}\infty & \alpha<\alpha_0\\ 0 & \alpha>\alpha_0.\end{cases}$$

Dieses α_0 heißt *Hausdorff—Billingsley-Dimension* $\dim_\lambda(E)$ von E.

Bemerkung: Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung des Hausdorffschen Maßes in bezug auf eine Funktion h, die von BILLINGSLEY für $h(t)=t^\alpha$ auf Maßräume verallgemeinert wurde ([2], [3], [5]).

Wir definieren nun eine Abbildung $\psi\colon H\to G$ in folgender Weise: Sei $f\in H$, dann ist $\psi(f)=(b_2,b_3,\ldots)$; ψ ist eine bijektive Abbildung und wegen (2) sogar topologisch. H und G sind somit homöomorphe Räume. Durch ψ definieren wir nun ein Borelsches Maß μ auf H. Sei $E\subset H$:

$$\mu(E)=\lambda(\psi(E)).$$

Analog lassen sich auch die äußeren Maße und die Hausdorff—Billingsley-Dimension übertragen. Es ist:

$$\mu_h(E)=\lambda_h(\psi(E)) \quad\text{und}\quad \dim_\mu(E)=\dim_\lambda(\psi(E)).$$

Um die Menge $S \cap H$ zu untersuchen, benötigen wir folgendes Ergebnis von HAYMAN [4].

Sei $f \in S - K$, dann gilt für die Koeffizienten a_n in der Entwicklung von f:

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|/n = \alpha < 1 .$$

Bezeichnet man für $n, m \in N$ mit $E_{n,m}$ die Teilmenge

$$E_{n,m} = \{f : f \in H, |b_k| \leqslant 1 - 1/n \text{ für } k \geqslant m\}$$

von H, so gilt:

Zu jedem $f \in T$ gibt es ein Paar (n,m), so daß $f \in E_{n,m}$. Für T gilt daher:

$$T \subset E = \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{m=2}^{\infty} E_{n,m} .$$

Satz 1: *Für das Borelsche Maß μ auf H gilt:*

$$\mu(S \cap H) = 0 .$$

Beweis: Wir bezeichnen mit

$$A_{n,m} = \prod_{k=2}^{m-1} \bar{D}_k \times \prod_{k=m}^{\infty} \{z : |z| \leqslant 1 - 1/n\} ;$$

$$A = \bigcup_n \bigcup_m A_{n,m} ; \quad M = \prod_{k=2}^{\infty} \partial D_k = \prod_{k=2}^{\infty} \{z : |z| = 1\} .$$

Damit gilt nun: $\psi(E_{n,m}) = A_{n,m}$.

Nach Konstruktion des Produktmaßes ([3]) gilt aber, wie man sofort erkennt: $\lambda(A_{n,m}) = 0 \; \forall n, m \in N$ und $\lambda(M) = 0$. Daraus folgt weiter:

$$\mu(E_{n,m}) = \lambda(\psi(E_{n,m})) = \lambda(A_{n,m}) = 0$$

und

$$\mu(T) \leqslant \mu(E) = \sum_{n,m} \mu(E_{n,m}) = 0 .$$

Weiters ist $\mu(K) = \lambda(\psi(K)) \leqslant \lambda(M) = 0$, und daher

$$\mu(S \cap H) = \mu(T) + \mu(K) = 0 .$$

Satz 2: *Für alle äußeren Maße μ_h gilt:*

$$\mu_h(S \cap H) = 0 .$$

Beweis: Wegen $\psi(T) \subset A$ und $\psi(K) \subset M$ genügt es zu zeigen, daß $\lambda_h(A) = \lambda_h(M) = 0$ ist. Dann gilt nämlich:

$$\mu_h(T) \leqslant \mu_h(E) = \lambda_h(\psi(E)) = \lambda_h(A) = 0$$

und

$$\mu_h(K) = \lambda_h(\psi(K)) \leqslant \lambda_h(M) = 0 .$$

Wir berechnen nun $\lambda_h(A_{n,m})$: Sei $0<\varrho<1$. Dann gibt es ein $k>m$, so daß für die Menge

$$V_{n,m,k}=\prod_{i=2}^{m-1}\bar{D}_i\times\prod_{i=m}^{m+k}\{z:|z|\leqslant 1-1/n\}\times\prod_{i=m+k+1}^{\infty}\bar{D}_i$$

gilt: $\lambda(V_{n,m,k})<\varrho$. Dies folgt sofort aus $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(V_{n,m,k})=0$. Wegen $A_{n,m}\subset V_{n,m,k}$ stellt diese Menge eine aus einer einzigen Menge bestehende ϱ-Überdeckung dar. Daraus folgt nun:

$$\lambda_h^{(\varrho)}(A_{n,m})=\inf_{U_\varrho}\sum_i h\left(\lambda(A_{n,m}^{(i)})\right)\leqslant h\left(\lambda(V_{n,m,k})\right)\leqslant h(\varrho)$$

und
$$\lambda_h(A_{n,m})=\lim_{\varrho\to 0}\lambda_n^{(\varrho)}(A_{n,m})=\lim_{\varrho\to 0}h(\varrho)=0\,.$$

Für A ergibt das nun:

$$\lambda_h(A)\leqslant\sum_{n,m}\lambda_h(A_{n,m})=0\,.$$

Analog zeigt man: $\lambda_h(M)=0$.

Folgerung: Für die Hausdorff—Billingsley-Dimension $\dim_\mu$ gilt:

$$\dim_\mu(S\cap H)=0\,.$$

Beweis: Aus Satz 2 folgt insbesonders: $\mu_\alpha(S\cap H)=0\ \forall\alpha>0$. Nach Definition von $\dim_\mu$ ist dabei:

$$\dim_\mu(S\cap H)=0\,.$$

Literatur

[1] BEHNKE, H., und F. SOMMER: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer. 1955.

[2] BILLINGSLEY, P.: Hausdorff dimension in probability theory. Ill. J. Math. **4**, 187—209 (1960).

[3] HALMOS, P. R.: Measure Theory. Princeton: Van Nostrand. 1950.

[4] HAYMAN, W. K.: Multivalent Functions. Cambridge: University Press. 1958.

[5] SARIO, L., und K. OIKAWO: Capacity Functions. Berlin—Heidelberg—New York; Springer. 1969.

[6] SCHUBERT, H.: Topologie. Stuttgart: Teubner. 1964.

Dr. K. UMGEHER
Institut für Analysis
Technische Universität
Gußhausstraße 27—29
A-1040 Wien, Österreich