Werk

Titel: Induzierte Maße bei Lürothschen Reihen.

Autor: Jakubec, Karl

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0078|log37

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 78, 347—355 (1974)
© by Springer-Verlag 1974

Induzierte Maße bei Lürothschen Reihen

Von

Karl Jakubec, Wien

(Eingegangen am 9. März 1973)

1. Einleitung

Grundlegende Ergebnisse über Lürothsche Reihen findet man bei O. PERRON [6]. Die metrische Theorie der Lürothschen Reihen wurde von L. HOLZER [3], T. ŠALÁT [8], H. JAGER—C. DE VROEDT [4] und K. JAKUBEC [5] untersucht.

Man definiert für $x \in]1/(d+1), 1/d]$ die Ziffernfunktion $d(x) = d$ und die Abbildung

$$T x = d(x)\big(d(x)+1\big)\big(x - 1/\big(d(x)+1\big)\big) \tag{1}$$

Setzt man

$$d_n(x) = d\,(T^{n-1} x) \tag{2}$$

so läßt sich jedes $x \in]\,0, 1]$ schreiben als

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{d_k (d_k + 1)} \right) \frac{1}{d_n + 1}\,.$$

Ziel dieser Arbeit ist es, die Hausdorffdimension verschiedener Mengen zu berechnen, die durch Eigenschaften der Lürothreihen charakterisiert sind und das „Hausdorffsche Verhalten" damit verbundener induzierter Maße zu untersuchen (vgl. M. SMORODINSKY [9]; diese Arbeit enthält im zweiten Teil eine Beweislücke). Im weiteren sei λ stets das eindimensionale Lebesguemaß.

2. Hausdorffdimension und Billingsleydimension

Das α-dimensionale Hausdorffsche äußere Maß einer Menge $M \subseteq [0, 1]$ ist definiert durch

$$H(M, \alpha) = \liminf_{\varrho \to 0} \Big\{ \sum_{\sigma} \lambda(s)^{\alpha} \Big\}, \tag{3}$$

wobei das Infimum über alle Überdeckungen σ von M durch offene Intervalle s mit $\lambda(s) < \varrho$ zu erstrecken ist (in höheren Dimensionen ist das Lebesguesche Maß λ durch den Durchmesser zu ersetzen!). Die Hausdorffdimension ist nun definiert durch

$$\begin{aligned} \dim M = &\inf \{\alpha \mid H(M,\alpha) = 0\} = \\ &= \sup \{\alpha \mid H(M,\alpha) = \infty\} \end{aligned} \tag{4}$$

(siehe C. A. ROGERS [7], wo sich eine ausgedehnte Bibliographie findet).

Es sei nun ein Zylinder n-ter Ordnung die Menge

$$Z(k_1, \ldots, k_n) = \{x \mid d_i(x) = k_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

und μ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$. Es ist sodann

$$H_\mu(M,\alpha) = \lim_{\varrho \to 0} \inf_{\zeta} \{\sum_{z \in \zeta} \mu(Z)^\alpha\} \tag{5}$$

wo das Infimum sich über alle Überdeckungen ζ von M durch Zylinder Z mit $\mu(Z) < \varrho$ erstreckt, ebenfalls ein äußeres Maß. Die Billingsleydimension (siehe P. BILLINGSLEY [1]) ist nun

$$\begin{aligned} \dim_\mu M = &\inf \{\alpha \mid H_\mu(M,\alpha) = 0\} = \\ &= \sup \{\alpha \mid H_\mu(M,\alpha) = \infty\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Da alle Zylinder Intervalle sind, gilt stets

$$\dim M \leqslant \dim_\lambda M \tag{7}$$

Es sei $Z_n(t) = Z(k_1(t), \ldots, k_n(t))$, so folgt aus einem Satz von H. WEGMANN [10]:
Ist für alle $t \in M$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \lambda(Z_n(t))}{\log \lambda(Z_{n+1}(t))} = 1, \text{ so ist } \dim M = \dim_\lambda M. \tag{8}$$

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist der Satz von BILLINGSLEY: Ist für alle $t \in M$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log \mu(Z_n(t))}{\log \lambda(Z_n(t))} \geqslant \delta \tag{9}$$

so ist $\dim_\lambda M \geqslant \delta \dim_\mu M$.

