Werk

Titel: Zum Einbettungsproblem für Markoff-Prozesse.

Autor: Kopf, Christoph

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0081|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 81, 119—129 (1976)
© by Springer-Verlag 1976

Zum Einbettungsproblem für Markoff-Prozesse

Von

Christoph Kopf, Innsbruck

(Eingegangen am 25. Juni 1974)

Abstract

On the Imbedding Problem for Markov Processes. Every elementary Markov process with a polish state space and with a discrete set of time parameter dense in $\mathbb{R}_+$, whose finite dimensional distributions are derived from a semigroup (K_t) of Markov kernels continuous in $0 \in \mathbb{R}_+$ and whose initial distribution μ satisfies $\mu K_t \ll \mu$, can be imbedded in an elementary Markov process with the same state space and with parameter set $\mathbb{R}_+$, so that the corresponding finite dimensional distributions are equal.

G. Elvfing [2] untersuchte erstmals folgende Frage: P sei die Übergangsmatrix einer Markoff-Kette mit diskreter Parametermenge und endlichem Zustandsraum. Existiert eine Markoff-Kette mit demselben Zustandsraum, jedoch mit kontinuierlicher Parametermenge, deren Übergangsfunktion $P(t)$ die Bedingung $P(1) = P$ erfüllt ? Dasselbe Einbettungsproblem wird in [4] und [7] behandelt. In [5] wird die Fragestellung auf schwache Markoff-Prozesse mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ ausgedehnt, wobei E als polnischer Raum und $\mathfrak{B}$ als σ-Algebra seiner Borelschen Mengen vorausgesetzt wird. In dieser Arbeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen ein elementarer Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ und einer in $\mathbb{R}_+$ dichten, abzählbaren Parametermenge in einen elementaren Markoff-Prozeß mit demselben Zustandsraum und mit $\mathbb{R}_+$ als Parametermenge eingebettet werden kann, derart, daß die entsprechenden endlich-dimensionalen Verteilungen der beiden Prozesse übereinstimmen. Dabei erweist sich die oben angeführte Voraussetzung an den Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ wiederum als zweckmäßig.

Zunächst einige Vorbereitungen.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P, (X_t)_{t \in I})$ ein stochastischer Prozeß mit beliebigem Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ und mit der Parametermenge I, wobei

$I \subset \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geqslant 0\}$. Bezeichne $\mathfrak{H}(I)$ die Menge der nicht-leeren, endlichen Teilmengen J von I, X_J $(J \in \mathfrak{H}(I))$ die Produktabbildung $\bigotimes_{t \in J} X_t$ von Ω in $E^J = \prod_{t \in J} E_t$ $(E_t = E \; \forall t \in J)$ und $\mathfrak{B}^J$ die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{t \in J} \mathfrak{B}_t$ $(\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B} \; \forall t \in J)$ in E^J. Für alle $J \in \mathfrak{H}(I)$ ist X_J $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}^J$-meßbar. P_J sei die Verteilung von X_J, also das Bildmaß von P bei der Abbildung X_J: $P_J = X_J(P)$. $(P_J)_{J \in \mathfrak{H}(I)}$ wird die *Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses* $(\Omega, \mathfrak{A}, P, (X_t)_{t \in I})$ genannt. Für ein $t \in I$ sei $\mathfrak{A}_t$ die von allen Zufallsvariablen X_s mit $s \leqslant t$, $s \in I$ erzeugte σ-Algebra.

Der stochastische Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, P, (X_t)_{t \in I})$ besitzt nun die *elementare Markoff-Eigenschaft*, wenn für jede Menge $B \in \mathfrak{B}$ und jedes Paar $s, t \in I$ mit $s \leqslant t$ gilt:

$$P(\{X_t \in B\} \mid \mathfrak{A}_s) = P(\{X_t \in B\} \mid X_s) \quad P\text{-fast sicher.}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung der endlich-dimensionalen Verteilungen elementarer Markoff-Prozesse ist der Begriff der Markoffschen Übergangswahrscheinlichkeit (kurz Markoff-Kern).

