Monatshefte für Mathematik 78, 256—263 (1974)

Existenzsätze in der Theorie der Matrizen und lineare Kontrolltheorie

Von

Harald K. Wimmer, Graz

(Eingegangen am 30. März 1973)

Mit 1 Abbildung

1. Einleitung. In dieser Note behandeln wir die beiden folgenden Probleme:

[B, C, D] Vorgegeben sei eine $n \times n$ Matrix A über dem Körper K und ein normiertes Polynom $g(\lambda)$ über K vom Grad $n+m$. Wann läßt sich A durch Matrizen B, C und D so zu einer $(n+m) \times (n+m)$ Matrix G,

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ergänzen, daß das charakteristische Polynom von G gleich $g(\lambda)$ ist?

[C, D] Vorgegeben sei eine $n \times n$ Matrix A und eine $n \times m$ Matrix B. r sei eine ganze Zahl, $0 < r \leqslant n$. Wann gibt es zu jedem Polynom $g_{m+r}(\lambda)$ vom Grad $m+r$ zwei Matrizen C und D, so daß $g_{m+r}(\lambda)$ im charakteristischen Polynom von G enthalten ist?

Eine Anwendung findet [B, C, D] bei folgender Aufgabe in der Regelungstechnik.

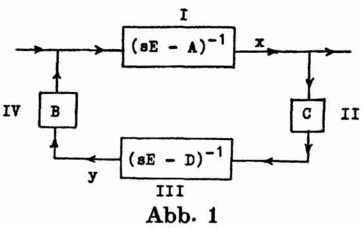

Abb. 1

Der Regelkreis in Abb. 1 werde durch die linearen Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + By \\ \dot{y} &= Cx + Dy \end{aligned} \tag{S}$$

beschrieben. Dabei soll das Übertragungsglied I fest vorgeschrieben sein, während II, III und IV manipulierbar sind. Wann ist es möglich, die Glieder II, III und IV so einzustellen, daß der Kreis stabilisiert werden kann? D. h. wann gibt es Matrizen C, D und B, so daß mit $t \to \infty$ für jede Lösung von (S) $x(t) \to 0$ und $y(t) \to 0$ gilt?

Das Problem $[B, C, D]$ hat Oliveira [6] gelöst. Wann sich bei gegebenem A und B $m+r$ Elemente aus dem Spektrum von G beliebig wählen lassen, untersuchte Langenhop [4]. Die Methode in [4] läßt sich nicht auf $[C, D]$ übertragen.

Wir erörtern hier die beiden obigen Probleme, indem wir Struktursätze aus der linearen Kontrolltheorie heranziehen. Verwendet man eine geeignete „Normalform" des Paares (A, B), so läßt sich in $[C, D]$ der Anteil des charakteristischen Polynoms von G, der von C und D abhängt, im wesentlichen durch die Wahl einer geeigneten Begleitmatrix festlegen. Bei $[B, C, D]$ ist zu untersuchen, von welchem Rang B mindestens sein muß, damit das Paar (A, B) steuerbar ist.

Übt man auf G eine Ähnlichkeitstransformation aus, so bleibt das charakteristische Polynom ungeändert. Wir stellen drei zu G ähnliche Matrizen auf:

$$G_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T A T^{-1} & T B \\ C T^{-1} & D \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B R \\ R^{-1} C & R^{-1} D R \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & E \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} E & 0 \\ -F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B F & B \\ C - D F - F B F + F A & D + F B \end{pmatrix}.$$

Sind C und D beliebig wählbar, so durchlaufen auch die unteren Blöcke von G_i, $i = 1, 2, 3$, alle $m \times n$, bzw. $m \times m$ Matrizen. Bei der Lösung von $[C, D]$ kann man daher anstelle des Paares (A, B) auch von einem Paar $(\hat{A}, \hat{B})$ ausgehen, das aus (A, B) durch folgende Transformationen hervorgeht:

(α) $\qquad (A, B) \to (T A T^{-1}, T B), \ \det T \neq 0,$

(β) $\qquad (A, B) \to (A, B R), \ \det R \neq 0,$

(γ) $\qquad (A, B) \to (A - B F, B), F \in K_{m \times n}.$

$K_{m \times n}$ ist dabei der Raum aller $m \times n$ Matrizen mit Elementen aus

K. — Genauso kann man bei $[B, C, D]$ von jeder zu A ähnlichen Matrix $T A T^{-1}$ ausgehen.

Wir nennen $(\hat{A}, \hat{B})$ zu (A, B) *äquivalent*, wenn sich (A, B) durch Transformationen (α)—(γ) in $(\hat{A}, \hat{B})$ überführen läßt. Damit ist auf $K_{n\times(n+m)}$ eine Äquivalenzrelation erklärt [2].