Zuletzt definieren wir noch den Träger eines Maßes (im Sinne von CHATTERJI [2]):
Eine Menge M heißt Träger, wenn $\mu(M)=1$ und aus $\mu(A)=1$ stets folgt $d(\mu)=\dim_\lambda M \leqslant \dim_\lambda A$. Da μ als Maß stetig von oben ist, existiert stets ein Träger und $d(\mu)$ ist eindeutig bestimmt.

3. Induzierte Maße

Ist $m(i,k)$ eine Doppelfolge reeller Zahlen mit

$$\begin{aligned} &0 \leqslant m(i,k) \leqslant 1 \\ &\sum_{k=1}^{\infty} m(i,k) = 1\,, \end{aligned} \tag{10}$$

so gibt es genau ein Maß μ („induziertes Maß") mit $\mu\{x \mid d_i(x)=k\} = m(i,k)$, wobei die Ziffernfunktionen $d_i(x)$ unabhängige Zufallsvariable werden.

Wir beweisen nun

Satz 1:

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} m(i,k)\log^2 m(i,k)$ *und*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(i,k)\log^2 k(k+1)$$

seien gleichmäßig durch K nach oben beschränkt.
Wir setzen ferner

$$m(i) = \sum_{k=1}^{\infty} m(i,k)\log m(i,k)$$

$$n(i) = \sum_{k=1}^{\infty} m(i,k)\log k(k+1)$$

und es sei $\sup_i m(i) < 0$.
Dann gilt

$$d(\mu) \geqslant \lim_{g\to\infty} \inf\Big(\sum_{i=1}^{g} m(i) / \sum_{i=1}^{g} n(i)\Big).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt mit Hilfe der Cauchy—Schwarzschen Ungleichung die Existenz von Konstanten a, b, so daß gilt:

$$a \leqslant m(i) \leqslant b < 0$$

$$a \leqslant n(i) \leqslant b < 0$$

(es ist $n(i) \leqslant -\log 2$ stets!).

Das starke Gesetz der großen Zahlen, angewandt auf die beiden Folgen $f_i(x) = \log m(i, k(x))$ und $g_i(x) = \log k(x)(k(x)+1)$ bezüglich des Maßes μ, zeigt:

Es gibt eine Menge M mit $\mu(M) = 1$, wo

$$\lim_{g \to \infty} (1/g) \Big(\sum_{i=1}^{g} (f_i(x) - m(i)) = 0$$

$$\lim_{g \to \infty} (1/g) \Big(\sum_{i=1}^{g} (g_i(x) - n(i)) = 0 .$$

Für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $n(x, \varepsilon)$, so daß

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{\sum_{i=1}^{g} m(i)}{\sum_{i=1}^{g} n(i)} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{g} f_i(x)}{\sum_{i=1}^{g} g_i(x)} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{\sum_{i=1}^{g} m(i)}{\sum_{i=1}^{g} n(i)} .$$

Es folgt daraus:

$$d := \liminf_{g \to \infty} \Big(\sum_{i=1}^{g} m(i) / \sum_{i=1}^{g} n(i) \Big) = \liminf_{g \to \infty} \Big(\sum_{i=1}^{g} f_i(x) / \sum_{i=1}^{g} g_i(x) \Big) .$$

Anderseits ist

$$\sum_{i=1}^{g} f_i(x) = \log \mu(Z_g(x))$$

$$\sum_{i=1}^{g} g_i(x) = \log \lambda(Z_g(x))$$

und daher ist $\dim_\lambda M \geqslant d$.

Ist $\mu(A) = 1$, so ist $\mu(A \cap M) = 1$ und daher ist $\dim_\lambda A \geqslant \dim_\lambda (A \cap M) = d$, da die Menge $A \cap M$ die Voraussetzung des Billingsleyschen Satzes erfüllt (es ist $\dim_\mu B = 1$, wenn $\mu(B) > 0$).