Ein Markoff-Kern K auf $(E, \mathfrak{B})$ ist eine Abbildung von $E \times \mathfrak{B}$ in $[0, 1]$ mit den Eigenschaften

$$\text{für jedes } B \in \mathfrak{B} \text{ ist } x \mapsto K(x, B) \; \mathfrak{B}\text{-meßbar}; \tag{1}$$

$$\text{für jedes } x \in E \text{ ist } B \mapsto K(x, B) \text{ ein W-Maß}. \tag{2}$$

$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(E, \mathfrak{B})$ bezeichne die Menge aller Markoff-Kerne auf $(E, \mathfrak{B})$. Auf $\mathfrak{K}(E, \mathfrak{B})$ wird eine Multiplikation $(K_1, K_2) \mapsto K_1 K_2$ erklärt durch

$$K_1 K_2(x, B) := \int_E K_1(x, dy) \, K_2(y, B) \quad (x, B) \in E \times \mathfrak{B}.$$

Der Kern $(x, B) \mapsto K_e(x, B) := 1_B(x)$ heißt Einheitskern auf $(E, \mathfrak{B})$. Es gilt der folgende

Satz 1: *Bezüglich der oben erklärten Multiplikation ist $\mathfrak{K}(E, \mathfrak{B})$ eine (assoziative) Halbgruppe mit K_e als Einheit.*

Beweis: [5], Satz 1.1.

Bezeichne I nun eine additive Unterhalbgruppe von $\mathbb{R}_+$. Eine Familie $(K_t)_{t \in I}$ von Markoff-Kernen auf $(E, \mathfrak{B})$ heißt *Markoffsche Halbgruppe auf* $(E, \mathfrak{B})$, wenn für alle $s, t \in I$ gilt:

$$K_{s+t} = K_s K_t.$$

Den Zusammenhang zwischen Markoffschen Halbgruppen und elementaren Markoff-Prozessen beschreiben die zwei folgenden Sätze:

Satz 2: *Sei E ein polnischer Raum (d. h. es gibt eine die Topologie von E definierende vollständige Metrik und eine in E dichte, abzählbare Teilmenge) und sei $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen von E. Auf $(E,\mathfrak{B})$ sei eine Markoffsche Halbgruppe $(K_t)_{t\in I}$ und ein W-Maß μ gegeben. Für jedes $J=\{t_1,\ldots,t_n\}\in\mathfrak{H}(I)$ mit $t_1<t_2<\ldots<t_n$ und jedes $B\in\mathfrak{B}^J$ setze man*

$$K_J(B):=\int\!\!\int\ldots\int 1_B(x_1,\ldots,x_n)\,K_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\ldots \ldots K_{t_1}(x_0,dx_1)\,\mu(dx_0)\,. \tag{3}$$

Dann ist $(K_J)_{J\in\mathfrak{H}(I)}$ eine projektive Familie von W-Maßen auf den Räumen $(E^J,\mathfrak{B}^J)$. Weiters existiert ein stochastischer Prozeß $(\Omega,\mathfrak{A},P^\mu,(X_t)_{t\in I})$[1] mit Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$ und Parametermenge I, so daß $(K_J)_{J\in\mathfrak{H}(I)}$ die Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen ist.

Satz 3: *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P,(X_t)_{t\in I})$ ein stochastischer Prozeß mit beliebigem Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$, dessen endlich-dimensionale Verteilungen sich gemäß (3) aus einer Markoffschen Halbgruppe $(K_t)_{t\in I}$ und einem W-Maß μ auf $(E,\mathfrak{B})$ ableiten. Dann besitzt der Prozeß die elementare Markoff-Eigenschaft.*

Beweise: [1], § 64 und § 65.

