Monatshefte für Mathematik 77, 24—30 (1973)

Über Graphen mit isomorphen Gerüsten

Von

Roland Fischer, Salzburg

(Eingegangen am 24. Januar 1972)

Die Anregung zu dieser Arbeit entstammt dem Buch „Graphentheorie" von K. WAGNER [1]. Es wird dort folgendes Problem gestellt: Man charakterisiere die zusammenhängenden Graphen, deren sämtliche Gerüste isomorph sind. Hier wird dieses Problem für schlichte endliche Graphen gelöst.

1. Einige Bezeichnungen

Es werden dieselben Bezeichnungen und Definitionen verwendet wie in [1]. Ist P eine Ecke (oder ein Punkt) des Graphen A, so schreiben wir $P \in A$. Ein Paar (A, P), wo A ein Graph und $P \in A$ ist, heiße punktierter Graph. Sind $(A_1, P_1), \ldots, (A_n, P_n)$ disjunkte punktierte Graphen, so sei $L((A_1, P_1), (A_2, P_2), \ldots, (A_n, P_n))$ oder kürzer $L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ jener Graph, den man aus $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ erhält, wenn man P_i und P_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ durch je eine Kante verbindet; $C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ entstehe aus $L(A_1, \ldots, A_n)$, indem man auch noch P_1 und P_n verbindet. Ist α ein Isomorphismus vom Graphen A auf den Graphen B, so schreiben wir $\alpha: A \to B$. Zwei punktierte Graphen (A, P) und (B, Q) heißen punktisomorph, in Zeichen $(A, P) \cong (B, Q)$, wenn es einen Isomorphismus $\alpha: A \to B$ mit $\alpha(P) = Q$ gibt.

Ein Graph A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ heiße maximal in der Graphenmenge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, wenn seine Eckenanzahl maximal ist.

2. Vorbereitende Hilfssätze

Es sei $\{(A_1, P_1), (A_2, P_2), \ldots, (A_n, P_n)\}$ mit $n \geqslant 3$ eine Menge endlicher, zusammenhängender, paarweise disjunkter, punktierter Graphen; A_1 sei maximal in dieser Menge. Wir definieren:

$$B_i = L(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n, A_1, \ldots, A_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

B_i $(i = 2, \ldots, n$ bzw. $i = 1)$ entsteht also aus $C(A_1, \ldots, A_n)$ einfach dadurch, daß man die Kante, die P_{i-1}, P_i bzw. P_1, P_n verbindet, streicht.

Es gelte: $B_1 \cong B_2 \cong \ldots \cong B_n$.

Hilfssatz 1: Es sei $\varphi\colon B_1 \to B_i$ $(i > 1)$ *ein Isomorphismus. Dann gibt es ein* r, $2 \leqslant r \leqslant n$, *so daß* $\varphi(P_1) = P_r$ *und*

$$\varphi(A_1) = L(A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{i-1}), \quad \text{wenn} \quad 2 \leqslant r \leqslant i-1 \quad \text{und}$$

$$\varphi(A_1) = L(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_r), \quad \text{wenn} \quad i \leqslant r \leqslant n\,.$$

Beweis: Sei $\varphi(P_1) \in A_r \subseteq B_i$, $\varphi(P_1) \neq P_r$. $\varphi(P_1)$ muß $\varphi(A_1)$ von $\varphi(L(A_2, A_3, \ldots, A_n))$ trennen. Daraus folgt, daß entweder $\varphi(A_1)$ ein echter Teilgraph von A_r ist, oder daß $\varphi(A_1)$ die Graphen $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}, \ldots, A_n$ sowie einen Teil von A_r enthält. Die erste Möglichkeit steht in Widerspruch zur Maximalität von A_1, die zweite impliziert zunächst $r = 1$. Sei nun $\varphi(P_1) = P_1' \in A_1$ und $\varphi(A_1) = L(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n, \bar{A}_1, A_2, \ldots, A_{i-1})$, wobei $\bar{A}_1 \subseteq A_1$ und $P_1, P_1' \in \bar{A}_1$. Dann gilt $\varphi(L(P_1, A_2, \ldots, A_n)) = L(P_1', \varphi(A_2), \ldots, \varphi(A_n)) \subseteq A_1 \subseteq B_i$. Wir setzen $\varphi(A_j) = A_j'$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$. A_1 enthält dann den Teilgraphen $L(P_1', A_2', \ldots, A_n')$. Weiter gilt: $\varphi(L(P_1', A_2', \ldots, A_n')) \subseteq \varphi(A_1) = L(A_i, \ldots, A_n, \bar{A}_1, A_2, \ldots, A_{i-1})$. Nun gibt es wegen $\varphi^{-1}(P_1) \in A_1$ zunächst drei Möglichkeiten:

$$\text{(a)}\quad \varphi(L(P_1', A_2', \ldots, A_n')) \subseteq L\, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

$$\text{(b)}\quad \varphi(L(P_1', A_2', \ldots, A_n')) \subseteq L(A_2, A_3, \ldots, A_{i-1})$$

$$\text{(c)}\quad \varphi(L(P_1', A_2', \ldots, A_n')) \subseteq \bar{A}_1\,.$$

Man sieht dies, wenn man bedenkt, daß $L(P_1', A_2', \ldots, A_n')$ nur durch P_1' mit dem übrigen Teil von B_1 verbunden ist. Die Möglichkeiten (a) und (b) scheiden aus, wenn man die Anzahlen der Ecken vergleicht. Aus (c) folgt aber, wenn wir $\varphi(P_1') = P_1'', \varphi(A_j) = A_j''$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$ setzen, $L(P_1'', A_2'', \ldots, A_n'') \subseteq \bar{A}_1 \subseteq A_1$, wobei $L(P_1'', A_2'', \ldots, A_n'') \cap \cap L(P_1', A_2', \ldots, A_n') = \emptyset$. Aus $L(P_1'', A_2'', \ldots, A_n'')$ läßt sich nun wieder ein Teilgraph von A_1 konstruieren, der dieselbe Gestalt hat und zu den ersten beiden disjunkt ist. Dies läßt sich beliebig lange fortsetzen und widerspricht damit der Endlichkeit von A_1. Es gilt also: $\varphi(P_1) = P_r$. In B_1 führt jeder Weg zwischen Punkten des Teilgraphen $L(A_2, A_3, \ldots, A_n)$ nicht über P_1. Das bedeutet, daß entweder $\varphi(A_1) = L(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_r)$ oder $\varphi(A_1) = L(A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{i-1})$

gilt, je nachdem, ob $i \leqslant r \leqslant n$ oder $2 \leqslant r \leqslant i-1$ gilt. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: Entweder A_2 oder A_3 ist maximal.

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil an. $\varphi: B_1 \to B_3$ sei ein Isomorphismus. Wir erledigen zuerst die Fälle $n=3$ und $n=4$. Ist $n=3$, so besagt Hilfssatz 1, daß $\varphi(A_1)=A_3$ oder $\varphi(A_1)=A_2$ ist, womit alles gezeigt ist. Ist $n=4$, so muß nach Hilfssatz 1 $\varphi(A_1)= = L(A_3,A_4)$ und $\varphi(P_1)=P_4$ und deshalb $\varphi(P_2)=P_1$ gelten ($\varphi(A_1)=A_2$ scheidet aus, da A_2 nicht maximal ist). Weiter können wir schließen, daß $\varphi(P_3) \in A_1$ ist, da $\varphi(P_3)=P_2$ $\varphi(A_2)=A_1$ zur Folge hätte. Damit gilt aber $\varphi^{-1}(L(P_1,A_2)) \subseteq A_2$, was offensichtlich falsch ist.

Es sei nun $n \geqslant 5$. $\psi: B_1 \to B_4$ und $\varrho: B_1 \to B_5$ seien Isomorphismen. Hilfssatz 1 lehrt, daß $\varphi(A_1)=L(A_3,A_4,\ldots,A_r)$ $(3 \leqslant r \leqslant n)$ und $\varphi(P_1)=P_r$ gelten. Ist $r<n$, so muß $\varphi(P_2)=P_{r+1}$ sein. Weiter muß $\varphi(P_3)=P_{r+2}$ bzw. $\varphi(P_3)=P_1$ (wenn $r=n-1$) sein, da $\varphi(P_3) \in A_{r+1}$ nur gelten kann, wenn $\varphi^{-1}(P_{r+2}) \in A_2$ und damit $\varphi^{-1}(L(A_{r+2},\ldots,A_n,A_1,A_2)) \subseteq A_2$ gilt, was aber der Maximalität von A_1 widerspricht. Wendet man dieses Schlußverfahren mehrmals an, so kommt man zu