Korollar: Ist $m(i,k) = m(k)$, d. h. μ invariantes Maß, so ist

$$d(\mu) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} m(k) \log m(k)}{\sum_{k=1}^{\infty} m(k) \log k(k+1)} .$$

Bemerkung: Ist

$$\lim_{g\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{g} n(i)}{\sum_{i=1}^{g+1} n(i)}=1$$

so ist $\dim_\lambda M=\dim M$.

Wir skizzieren nun ein Beispiel einer Menge A, für welche gilt: Es ist $\dim A\leqslant\frac{1}{3}$, aber $\dim_\lambda A\geqslant\frac{1}{2}$.

Es sei

$$A=\{x\mid k_{n+1}(x)>(k_n^2(x)+k_n(x))^2\mid n\geqslant 1\}.$$

Es sei $\beta(i)$ definiert durch

$$\sum_{t=(i^2+i)^2}^{\infty}\exp\left(-\beta(i)\log(t^2+t)\right)=1.$$

Wir definieren

$$\omega(i,k)=(k^2+k)^{-\beta(i)}\quad\text{für}\quad k\geqslant(i^2+i)^2$$

$$\omega(i,k)=0\qquad\qquad\text{für}\quad k<(i^2+i)^2$$

und ein Maß durch

$$\mu(Z(k_1\ldots,k_n))=\frac{1}{k_1^2+k_1}\prod_{i=1}^{n-1}\omega(k_i,k_{i+1}).$$

Es ist $\mu(A)=1$. Ferner ist für $x\in A$

$$\liminf_{g\to\infty}=\frac{\log\mu(Z_g(x))}{\log\lambda(Z_g(x))}=$$

$$=\liminf_{g\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta(t_i)\log(t^2+t_i)}{\sum_{i=1}^{n}\log(t^2+t_i)}\geqslant\frac{1}{2}$$

(denn $\beta(i)\geqslant\frac{1}{2}$ ist stets erfüllt).

Daher ist $\dim_\lambda A\geqslant\frac{1}{2}$. Anderseits ist das System

$$\sigma_n=\{\bigcup_{t\geqslant(k_n^2+k_n);} Z(k_1,\ldots,k_n,t)\mid k_1\geqslant 1,k_2\geqslant(k_1^2+k_1)^2,$$

$$\ldots,k_n\geqslant(k_{n-1}^2+k_{n-1})^2\}$$

eine Überdeckung von A durch Intervalle.

Es ist

$$\sum_{s\in\sigma_n} \lambda(s)^{\frac{1}{3}} \leqslant 1$$

und daher $\dim A \leqslant \frac{1}{3}$.

4. Billingsleymaße

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $[0,1]$ nennen wir Billingsleymaß, wenn es eine Menge E und reelle Zahlen α und c gibt, so daß für alle Borelmengen A gilt:

$$\mu(A) = c\, H_\lambda(A \cap E, \alpha). \tag{11}$$

Wir bemerken, daß in unserem Fall (es ist $\lambda(Z_n) \leqslant 2^{-n}$ für jeden Zylinder n-ter Ordnung) das Billingsleysche α-dimensionale Maß ein metrisches äußeres Maß ist. Es genügt (11) für Zylinder Z zu untersuchen. Ferner sieht man sofort, daß $\alpha = d(\mu)$ sein muß und $c\,Hj(M \cap E, d(\mu)) = 1$, wenn M ein Träger von μ ist.

Satz 2: *Ist K eine Menge natürlicher Zahlen und existiert eine reelle Zahl $\beta(K)$, so daß*

$$\sum_{k\in K} (k^2+k)^{-\beta(K)} = 1, \tag{12}$$

dann ist das invariante Maß μ, induziert durch (siehe (10))

$$\mu\{x \mid d_i(x) = k\} = (k^2+k)^{-\beta(K)} \text{ für } k \in K$$

$$\mu\{x \mid d_i(x) = k\} = 0 \text{ für } k \notin K$$

ein Billingsleymaß und $d(\mu) = \beta(K)$.