Für alles weitere gelten folgende Vereinbarungen:

E sei ein polnischer Raum, $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra seiner Borelschen Mengen, H eine dichte, abzählbare additive Untergruppe von $\mathbb{R}$ und $H_+:=H\cap\mathbb{R}_+$; weiters sei $(K_t)_{t\in H_+}$ eine durch H_+ indizierte Markoffsche Halbgruppe mit $K_0=K_e$ und μ ein W-Maß mit der Eigenschaft

$$\mu K_t\ll\mu \quad \text{für alle } t\in H_+\,. \tag{4}$$

Die Existenz eines W-Maßes μ mit der Eigenschaft (4) sichert das

Lemma 1: *Zu jedem W-Maß ν auf $(E,\mathfrak{B})$ gibt es ein W-Maß μ auf $(E,\mathfrak{B})$ mit*

$$\mu K_t\ll\mu \quad \textit{für alle } t\in H_+\,.$$

Beweis: Sei $(a_t)_{t\in H_+}\subset\mathbb{R}$ mit $a_t>0$ für alle $t\in H_+$ und $\sum\limits_{t\in H_+}a_t=1$.

[1] Nur P^μ hängt von μ ab.

Definiert man für $B \in \mathfrak{B}$

$$\mu(B) := \sum_{t \in H_+} a_t \nu K_t(B) = \sum_{t \in H_+} a_t \int_E \nu(dx) K_t(x, B),$$

so gilt:

a) $0 \leqslant \mu(B) \leqslant 1$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$;

b) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(E) = 1$;

c) für $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$ ist

$$\mu(B) = \sum_{t \in H_+} a_t \int_E \nu(dx) \sum_{i \in \mathbb{N}} K_t(x, B_i) = \sum_{t \in H_+} a_t \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_E \nu(dx) K_t(x, B_i) =$$
$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in H_+} a_t \nu K_t(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i).$$

Also ist μ ein W-Maß und folglich auch μK_t für jedes $t \in H_+$. Sei $B \in \mathfrak{B}$ so, daß $\mu(B) = \sum_{t \in H_+} a_t \nu K_t(B) = 0$. Wegen $a_t > 0$ ist $\nu K_t(B) = 0$ für alle $t \in H_+$. Aus

$$\mu K_t(B) = \left(\sum_{s \in H_+} a_s \nu K_s\right) K_t(B) = \sum_{s \in H_+} a_s (\nu K_s) K_t(B) =$$
$$= \sum_{s \in H_+} a_s \nu K_{s+t}(B) = 0$$

folgt die Behauptung.

Nach Satz 2 und Satz 3 existiert mindestens ein elementarer Markoff-Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, P^\mu, (X_t)_{t \in H_+})$, dessen Familie $(K_J)_{J \in \mathfrak{H}(H_+)}$ der endlich-dimensionalen Verteilungen gemäß (3) durch $(K_t)_{t \in H_+}$ und μ gegeben ist. Es wird nun gezeigt, daß sich jeder derartige Markoff-Prozeß unter einer zusätzlichen Voraussetzung an die Markoffsche Halbgruppe $(K_t)_{t \in H_+}$ in einen elementaren Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ und $\mathbb{R}_+$ als Parametermenge einbetten läßt, d. h. daß ein elementarer Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ und Parametermenge $\mathbb{R}_+$ existiert, für dessen Familie $(P_J)_{J \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)}$ der endlichdimensionalen Verteilungen gilt:

$$P_J = K_J \quad \text{für alle } J \in \mathfrak{H}(H_+).$$

Definition 1 (vgl. [3]): Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Maßraum. Ein *Markoff-Operator* T auf $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$[2] ist eine positive, lineare Abbildung von $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ in $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\|T\| = 1$.

Das Bild von $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ unter T wird mit fT bezeichnet. Der zu einem gegebenen Markoff-Operator T adjungierte Operator

auf $L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P)$[2] wird wiederum mit T bezeichnet, operiert jedoch rechtsseitig. Ein Element $g \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ wird durch den adjungierten Operator T auf das eindeutig bestimmte Element $Tg \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ abgebildet mit

$$\int_\Omega fT \cdot g\, dP = \int_\Omega f \cdot Tg\, dP \quad \text{für alle } f \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P).$$

Der adjungierte Operator ist ebenfalls positiv und besitzt dieselbe Norm wie T auf L^1.