2. *Hilfssätze aus der Kontrolltheorie.* Von A, B und b wird im weiteren stets vorausgesetzt: $A\in K_{n\times n}$, $B\in K_{n\times m}$ und $b\in K_{n\times 1}$. Das charakteristische Polynom einer Matrix M bezeichnen wir mit $\chi(M)$. — Für (A, B) wird die *Steuerbarkeitsmatrix* [5] $S(A\mid B)\in K_{n\times nm}$ durch

$$S(A\mid B) = (B, A B, \ldots, A^{n-1} B)$$

erklärt. Ist rang $S(A\mid B) = n$, so heißt das Paar (A, B) *steuerbar* [5]. Eine Matrix $M\in K_{n\times n}$ heißt *zyklisch*, wenn es einen Vektor w gibt, so daß die Vektoren $w, M w, \ldots, M^{n-1} w$ linear unabhängig sind, d. h. wenn (M, w) steuerbar ist.

Hilfssatz 1 [3, S. 49]: Ist das Paar (A, b) steuerbar, so ist es zu $(\hat{A}, \hat{b})$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

äquivalent.

Hilfssatz 2 [5, S. 99]: Durch eine Transformation vom Typ (α) lassen sich A und B auf folgende Form bringen

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \quad T B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

wobei (A_2, B_2) steuerbar ist.

Hilfssatz 3 [7]: $\mathfrak{B}$ sei der von den Spalten von B erzeugte Teilraum von K^n. Ist (A, B) steuerbar, so gibt es zu jedem Vektor $b \neq 0$ aus $\mathfrak{B}$ ein $F\in K_{m\times n}$, so daß $(A + BF, b)$ steuerbar ist.

Wir leiten nun eine „Normalform" des Paares (A, B) her.

Hilfssatz 4: Ist (A, B) steuerbar, so ist (A, B) zu einem Paar $(\hat{A}, \hat{B})$,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \\ 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{pmatrix}, \tag{4}$$

äquivalent.

Die mit „x" eingetragenen Elemente von $\hat{B}$ sind bei der Anwendung des Hilfssatzes ohne Bedeutung.

Beweis: Wir wählen ein v_1 und F_1 nach Hilfssatz 3 so, daß $(A + BF_1, Bv_1)$ steuerbar ist. Es gibt dann wegen Hilfssatz 1 ein $u \in K_{1\times n}$ und ein T, für die $\hat{A} = T(A + BF_1)T^{-1} + TBv_1u$ und $\hat{b} = TBv_1$ die Gestalt (2) haben. Ergänzt man v_1 zu einer invertierbaren Matrix

$$V = (v_1, \ldots, v_m) \in K_{m\times m}$$

und setzt man $F = F_1T^{-1} + v_1u$, dann ist $(\hat{A} = TAT^{-1} + TBF,\ \hat{B} = TBV)$ zu (A, B) äquivalent und in der Normalform (4).

3. Lösung von $[C, D]$.

Satz 1: *Ist* (A, b) *steuerbar, so gibt es zu jedem Polynom* $g(\lambda)$ *vom Grad* $n+1$ *ein* $c = (c_1, \ldots, c_n) \in K_{1\times n}$ *und ein* $d \in K$, *so daß*

$$G = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$g(\lambda)$ *als charakteristisches Polynom hat.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 kann man von A und b in der Form (2) ausgehen. Ist $g(\lambda) = \lambda^{n+1} - \gamma_n\lambda^n - \ldots - \gamma_1\lambda - \gamma_0$, so wählt man

$$c = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}),\ d = \gamma_n.$$

Die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_n \end{pmatrix}$$

ist eine Begleitmatrix zu $g(\lambda)$ [1].

Satz 2: *Die beiden folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

[a] Bei vorgegebenem A *und* B *gibt es zu jedem Polynom* $g_{m+r}(\lambda)$ *vom Grad* $m+r$ *zwei Matrizen* $C \in K_{m\times n}$ *und* $D \in K_{m\times m}$, *so daß* $g_{m+r}(\lambda)$ *im charakteristischen Polynom von* G *enthalten ist.*

[b] $r \leqslant \operatorname{rang} S(A \mid B)$.