$$\varphi(P_1)=P_r, \varphi(P_2)=P_{r+1},\ldots,\varphi(P_i)=P_n, \varphi(P_{i+1})=P_1, \tag{1}$$

wobei $i=n+1-r$ ist, und

$$\varphi(A_2)=A_{r+1}, \varphi(A_3)=A_{r+2},\ldots,\varphi(A_i)=A_n. \tag{2}$$

Die Graphen $A_2,A_3,\ldots,A_r$ sind also nicht maximal, und die Graphenfolge $A_{r+1},A_{r+2},\ldots,A_n$ stellt wegen (2) eine periodische Wiederholung der Graphenfolge $A_2,A_3,\ldots,A_r$ dar; somit ist A_1 der einzige maximale Graph.

Nun benötigen wir den Isomorphismus $\psi: B_1 \to B_4$. Aus Hilfssatz 1 folgern wir, daß entweder

$$\text{(a)}\quad \varphi(A_1)=L(A_4,A_5,\ldots,A_k), \psi(P_1)=P_k$$

oder

$$\text{(b)}\quad \psi(A_1)=L(A_2,A_3), \psi(P_1)=P_2$$

gilt. Nehmen wir zunächst (a) an. Es muß $k=r+1$ sein, da $A_3 \cong A_{r+2}$. Derselbe Schluß wie vorhin liefert:

$$\psi(P_1) = P_{r+1}, \psi(P_2) = P_{r+2}, \ldots, \psi(P_{i-1}) = P_n, \psi(P_i) = P_1 \quad (3)$$

$$\psi(A_2) = A_{r+2}, \ldots, \psi(A_{i-1}) = A_n \quad (4)$$

und $\psi(L(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)) = L(A_1, A_2, A_3)$. Ferner muß $\psi(P_{i+1}) \in A_1$ und damit $\psi(L(P_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)) \subseteq A_1$ gelten. $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n$ ist aber eine Folge von $n - i = r - 1$ „aufeinanderfolgenden" Graphen, in der die Folge der $r - 2$ Graphen $A_3, A_4, \ldots, A_r$ in zyklisch vertauschter Reihenfolge vorkommt. Wegen $\psi(A_1) = L(A_3, A_4, \ldots, A_r)$ haben wir damit einen Widerspruch, und (a) kann nicht gelten. Nun zu (b): $\psi(A_1) = L(A_2, A_3), \psi(P_1) = P_2$. Wir folgern: $\psi(P_2) = P_1$, $\psi(P_3) \in A_1$, da $\psi(P_3) = P_n$ nur gilt, wenn $\psi(A_2) = A_1$ ist. Damit kommen wir zu

$$\psi(L(P_2, A_3, \ldots, A_n)) \subseteq A_1 . \quad (5)$$

Um zu zeigen, daß auch (b) nicht gelten kann, müssen wir noch den Isomorphismus $\varrho : B_1 \to B_5$ verwenden. $\varrho(A_1) = L(A_5, A_6, \ldots, A_p)$ mit $p \leqslant n$ steht in Widerspruch zu (5). $\varrho(A_1) = L(A_2, A_3, A_4)$ geht auch nicht, da $\psi(A_1) = L(A_2, A_3)$ ist. Bleibt noch $\varrho(A_1) = L(A_3, A_4)$. Da $n \geqslant 5$ ist, ist das ebenfalls mit (5) unvereinbar.

3. Ein Isomorphiesatz

Die Graphen A_i und B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ seien definiert wie in Abschnitt 2.

Satz 1: *Die Graphen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sind genau dann isomorph, wenn $A_i \cong A_{i+2}$ ($i + 2$ modulo n) für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.*

Bemerkung: $A_i \cong A_{i+2}$ ($i + 2$ modulo n) bedeutet: Ist n gerade, so gilt: $A_1 \cong A_3 \cong \ldots \cong A_{n-1}$ und $A_2 \cong A_4 \cong \ldots \cong A_n$. Ist n ungerade, dann gilt: $A_1 \cong A_2 \cong \ldots \cong A_n$.