Satz 4:

a) Für jedes $t \in H_+$ bestimmt der Markoff-Kern $K_t \in (K_s)_{s \in H_+}$ genau einen Markoff-Operator T_t auf $L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$, so daß die Maße $(f \cdot \mu) K_t(B) := \int f K_t(\cdot, B)\, d\mu$ und $f T_t \cdot \mu(B) := \int f T_t \cdot 1_B\, d\mu$ auf $(E, \mathfrak{B})$ gleich sind für beliebige $f \in L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$. Ferner gilt für den adjungierten Operator T_t:

$$T_t g = K_t g \text{ für jedes } g \in L^\infty(E, \mathfrak{B}, \mu).$$

b) Die Familie $(T_t)_{t \in H_+}$ der in a) bestimmten Markoff-Operatoren bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Halbgruppe.

Beweis: a) Vgl. [6], Satz 5.4.2: Aus $\mu K_t \ll \mu$ folgt für ein $f \in L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$

$$(f \cdot \mu) K_t \ll \mu \quad \text{für jedes } t \in H_+,$$

also für jedes $B \in \mathfrak{B}$:

$$(f \cdot \mu) K_t(B) = \int f T_t \cdot 1_B\, d\mu \quad \text{für ein Element } f T_t \in L^1(E, \mathfrak{B}, \mu).$$

b) Sei $s, t \in H_+$. Für jedes nicht-negative $f \in L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$ und jedes $B \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$\int_B f T_{s+t}\, d\mu = \int_E f \cdot K_{s+t}(\cdot, B)\, d\mu =$$

$$= \int_{x \in E} \int_{y \in E} K_t(y, B) f(x) K_s(x, dy)\, \mu(dx).$$

Auf der Menge der reellen Zufallsvariablen X auf $(E, \mathfrak{B})$ definiert die Abbildung

$$X \mapsto \int_{x \in E} \int_{y \in E} X(y) f(x) K_s(x, dy)\, \mu(dx)$$

---

[2] $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bzw. $L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen der integrierbaren bzw. im wesentlichen beschränkten, reellen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

ein lineares Funktional, das positiv ist und stetig bezüglich monoton wachsenden, konvergenten Folgen. Ferner ist es gleich

$$\int X(y)\,(f\cdot\mu)\,K_s(dy) \text{ für } X=1_A\ (A\in\mathfrak{B}).$$

Daher folgt

$$\int\limits_{x\in E}\int\limits_{y\in E} K_t(y,B)f(x)\,K_s(x,dy)\,\mu(dx)=\int\limits_E K_t(y,B)\,(f\cdot\mu)\,K_s(dy)=$$

$$=\int K_t(y,B)\,(fT_s)\cdot\mu(dy)=\int fT_s(y)\,K_t(y,B)\,\mu(dy)=\int\limits_B (fT_s)\,T_t\,d\mu.$$

Die Beziehung $\int\limits_B fT_{s+t}d\mu=\int\limits_B (fT_s)\,T_t d\mu$ für jedes $B\in\mathfrak{B}$ läßt sich leicht auf beliebige $f\in L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ erweitern.

Damit erhält man $fT_{s+t}=(fT_s)\,T_t$ für alle $f\in L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$, also

$$T_{s+t}=T_s\,T_t \quad \text{für alle } s,t\in H_+.$$

Definition 2: Die Markoffsche Halbgruppe $(K_t)_{t\in H_+}$ heißt *stetig im Ursprung*, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, so daß gilt:

$$\begin{aligned}&|(K_0-K_s)(x,B)|<\varepsilon \text{ } \mu\text{-fast sicher für alle } s<\delta,\ s\in H_+ \text{ und}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für alle } B\in\mathfrak{B}.\end{aligned} \tag{5}$$