Beweis: Wir können wegen Hilfssatz 2 annehmen, daß A und B in der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

vorliegen, mit $A_2 \in K_{p\times p}$ und rang $S(A\,|\,B) = $ rang $S(A_2\,|\,B_2) = p$. Zerlegt man C in Übereinstimmung mit A in $C = (C_1\ \ C_2)$, dann ist

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}$$

und $\chi(G) = \chi(A_1)\chi(G_2)$, wobei

$$G_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Das Polynom $\chi(A_1)$ vom Grad $n-p$ ist somit stets Teiler von $\chi(G)$, gleichgültig wie C und D gewählt wird. Ist $r > p$, so läßt sich daher nicht jedes Polynom $g_{m+r}(\lambda)$ als Teiler von $\chi(G)$ vorschreiben, d. h. $\neg\,(b) \Rightarrow \neg\,(a)$. — Wir zeigen nun, aus den Voraussetzungen über G_2 folgt, daß $\chi(G_2)$ jedes beliebige Polynom p-ten Grades sein kann, d. h. $(b) \Rightarrow (a)$.

Es ist keine wesentliche Einschränkung, wenn wir $p = n$, also $A_2 = A$ und $G_2 = G$, annehmen. Mit rang $S(A\,|\,B) = n$ ist die Voraussetzung von Hilfssatz 4 erfüllt. Es sei daher A und B von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \\ 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{pmatrix}.$$

Wir wählen C und D als

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdot & \cdot & \cdot & d_m \end{pmatrix},$$

D hat die Gestalt einer Begleitmatrix. Fügt man die obigen Blöcke zu einer $(n+m)\times(n+m)$ Matrix G zusammen und schreibt ein beliebiges Polynom $g_{n+m}(\lambda)$ vom Grad $n+m$ vor, so kann man wegen Satz 1 die letzte Zeile in C und D so bestimmen, daß $\chi(G) = g_{n+m}(\lambda)$ ist.

4. Weitere Hilfssätze. In diesem Abschnitt stellen wir die Hilfssätze für $[B, C, D]$ zusammen.

Hilfssatz 5 [1, S. 177]: *Zu A gibt es genau eine Matrix M, die zu A ähnlich ist, mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $M = \operatorname{block\,diag}(M_1, M_2, \ldots, M_t)$.

2. $$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x & x & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, t.$$

3. $\chi(M_i) \mid \chi(M_{i+1}),\ i = 1, \ldots, t-1$.

Die Matrix M heißt *erste Normalform* von A, die Polynome $\eta_i(\lambda) = \chi(M_i)$, $i = 1, \ldots, t$, sind die *Invariantenteiler* von A. Mit $\theta(A)$ bezeichnen wir die Anzahl der Diagonalblöcke in der ersten Normalform von A.

Hilfssatz 6: A habe die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A_1 und A_2. Es sei $\theta(A) = t$. $\eta_1, \ldots, \eta_t$ seien die Invariantenteiler von A, $\eta_i \mid \eta_{i+1}$, $i = 1, \ldots, t-1$. Aus $\theta(A_2) = m$ folgt

$$\prod_{i=1}^{t-m} \eta_i \mid \chi(A_1). \tag{5}$$

Beweis: Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ die nach steigenden Graden geordneten Invariantenteiler von A_2, so gilt

$$\gamma_{m-k} \mid \eta_{t-k},\ k = 0, \ldots, m-1$$

und weiter

$$\chi(A_2) = \gamma_m \ldots \gamma_1 \mid \eta_t \ldots \eta_{t-m+1}. \tag{6}$$

Wegen $\chi(A_1)\chi(A_2) = \chi(A) = \eta_1 \ldots \eta_{t-m} \cdot \eta_{t-m+1} \ldots \eta_t$ folgt aus (6)

$$\chi(A_2)\,\eta_{t-m} \ldots \eta_1 \mid \chi(A_1)\,\chi(A_2),$$

und daraus (5).

Hilfssatz 7: Zu A gibt es genau dann ein B mit $\operatorname{rang} B = t$, so daß (A, B) steuerbar ist, wenn $\theta(A) \leqslant t$ gilt.

Beweis: Es sei (A, B) steuerbar und $\operatorname{rang} B = t$. Wir können ohne große Einschränkung annehmen, daß die Spalten von B linear unabhängig sind, d. h. $t = m$ oder $B = (b_1, \ldots, b_t) \in K_{n \times t}$. Setzt man $(A \mid b_i)$ für den von b_i erzeugten zyklischen Unterraum von K^n, so ist die Steuerbarkeit von (A, B) gleichbedeutend mit

$$K^n = (A \mid b_1) + \ldots + (A \mid b_t). \tag{7}$$

Ist K^n direkte Summe von s zyklischen Unterräumen N_i, so folgt aus den Zerlegungssätzen der geometrischen Elementarteilertheorie [1] $s \geqslant \theta(A)$. Da die Summe in (7) nicht direkt zu sein braucht, gilt umso mehr $t \geqslant \theta(A)$.