Beweis: I. Es sei $B_1 \cong B_2 \cong \ldots \cong B_n$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Nicht alle A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sind maximal. Dann behaupten wir: In der Folge $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1, A_2, \ldots$ steht abwechselnd ein maximaler und ein nicht maximaler Graph, und n ist gerade.

Denn nach Hilfssatz 2 folgt auf einen maximalen Graphen höchstens *ein* nicht maximaler. Andererseits können nicht zwei maximale Graphen nacheinander vorkommen. Denn seien (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) A_1 und A_2 maximal, A_3 nicht maximal: Wegen Hilfssatz 2 ist A_4 maximal. Sei $\pi : B_2 \to B_4$ ein

Isomorphismus. Dann muß $\pi(A_2) = A_4$ sein (Hilfssatz 1!) und demnach $\pi(A_1) = A_3$, womit A_3 maximal wäre. Damit ist die obenstehende Behauptung bewiesen. Nun zur Behauptung des Satzes: Wir können annehmen, daß $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$ maximal sind und $A_2, A_4, \ldots, A_n$ nicht. $\varphi: B_1 \to B_3$ sei ein Isomorphismus. Dann gilt offenbar: $\varphi(A_1) = A_3$, $\varphi(A_2) = A_4, \ldots$, $\varphi(A_{n-2}) = A_n$, $\varphi(A_{n-1}) = A_1$, $\varphi(A_n) = A_2$ sowie $\varphi(P_1) = P_3$, $\varphi(P_2) = P_4, \ldots$, $\varphi(P_{n-2}) = P_n$, $\varphi(P_{n-1}) = P_1$, $\varphi(P_n) = P_2$ (folgt wie im Beweis von Hilfssatz 2). Das heißt aber: $A_i \cong A_{i+2}$ ($i+2$ modulo n).

2. Alle $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ sind maximal. Es genügt, wenn wir zeigen, daß $A_1 \cong A_3$ ist. Angenommen, das wäre falsch. Dann betrachten wir Isomorphismen $\varphi: B_1 \to B_3$ und $\eta: B_2 \to B_3$. Es muß $\varphi(A_1) = A_2$ und $\eta(A_1) = A_2$ sein und damit $\eta(A_2) = A_3$ und somit $A_1 \cong A_3$, im Widerspruch zur Annahme.

II. Es gelte $A_i \cong A_{i+2}$ ($i+2$ modulo n) für $i = 1, 2, \ldots, n$.

1. Gilt $A_1 \cong A_2 \cong \ldots \cong A_n$, dann sind $B_1, B_2, \ldots, B_n$ offenbar isomorph.

2. Ist n gerade und gilt $A_1 \cong A_3 \cong \ldots \cong A_{n-1}$ und $A_2 \cong A_4 \cong \cong \ldots \cong A_n$, so kann zwischen B_1 und B_i folgender Isomorphismus φ_i hergestellt werden, der sich aus Punkt-Isomorphismen zwischen den A_i zusammensetzt: Ist i ungerade, so setzen wir $\varphi_i(A_1) = A_i$, $\varphi_i(A_2) = A_{i+1}, \ldots$, $\varphi_i(A_n) = A_{i-1}$; ist i gerade, dann definieren wir: $\varphi_i(A_1) = A_{i-1}$, $\varphi_i(A_2) = A_{i-2}, \ldots$, $\varphi_i(A_n) = A_i$.

4. Lösung des Problems

Satz 2: *Alle zusammenhängenden endlichen Graphen, deren sämtliche Gerüste isomorph sind (Eigenschaft (A)), sind die folgenden:*

(a) *Bäume;*

(b) *Graphen der Form* $C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, *wo die* A_i *punktierte Bäume sind und* $A_i \cong A_{i+2}$ ($i+2$ modulo n) *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *gilt.*

Beweis: I. Die angegebenen Graphen haben die Eigenschaft (A). Für Bäume ist das trivial. Bei Graphen der Form $C(A_1, \ldots, A_n)$ erhält man sämtliche Gerüste, indem man je eine der Kanten (P_1, P_2), $(P_2, P_3), \ldots$, (P_n, P_1) streicht, wobei $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die ausgezeichneten Punkte der Graphen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind. Die entstehenden Graphen sind nach Satz 1 isomorph.