Lemma 2: *Ist die Markoffsche Halbgruppe $(K_t)_{t\in H_+}$ stetig im Ursprung, so gilt für die nach Satz 4 durch $(K_t)_{t\in H_+}$ bestimmten Markoff-Operatoren $(T_t)_{t\in H_+}$: Sei $r\in\mathbb{R}_+$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset H_+$ mit $\lim\limits_n r_n=r$. Dann ist $(T_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in der Banach-algebra der stetigen, linearen Abbildungen von $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ in $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$.*

Beweis: Gegeben sei ein $\varepsilon>0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta(\varepsilon/2)$, so daß die Ungleichung (5) für $\varepsilon/2$ erfüllt ist. Dazu gibt es ein $N\in\mathbb{N}$, so daß für alle $n\geqslant N$, $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$|r_{n+p}-r_n|<\delta(\varepsilon/2) \quad \text{für alle } p\in\mathbb{N}.$$

Mit der Bezeichnung $q:=|r_{n+p}-r_n|\in H_+$ folgt:

$$\|T_{r_{n+p}}-T_{r_n}\|=\|T_{\min(r_n,r_{n+p})}\,(T_0-T_q)\|\leqslant\|T_0-T_q\|, \tag{6}$$

$$\|f(T_0-T_q)\|\leqslant\varepsilon\|f\| \quad \text{für alle } f\in L^1(E,\mathfrak{B},\mu). \tag{7}$$

Für $f\in L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ und $F^+:=\{x\in E\,|\,f-fT_q>0\}$, $F^-:=\{x\in E\,|\,f-fT_q<0\}$ ergibt sich nämlich

$$\|f(T_0 - T_q)\| = \|f - fT_q\| = \int_E |f - fT_q|\, d\mu =$$

$$= \int_{F^+} (f - fT_q)\, d\mu + \int_{F^-} (fT_q - f)\, d\mu =$$

$$= \int_{F^+} f\, d\mu - \int_{F^+} fT_q\, d\mu + \int_{F^-} fT_q\, d\mu - \int_{F^-} f\, d\mu =$$

$$= \int_E f \cdot 1_{F^+}\, d\mu - \int_E f \cdot T_q 1_{F^+}\, d\mu + \int_E f \cdot T_q 1_{F^-}\, d\mu - \int_E f \cdot 1_{F^-}\, d\mu =$$

$$= \int_E f \cdot (1_{F^+} - K_q(\cdot, F^+))\, d\mu + \int_E f \cdot (K_q(\cdot, F^-) - 1_{F^-})\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |f|\, |(K_0 - K_q)(\cdot, F^+)|\, d\mu + \int_E |f|\, |(K_q - K_0)(\cdot, F^-)|\, d\mu \leqslant \varepsilon \|f\|.$$

Die Aussagen (6) und (7) ergeben die Behauptung:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N, n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}: \|T_{r_n} - T_{r_{n+p}}\| < \varepsilon.$$

Der Grenzwert der Cauchy-Folge $(T_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist also ein linearer, stetiger Operator auf $L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$ und wird mit T_r bezeichnet. Das Lemma 2 besagt, daß die Abbildung $t \mapsto T_t$ auf H_+ stetig ist und daß $\lim\limits_{\substack{t \to r \\ t \in H_+}} T_t = T_r$ für jedes $r \in \mathbb{R}_+$ existiert. Somit ist die Abbildung $r \mapsto T_r$ auf ganz $\mathbb{R}_+$ stetig. Aus

$$\|fT_r - fT_t\| = \|f(T_r - T_t)\| \leqslant \|f\|\, \|T_r - T_t\| \quad (f \in L^1;\ r, t \in \mathbb{R}_+)$$

folgt $f(\lim\limits_{t \to r} T_t) = \lim\limits_{t \to r} fT_t$.

