Werk

Titel: Metrische Räume mit einer Elementarlänge.

Autor: Domiaty, R.Z.

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0076|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 76, 1—20 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

Metrische Räume mit einer Elementarlänge[1]

Von

R. Z. Domiaty, Graz

(Eingegangen am 20. September 1970)

1. *Einleitung.* Verschiedene Ergebnisse der Mikrophysik legen die Hypothese nahe, in der Natur eine universelle Elementarlänge einzuführen ([3], [5]). Darunter versteht man die Existenz einer positiven reellen Zahl l_0, die die Eigenschaften besitzt, daß sich jedes Resultat l einer Längenmessung in der Form

$$l = m\, l_0$$

darstellen läßt, wobei m stets eine nicht negative ganze Zahl ist. Der erste, der dies vorgeschlagen hat, war 1899 M. PLANCK. Die heute nach ihm benannte Plancksche Elementarlänge hat im CGS-System den Wert

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar g}{c^3}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-33}\,[C]\,.$$

Für unsere weiteren Überlegungen spielt der numerische Wert der Elementarlänge l_0 eine untergeordnete Rolle, da man durch eine geeignete Umnormierung der zugrunde gelegten physikalischen Einheiten immer erreichen kann, daß $l_0 = 1$ ist. Aus diesem Grund können wir uns, ohne an Allgemeinheit zu verlieren, von Anfang an auf diesen speziellen Wert der Elementarlänge beschränken.

Sehr allgemeine, abstrakte mathematische Modelle einer derartigen Welt stellen die metrischen Räume mit einer Elementarlänge dar (vgl. Definition 1). In dieser Arbeit unternehmen wir den Versuch, diese Klasse von Räumen einer geometrischen Unter-

[1] Diese Arbeit entstand im Studienjahr 1969/70 während eines Aufenthaltes an der Universität Freiburg/Br., der von der Alexander v. Humboldt-Stiftung finanziert wurde. Herrn Prof. Dr. M. BARNER möchte ich an dieser Stelle herzlich für seine Unterstützung und Hilfe danken.

suchung zugänglich zu machen. Eine Diskussion der oben erwähnten Hypothese, welche lediglich als eine Motivierung unserer Problemstellung dient, soll hier nicht stattfinden.

2. *Zusammenstellung der hier verwendeten Bezeichnungen.* Mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ bezeichnen wir jeweils die Menge der reellen, ganzen, nicht negativen ganzen bzw. natürlichen Zahlen und mit $\emptyset$ die leere Menge.

R sei jetzt eine beliebige, feste Menge. Dann ist $\mathfrak{P}(R)$ die Potenzmenge von R, $|R|$ die Mächtigkeit von R und $\mathscr{T}(R)$ die Familie aller Topologien auf R. Ist insbesonders $\mathfrak{T} \in \mathscr{T}(R)$, so bezeichnen wir mit $(R, \mathfrak{T})$ den topologischen Raum R mit der Topologie $\mathfrak{T}$, mit $\mathbb{A}\mathfrak{T}$ das System der abgeschlossenen Teilmengen aus $(R, \mathfrak{T})$ und mit $\mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(p)$, für jeden Punkt $p \in R$, das System aller Umgebungen von p in $(R, \mathfrak{T})$.

Mit $\mathscr{D}(R)$ bezeichnen wir die Menge aller Metriken auf R. Ein Paar (R,d) mit $d \in \mathscr{D}(R)$ heißt ein metrischer Raum. *Dabei soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß wir einem metrischen Raum zunächst noch keine Topologie zuordnen!*

Ist (R,d) ein beliebiger, fester metrischer Raum, so bezeichnet, für jede Teilmenge $M \subseteq R$, $\delta(M)$ den Durchmesser von M, und für jedes $p \in R$ und $r \in \mathbb{R}$

$$K(p,r) := \{q \in R \mid d(p,q) < r\}$$

die offene bzw.

$$B(p,r) := \{q \in R \mid d(p,q) \leqslant r\}$$

die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt p und dem Radius r.