Beweis: Es sei $E = \{x \mid d_i(x) \in K, i \geqslant 1\}$. Dann ist $\dim_\lambda E = \beta(K)$, wie man aus dem Satz von BILLINGSLEY entnimmt.
Wir zeigen: $H_\lambda(E, \beta(K)) = 1$.
Es sei $\zeta_n = \{Z(k_1, \ldots, k_n) \mid k_i \in K, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Dann ist

$$\sum_{Z\in\zeta_n} \lambda(Z)^{\beta(K)} = 1.$$

Daher ist $H_\lambda(E, \beta(K)) \leqslant 1$. Ist ζ eine beliebige Überdeckung durch Zylinder, so ist

$$\sum_{Z\in\zeta} \lambda(Z)^{\beta(K)} \geqslant \sum_{Z\in\zeta} \mu(Z) \geqslant \mu\Big(\bigcup_{Z\in\zeta} Z\Big) \geqslant \mu(E) = 1,$$

woraus $H_\lambda(E, \beta(K) \geqslant 1$ folgt. Ist $Z \cap E = \emptyset$, so ist (11) erfüllt.

Ist $Z \cap E \neq \emptyset$, so wird durch die lineare Bijektion, die den Zylinder Z auf $]0,1]$ abbildet, jeder Überdeckung von $Z \cap E$ eine Überdeckung von E zugeordnet und umgekehrt. Die entsprechenden Summen unterscheiden sich um den Faktor $\lambda(Z)^{\beta(K)} = \mu(Z)$, d. h. es ist (11) erfüllt.

Es sei nun $m(k) = m(i,k)$ eine stationäre Doppelfolge und μ das zugehörige induzierte Maß. Wir setzen $K = \{k \mid m(k) > 0\}$. Es gilt nun

Satz 3: *Ist* $\sum_{k \in K} (k^2+k)^{-d(\mu)} \neq 1$ *und existieren Konstante* a, b, *so daß für* $k \in K$

$$0 < a \leqslant m(k)\,(k^2+k)^{d(\mu)} \leqslant b\,,$$

dann ist μ *kein Billingsleymaß.*

Beweis: Wir setzen

$$f_n(x) = \log m(k_n(x)) - d(\mu) \log (k_n(x)^2 + k_n(x))$$

Da $\log a \leqslant f_n(x) \leqslant \log b$, existieren die Erwartung $E(f_n) = c$ und die Varianz $V(f_n) = \sigma^2$. (Man beachte, daß μ ein invariantes Maß ist.) Wir unterscheiden mehrere Fälle:

(α) $\sigma^2 > 0$, $c \geqslant 0$. Es sei

$$A = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} f_i(x) > \sigma\sqrt{n} + nc \text{ für unendlich viele } n\}.$$

Dann ist (Satz vom Iterierten Logarithmus) $\mu(A) = 1$. Zu $x \in A$ gibt es ein $n(x) \geqslant n_0$, so daß

$$\sum_{i=1}^{n(x)} f_i(x) > \sigma\sqrt{n}\,(x)\,.$$

Die Zylinder $\zeta = \{Z_{n(x)} \mid x \in A\}$ bilden eine Überdeckung von A und es ist

$$1 = \sum_{Z \in \zeta} \mu(Z) > e^{\sigma\sqrt{n_0}} \sum_{Z \in \zeta} \lambda(Z)^{d(\mu)}\,.$$

Daher ist $H_\lambda(A, d(\mu)) = 0$.

(β) $\sigma^2 > 0$, $c < 0$. Dann gibt es eine Menge B mit $\mu(B) = 1$, wo

$$\lim_{g \to \infty} \sum_{i=1}^{g} f_i(x) = -\infty\,.$$

Das bedeutet aber

$$\lim_{g\to\infty}\frac{\mu(Z_g(x))}{\lambda(Z_g(x))^{d(\mu)}}=0.$$

Es sei E eine Menge, wie sie in (11) verlangt wird. Dann ist $\mu(B\cap E)=1$. Es sei weiters

$$C_k=\{x\in E\cap B\mid 2H_\lambda(B\cap E,d(\mu))\mu(Z_n(x))<\lambda(Z_n(x))^{d(\mu)}$$

für alle $n\geqq k\}$.