Daraus ersieht man, daß der Operator T_r für alle $r \in \mathbb{R}_+$ positiv ist und der Beziehung

$$\int_E fT_r\, d\mu = \int_E f\, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1$$

genügt, d. h. daß T_r ein Markoff-Operator auf $L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$ ist. Zu zeigen bleibt noch die Halbgruppeneigenschaft von $(T_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$: Sei $s, r \in \mathbb{R}_+$ und $f \in L^1(E, \mathfrak{B}, \mu)$.

$$fT_{s+r} = \lim_{s' \to s} \lim_{r' \to r} fT_{s'+r'} = \lim_{s' \to s} \lim_{r' \to r} (fT_{s'})\, T_{r'} =$$

$$= \lim_{s' \to s} (fT_{s'})\, T_r = (fT_s)\, T_r.$$

Somit ist folgendes Resultat bewiesen:

Satz 5: *Für die durch eine im Ursprung stetige Halbgruppe* $(K_t)_{t\in H_+}$ *von Markoff-Kernen auf* $(E,\mathfrak{B})$ *bestimmte Halbgruppe* $(T_t)_{t\in H_+}$ *von Markoff-Operatoren auf* $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ *gilt:*

a) $(T_t)_{t\in H_+}$ *läßt sich in genau einer Weise in eine Familie* $(T_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ *von linearen, stetigen Operatoren auf* $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ *einbetten, so daß die Abbildung* $r\mapsto T_r$ *stetig ist.*

b) $(T_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ *ist eine Halbgruppe von Markoff-Operatoren auf* $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$.

Bei einem beliebigen Maßraum $(E,\mathfrak{B})$ ist es nun im allgemeinen nicht möglich, zu einem gegebenen Markoff-Operator T auf $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ die Existenz eines Markoff-Kerns K auf $(E,\mathfrak{B})$ nachzuweisen, welcher T im Sinne von Satz 4a) induziert. Setzt man jedoch den Raum E als polnisch und $\mathfrak{B}$ als σ-Algebra seiner Borelschen Mengen voraus, so gilt der folgende

Satz 6: *Zur Halbgruppe* $(T_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ *von Markoff-Operatoren auf* $L^1(E,\mathfrak{B},\mu)$ *existiert mindestens eine Familie* $(K_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ *von Markoff-Kernen auf* $(E,\mathfrak{B})$ *mit den Eigenschaften*

a) $\int\limits_B f T_r\,d\mu=\int\limits_E f\cdot K_r(\cdot,B)\,d\mu$ *für jedes* $r\in\mathbb{R}_+, f\in L^1$ *und* $B\in\mathfrak{B}$.

b) $K_{s+t}(x,B)=K_s K_t(x,B)$ μ*-fast sicher für jedes* $B\in\mathfrak{B}; s,t\in\mathbb{R}_+$.

c) Setzt man für jedes $J=\{t_1,\ldots,t_n\}\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)$ *mit Elementen* $t_1<\ldots<t_n$ *und jedes* $B\in\mathfrak{B}^J$

$$P_J:=\int\int\ldots\int 1_B(x_1,\ldots,x_n)\,K_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\ldots \ldots K_{t_1}(x_0,dx_1)\,\mu(dx_0), \tag{8}$$

so ist $(P_J)_{J\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)}$ *eine projektive Familie von W-Maßen auf den Räumen* $(E^J,\mathfrak{B}^J)$.

d) $P_J=K_J$ *für alle* $J\in\mathfrak{H}(H_+)$.

Beweis: Die Existenz von $(K_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ und die Behauptung a) folgt aus [6], Satz 5.4.4; b) erhält man aus

$$\int\limits_E f\cdot K_{s+t}(\cdot,B)\,d\mu=\int\limits_B f\,T_{s+t}\,d\mu=\int\limits_B f\,T_s\,T_t\,d\mu=$$

$$=\int\limits_E f\,T_s\cdot K_t(\cdot,B)\,d\mu=\int\limits_E f\cdot K_s K_t(\cdot,B)\,d\mu \quad \text{für jedes } f\in L^1 \text{ und } B\in\mathfrak{B}.$$

c) Da die Beziehung b) nur μ-fast sicher gilt, muß der Beweis von [1], Satz 64.2 entsprechend geändert werden:

Sei $J,H\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)$, so daß $J\subset H$ und $H\setminus J=\{t'\}$, etwa $J=\{t_1,\ldots,t_n\}$ und $H=\{t_1,\ldots,t_i,t',t_{i+1},\ldots,t_n\}$ für ein $i=1,\ldots,n-1$.