Schließlich setzen wir $\mathfrak{k}(R)$ bzw. $\mathfrak{b}(R)$ jeweils zur Abkürzung für die Familie der offenen bzw. abgeschlossenen Kugeln in (R, d).

Natürlich hat man auch hier die Begriffe „offene Kugel" und „abgeschlossene Kugel" zunächst nur im bezeichnungstechnischen und nicht etwa im topologischen Sinn zu verstehen.

3. *Zwei Definitionen.* Den Gegenstand unserer Untersuchungen bildet die folgende spezielle Klasse von metrischen Räumen.

Definition 1.

1) Genau dann heißt $d \in \mathscr{D}(R)$ eine *Metrik mit einer Elementarlänge auf* R, wenn zusätzlich das Axiom

(A) $\forall x,y \in R$: $d(x,y) \in \mathbb{N}_0$ (Existenz einer Elementarlänge)

erfüllt ist. Die Menge aller derartigen Metriken auf R bezeichnen wir mit $\mathscr{E}(R)$.

2) Ist $d \in \mathscr{E}(R)$, so nennen wir (R,d) einen *metrischen Raum mit einer Elementarlänge.*

Am Rande sei erwähnt, daß $\mathscr{E}(R) \neq \emptyset$ für $R \neq \emptyset$ ist, da die diskrete Metrik d_0 stets in $\mathscr{E}(R)$ enthalten ist. Weiter wollen wir anmerken, daß in einem metrischen Raum mit einer Elementarlänge kein wesentlicher Unterschied zwischen offenen und abgeschlossenen Kugeln besteht. Denn für ein $p \in R$ und $0 < r < \infty$ gilt in diesem Fall die Beziehung

$$K(p,r) = \begin{cases} B(p,[r]), \text{ wenn } r \notin \mathbb{N} \\ B(p,r-1), \text{ wenn } r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dabei sei $[r]$ das „größte Ganze" der reellen Zahl r.

Definition 2.

Es sei $d \in \mathscr{E}(R)$ und $p \in R$. Dann heißt

$$E(p) := B(p,1)$$

die *Elementarkugel um p.*

Nun zwei Beispiele.

Beispiel 1. Es sei $R := \mathbb{G}^n$, $n \in \mathbb{N}$, das n-dimensionale Gitter und d_1: $\mathbb{G}^n \times \mathbb{G}^n \to \mathbb{R}$; $d_1[(p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n)] := \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$. Dann ist, wie man unmittelbar erkennt, $d_1 \in \mathscr{E}(\mathbb{G}^n)$.

Auf das nun folgende, weniger triviale Beispiel werden wir uns später noch oftmals beziehen.

Beispiel 2. Es sei $R := \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, der n-dimensionale Zahlenraum. Für jede beliebige reelle Zahl a sei $\langle a \rangle$ jene eindeutig bestimmte ganze Zahl, die der Ungleichung

$$\langle a \rangle - 1 < a \leqslant \langle a \rangle$$

genügt. (Man könnte, in Analogie zum „größten Ganzen" $[a]$ von a, $\langle a \rangle$ als das „kleinste Ganze" von a bezeichnen. Zwischen beiden besteht die Beziehung $\langle a \rangle = -[-a]$.) Endlich setzen wir wie üblich

$$\| x \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

für $x := (x_1, \ldots, x_n)$ und definieren

$$d_2: \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ d_2(x,y) := \langle \| x - y \| \rangle.$$

Eine elementare Rechnung ergibt dann sofort

$$d_2 \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n).$$

Diese Konstruktion läßt sich natürlich auf beliebige metrische Räume übertragen. Denn aus $d \in \mathscr{D}(R)$ folgt, wie man leicht zeigen kann, daß $\hat{d} \in \mathscr{E}(R)$ ist, wenn man $\hat{d}(x,y) := \langle d(x,y) \rangle$ setzt.