Für die Umkehrung setzen wir $\theta(A) = t$ voraus und nehmen $A = \text{block diag}(M_1, \ldots, M_t)$ in der ersten Normalform an. Ist $M_i \in K_{l_i \times l_i}$, $i = 1, \ldots, t$, so definieren wir mit $b_i = \text{col}(0, \ldots, 0, 1)$ ein Element aus $K_{l_i \times 1}$. (M_i, b_i) ist steuerbar. Setzt man $B = \text{block diag}(b_1, \ldots, b_t)$, so ist $B \in K_{n \times t}$, $\text{rang}\, B = t$, und (A, B) ist steuerbar, da sich jeder Vektor aus K^n linear aus den Spalten von $S(A \mid B)$ kombinieren läßt.

5. Lösung von [B, C, D].

Satz 3: *Vorgegeben sei A mit $\theta(A) = t$ und den Invariantenteilern $\eta_1, \ldots, \eta_t$, $\eta_i \mid \eta_{i+1}$, $i = 1, \ldots, t-1$. Genau dann läßt sich A zu einer Matrix $G \in K_{(n+m) \times (n+m)}$ der Form (1) mit vorgeschriebenem charakteristischem Polynom $\chi(G) = g(\lambda)$ ergänzen, wenn*

$$\prod_{i=1}^{t-m} \eta_i(\lambda) \mid g(\lambda) \tag{8}$$

gilt. Ist $m \geqslant t$, so wird $\prod_{i=1}^{t-m} \eta_i = 1$ gesetzt.

Beweis: Wir setzen zuerst voraus, es gebe ein G mit $\chi(G) = g(\lambda)$, und nehmen A und B in der Form (3) an, wobei (A_2, B_2) steuerbar ist. Aus $\text{rang}\, B \leqslant m$ schließt man wegen Hilfssatz 7 auf $\theta(A_2) \leqslant m$ und daraus wegen Hilfssatz 6 auf $\prod_{i=1}^{t-m} \eta_i \mid \chi(A_1)$. Aus $\chi(A_1) \mid \chi(G) = g(\lambda)$ ergibt sich damit (8).

Es sei nun umgekehrt $\chi(G) = g(\lambda)$ vorgegeben, so daß (8) gilt, also

$$g(\lambda) = r(\lambda) \prod_{i=1}^{t-m} \eta_i(\lambda). \tag{9}$$

A wird in der ersten Normalform angenommen. Ist $m < t$ und setzt man

$A_1 = \text{block diag}(M_1, \ldots, M_{t-m})$, $A_2 = \text{block diag}(M_{t-m+1}, \ldots, M_t)$, so ist $A = \text{block diag}(A_1, A_2)$,

$$\chi(A_1) = \prod_{i=1}^{t-m} \eta_i \tag{10}$$

und

$$\theta(A_2) = m. \tag{11}$$

Im Fall $m \geqslant t$ vereinfacht sich die folgende Überlegung durch $A = A_2$ und $g(\lambda) = r(\lambda)$. Wegen (11) gibt es ein B_2 mit m Spalten, so daß (A_2, B_2) steuerbar ist. Wählt man C_2 und D_2 geeignet, so kann man wegen Satz 2 für

$$G_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

$\chi(G_2) = r(\lambda)$ erreichen. Aus (9) und (10) folgt:

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

hat das gewünschte charakteristische Polynom $g(\lambda)$.

Literatur

[1] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung, Bd. 1. Berlin, 1959.

[2] Kalman, R. E.: Kronecker invariants and feedback. Proc. Conference on Ordinary Differential Equations, Naval Research Laboratory, Washington, D. C., 1971.

[3] Kalman, R. E., P. L. Falb und M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory. New York, 1968.

[4] Langenhop, C. E.: On the stabilisation of linear systems. Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 735—742 (1964).

[5] Marcus, L., und E. B. Lee: Foundations of Optimal Control Theory. New York, 1968.

[6] Oliveira, G. N. de: Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescribed submatrix III. Mh. Math. **75**, 441—446 (1971).

[7] Wonham, W. M., und A. S. Morse: Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach. SIAM J. Control **8**, 1—18 (1970).

Anschrift des Verfassers:
Dr. H. K. Wimmer
2. Mathematische Lehrkanzel
Technische Hochschule in Graz
A-8010 Graz, Österreich