Weiters sei $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}$. Gilt nun

$$\begin{aligned} P_H(B_1 \times \ldots \times B_i \times E \times B_{i+1} \times \ldots \times B_n) = \\ = P_J(B_1 \times \ldots \times B_i \times B_{i+1} \times \ldots \times B_n), \end{aligned} \tag{9}$$

so ist die Familie $(P_J)_{J \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)}$ projektiv.

Zu diesem Nachweis werden zwei Hilfsresultate benötigt.

Lemma 3: *Sind P, K zwei Markoff-Kerne auf $(E, \mathfrak{B})$ mit*

$$P(x, B) = K(x, B) \quad \mu\text{-fast sicher für jedes } B \in \mathfrak{B},$$

dann ist für eine Zufallsvariable $f: E \to [0,1]$

$$\int_E f(y)\, P(x, dy) = \int_E f(y)\, K(x, dy) \quad \mu\text{-fast sicher.} \tag{10}$$

Beweis: Man wählt eine gegen f konvergierende, monoton zunehmende Folge von Elementarfunktionen $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i 1_{A_i}$ und vertauscht in (10) lim mit Integralzeichen.

Lemma 4: *Definiert man für $B \in \mathfrak{B}$*

$$B \mapsto \gamma(B) := $$

$$= \int_E \int_{B_1} \ldots \int_{B_{i-1}} K_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, B \cap B_i)\, K_{t_{i-1} - t_{i-2}}(x_{i-2}, dx_{i-1}) \ldots \mu(dx_0),$$

so ist das Sub-W-Maß γ absolut stetig bezüglich μ.

Beweis:

$$\gamma(B) \leqslant \int_E \int_E \ldots \int_E K_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, B)\, K_{t_{i-1} - t_{i-2}}(x_{i-2}, dx_{i-1}) \ldots \mu(dx_0) =$$

$$= \int_E K_{t_1} \ldots K_{t_{i-1} - t_{i-2}} K_{t_i - t_{i-1}}(\cdot, B)\, d\mu = \int_E K_{t_i}(\cdot, B)\, d\mu =$$

$$= \int_E 1\, T_{t_i} \cdot 1_B\, d\mu.$$

Nun zum Beweis der Gleichung (9): Mit der Festsetzung

$$g(x_{i+1}) := \begin{cases} 1 & \text{für } i = n-1 \\ \int_{B_{i+2}} \ldots \int_{B_n} K_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \ldots K_{t_{i+2} - t_{i+1}}(x_{i+1}, dx_{i+2}) & \\ & \text{für } i < n-1 \end{cases}$$

ergibt sich

$$P_H(B_1\times\ldots\times B_t\times E\times B_{t+1}\times\ldots\times B_n)=$$

$$=\int_E\ldots\int_{B_t}\int_E\int_E(1_{B_{t+1}}g)(x_{t+1})K_{t_{t+1}-t'}(x',dx_{t+1})K_{t'-t_t}(x_t,dx')\ldots\mu(dx_0)$$

$$=\int_E\int_E\int_E(1_{B_{t+1}}\cdot g)(x_{t+1})K_{t_{t+1}-t'}(x',dx_{t+1})K_{t'-t_t}(x_t,dx')\gamma\cdot(dx_t)=$$

$$=\int_E\int_E(1_{B_{t+1}}\cdot g)(x_{t+1})K_{t'-t_t}K_{t_{t+1}-t'}(x_t,dx_{t+1})\gamma(dx_t). \tag{11}$$