II. Außer den angegebenen Graphen hat keiner die Eigenschaft (A).

Zusammenhängende Graphen, die genau einen Kreis enthalten, sind von der Form $C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, wobei die A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ punktierte Bäume sind. Auf Grund von Satz 1 müssen sie, damit alle Gerüste isomorph sind, von der Form (b) sein. Es verbleibt zu zeigen, daß es keine Graphen mit der Eigenschaft (A) gibt, die mehr als einen Kreis enthalten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Es gibt zwei Kreise mit nichtleerem Kantendurchschnitt. Wir halten zwei derartige Kreise fest und öffnen alle anderen durch Löschen von Kanten. Der entstehende Graph ist von folgender Form: $L(B_1, B_2, \ldots, B_m) \cup C(A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n)$, wobei die A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ und B_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ paarweise disjunkte punktierte Bäume sind und die ausgezeichneten Punkte von A_1 und B_1 sowie von A_k und B_m durch je eine Kante verbunden sind. Der Weg von A_1 nach A_k über die B_j kann auf mindestens zwei Arten durch Streichen von Kanten unterbrochen werden, wodurch Graphen der Form $C(A'_1, A_2, \ldots, A'_k, A_{k+1}, \ldots, A_n)$ bzw. $C(A''_1, A_2, \ldots, A''_k, A_{k+1}, \ldots, A_n)$ entstehen (A'_1, A'_k, A''_1, A''_k sind punktierte Bäume), deren Gerüste auch Gerüste des ursprünglichen Graphen sind. Ist $k \neq 3$, so kann nicht sowohl $A'_1 \cong A_3$ als auch $A''_1 \cong A_3$ gelten (da A'_1 und A''_2 verschiedene Eckenzahlen haben), daher können in mindestens einem der beiden Graphen nicht alle Gerüste isomorph sein. Ist $k = 3$, dann kann nicht sowohl $A'_1 \cong A'_3$ als auch $A''_1 \cong A''_3$ gelten, woraus dasselbe folgt.

2. Es gibt zwei kantendisjunkte Kreise. Zwei derartige Kreise werden festgehalten und alle anderen wieder durch Entfernen von Kanten geöffnet. Es entsteht ein Graph der Form $C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $(n \geqslant 3)$, wobei A_1 ein punktierter Graph ist, der genau einen Kreis enthält, und die A_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ punktierte Bäume sind. Man kann nun den Kreis in A_1 sicher so öffnen, daß ein punktierter Baum A'_1 entsteht (mit demselben ausgezeichneten Punkt wie A_1) und nicht $A_1 \cong A_3$ gilt. Denn A_1 ist selbst von der Form $A_1 = C(B_1, B_2, \ldots, B_p)$, wobei die B_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ punktierte Bäume sind und der ausgezeichnete Punkt von A_1 in B_1 liegt. Alle möglichen A'_1 sind dann genau die Gerüste von A_1. Würde immer $A'_1 \cong A_3$ gelten, so müßten alle Gerüste von A_1 punktisomorph sein. Aus dem Beweis von Satz 1 folgt aber, daß bei einem Isomorphismus $\varphi : L(B_1, B_2, \ldots, B_p) \to L(B_3, B_4, \ldots, B_p, B_1, B_2)$ $\varphi(B_1) = B_3$ oder $\varphi(B_1) = B_2$ gelten müßte, und so könnte der ausgezeichnete Punkt $P \in B_1$ nicht in sich übergeführt werden. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Herrn Professor K. Wagner möchte ich für die Durchsicht dieser Arbeit sowie für einige Verbesserungsvorschläge danken.

Literatur

[1] WAGNER, K.: Graphentheorie, BI Hochschultaschenbuch, Mannheim 1970.

[2] KÖNIG, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. 1936.

Anschrift des Verfassers:
Dr. R. FISCHER
Mathematisches Institut der Universität Salzburg
Ferdinand-Porsche-Straße 1
A-5020 Salzburg, Österreich