Zu $\varepsilon>0$ gibt es eine Überdeckung ζ der Menge C_k durch Zylinder mindestens k-ter Ordnung, so daß

$$\sum_{Z\in\zeta}\lambda(Z)^{d(\mu)}\leqq H_\lambda(C_k,d(\mu))+\varepsilon\leqq H_\lambda(E\cap B,d(\mu))+\varepsilon.$$

Dann ist (bei geeignetem $\varepsilon>0$)

$$\mu(C_k)\leqq\sum_{Z\in\zeta}\mu(Z)<(2H_\lambda(B\cap E,d(\mu))^{-1}\sum_{Z\in\zeta}\lambda(Z)^{d(\mu)}\leqq\tfrac{3}{4}.$$

Da $\lim_{k\to\infty}C_k=E\cap B$, wäre $\mu(E\cap B)<1$.

(γ) $\sigma^2=0$. Daraus folgt $\log m(k)=c+d(\mu)\log k(k+1)$.

Der Fall $c=0$ ist lt. Voraussetzung ausgeschlossen. Es sei $c>0$. Wir betrachten $E=\{x\mid d_i(x)\in K\}$. Es ist $\mu(E)=1$. Das System $\zeta_n=\{Z(k_1\ldots,k_n\mid k_i\in K\}$ überdeckt E. Es ist

$$\sum_{Z\in\zeta_n}\lambda(Z)^{d(\mu)}=e^{-nc}\sum_{Z\in\zeta_n}\mu(Z)\leqq e^{-nc}.$$

Daher ist $H_\lambda(E,d(\mu))=0$. Ist letztlich $c>0$ und ist $H_\lambda(A,d(\mu))<$ $<G$ endlich, so gibt es eine Überdeckung ζ von A durch Zylinder mindestens n-ter Ordnung mit

$$\sum_{Z\in\zeta}\lambda(Z)^{d(\mu)}\leqq G.$$

Dann ist

$$\mu(A)\leqq\sum_{Z\in\zeta}\mu(Z)\leqq e^{nc}\sum_{Z\in\zeta}\lambda(Z)^{d(\mu)}\leqq e^{nc}G,$$

woraus $\mu(A)=0$ folgt.

Literatur

[1] BILLINGSLEY, P.: Ergodic Theory and Information. New York: J. Wiley. 1965.

[2] CHATTERJI, S. D.: Certain induced measures and the fractional dimension of their supports. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **3**, 184—192 (1964).

[3] HOLZER, L.: Zur Bestimmung des Lebesgueschen Maßes linearer Punktmengen, deren Elemente durch systematische Entwicklungen gegeben sind. Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl. IIa **137**, 421—453 (1928).

[4] JAGER, H., und C. DE VROEDT: Lüroth series and their ergodic properties. Indag. Math. **31**, 31—42 (1969).

[5] JAKUBEC, K.: Lürothsche Reihen und singuläre Maße. Monatsh. Math. (In Vorbereitung.)

[6] PERRON, O.: Irrationalzahlen, 4. Aufl. Berlin: De Gruyter. 1960.

[7] ROGERS, C. A.: Hausdorff Measures. Cambridge: The University Press. 1970.

[8] ŠALÁT, T.: Zur metrischen Theorie der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen. Czech. Math. J. **18**, 498—521 (1968).

[9] SMORODINSKY, M.: Singular measures and Hausdorff measures. Israel J. Math. **7**, 203—206 (1969).

[10] WEGMANN, H.: Über den Dimensionsbegriff in Wahrscheinlichkeitsräumen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **9**, 216—231 (1968).

Anschrift des Verfassers:
Dr. K. JAKUBEC
Mariannengasse 2/18
A-1090 Wien, Österreich