Wegen $K_{t'-t_t}K_{t_{t+1}-t'}(x,B)=K_{t_{t+1}-t_t}(x,B)$ μ-fast sicher für jedes $B\in\mathfrak{B}$ folgt aus Lemma 3:

$$\int_E(1_{B_{t+1}}\cdot g)(x_{t+1})K_{t'-t_t}K_{t_{t+1}-t'}(x_t,dx_{t+1})=$$

$$=\int_E(1_{B_{t+1}}\cdot g)(x_{t+1})K_{t_{t+1}-t_t}(x_t,dx_{t+1})\quad\mu\text{-fast sicher.}$$

Wegen $\gamma\ll\mu$ ist dann der Ausdruck (11) gleich

$$\int_E\int_E(1_{B_{t+1}}\cdot g)(x_{t+1})K_{t_{t+1}-t_t}(x_t,dx_{t+1})\gamma(dx_t)=P_J(B_1\times\ldots\times B_n).$$

Für $t'<t_1$ verläuft der Beweis analog, der Fall $t_n<t'$ ist trivial.

d) Jede Funktion $K_r(\cdot,B)$ (K_r sei ein Markoff-Kern auf $(E,\mathfrak{B})$) mit der Eigenschaft a) ist modulo μ eindeutig bestimmt. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3 und Lemma 4.

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Nach Satz 2 und Satz 3 ist die projektive Familie $(P_J)_{J\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)}$ die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines elementaren Markoff-Prozesses mit Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$ und Parametermenge $\mathbb{R}_+$, z. B. des kanonischen Prozesses $(E^{\mathbb{R}_+},\mathfrak{B}^{\mathbb{R}_+},P^\mu,(p_{\{t\}})_{t\in\mathbb{R}_+})$, wobei P^μ den projektiven Limes der Familie $(P_J)_{J\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)}$ und $p_{\{t\}}$ die Projektionsabbildung bezeichnet, die jedem Element aus $E^{\mathbb{R}_+}$, also jeder Abbildung von $\mathbb{R}_+$ in E, dessen t-te Koordinate zuordnet.

Zusammenfassend erhält man folgendes Resultat:

Unter geeigneten Voraussetzungen für den Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$ läßt sich jeder elementare Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$ und Parametermenge H_+, dessen projektive Familie $(K_J)_{J\in\mathfrak{H}(H_+)}$ der endlich-dimensionalen Verteilungen sich gemäß (3) aus einer im Ursprung stetigen Markoffschen Halbgruppe $(K_t)_{t\in H+}$ und einem W-Maß μ auf $(E,\mathfrak{B})$ mit $\mu K_t\ll\mu$ $(t\in H_+)$ ableitet, in einen elementaren Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$ und Parametermenge $\mathbb{R}_+$ einbetten. Das heißt, es existiert mindestens ein elemen-

tarer Markoff-Prozeß mit Zustandsraum $(E,\mathfrak{B})$ und Parametermenge $\mathbb{R}_+$, für dessen Familie $(P_J)_{J\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}_+)}$ der endlich-dimensionalen Verteilungen gilt:

$$P_J = K_J \quad \text{für alle} \quad J\in\mathfrak{H}(H_+).$$

Literatur

[1] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin: De Gruyter. 1968.

[2] Elfving, G.: Zur Theorie der Markoffschen Ketten. Acta Soc. Sci. Fennicae, N. Ser. A **2**, 8, 1—17 (1937).

[3] Hopf, E.: The general temporally discrete Markoff process. J. Rat. Mech. Anal. **3**, 13—45 (1954).

[4] Kingman, J. F. C.: The imbedding problem for finite Markov chains. Z. Wahrsch. verw. Geb. **1**, 14—24 (1962).

[5] Kopf, Ch.: Ausdehnung von Markoff-Prozessen auf erweiterte Parametermengen. Z. Wahrsch. verw. Geb. **22**, 101—111 (1972).

[6] Neveu, J.: Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. München: Oldenbourg. 1969.

[7] Runnenburg, J. Th.: On the Elfving's problem of imbedding a time-discrete Markov chain in a time-continuous one for finitely many states. Indag. Math. **24**, 536—541 (1962).

Dr. Ch. Kopf
Mathematisches Institut
der Universität Innsbruck
A-6020 Innsbruck, Österreich