4. *Die Topologisierung metrischer Räume mit einer Elementarlänge.* Einem metrischen Raum (R,d) ordnet man üblicherweise die durch d in R induzierte Topologie $\mathfrak{T}_d$ zu. Eine Teilmenge $O \subseteq R$ ist bekanntlich genau dann offen bzgl. $\mathfrak{T}_d$, wenn entweder O die leere Menge ist oder wenn es zu jedem Punkt $p \in O$ eine positive reelle Zahl r gibt, so daß $K(p,r) \subseteq O$ ist. $\mathfrak{T}_d$ besitzt somit $\mathfrak{k}(R)$ als Basis, d. h. $\mathfrak{T}_d$ ist die gröbste Topologie aus $\mathscr{T}(R)$, für welche alle offenen Kugeln auch offene Mengen sind.

Diese Konstruktion führt im Falle eines metrischen Raumes mit einer Elementarlänge auf ein unbefriedigendes Resultat. Ist nämlich $d \in \mathscr{E}(R)$ und $p \in R$, so gilt

$$K(p, \tfrac{1}{2}) = \{p\}.$$

$\mathfrak{T}_d$ entartet daher in die diskrete Topologie

$$\mathfrak{T}_d = \mathfrak{P}(R).$$

Z. B. wäre demnach jeder metrische Raum mit einer Elementarlänge, versehen mit der Topologie $\mathfrak{T}_d$, vollständig unzusammenhängend, m. a. W., außer den einpunktigen gäbe es keine weiteren zusammenhängenden Mengen. Dieses Ergebnis zwingt uns, nach einem anderen Ansatz zu suchen. Dabei wollen wir die nun folgenden Überlegungen von vorneherein für eine beliebige Metrik $d \in \mathscr{D}(R)$ durchführen.

Definition 3.

Es sei $d \in \mathscr{D}(R)$. Genau dann nennen wir eine *Topologie* $\mathfrak{T} \in \mathscr{T}(R)$ *mit der Metrik d verträglich*, wenn

$$\mathfrak{b}(R) \subseteq \mathbb{A}\,\mathfrak{T}$$

ist. $\mathscr{V}_d(R)$ sei die Menge aller mit d verträglichen Topologien aus R.

Nach dieser Vereinbarung ist daher eine Topologie $\mathfrak{T}$ genau dann mit d verträglich, wenn die abgeschlossenen Kugeln ab-

geschlossene Mengen sind. Da in einem metrischen Raum (R,d) stets $\mathfrak{b}(R) \subseteq \mathbb{A}\,\mathfrak{T}_d$ ist, gilt insbesondere

$$\mathfrak{T}_d \in \mathscr{V}_d(R). \tag{1}$$

Anmerkung. Die übliche euklidische Topologie im $\mathbb{R}^n$ ist mit der Metrik d_2 in Beispiel 2 verträglich.

Lemma 1.

Es sei $d \in \mathscr{D}(R)$ und $\mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)$. Dann ist $(R,\mathfrak{T})$ ein T_1-Raum.

Bew.: Aus $\mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)$ folgt

$$\forall p \in R\colon\ B(p,0) = \{p\} \in \mathbb{A}\,\mathfrak{T}.$$

Dies ist aber äquivalent mit dem Fréchet-Rieszschen Trennungsaxiom T_1. Q. E. D.

Wie wir etwas später an Hand eines Beispieles zeigen werden, muß allerdings $(R,\mathfrak{T})$, mit $\mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)$, nicht notwendig ein Hausdorff-Raum sein.

Aus Lemma 1 erkennt man unmittelbar, daß $\mathscr{V}_d(R)$ für endliche Mengen R nur eine einzige, nämlich die diskrete Topologie enthält. Falls R eine unendliche Menge ist, wird $\mathscr{V}_d(R)$ i. a. weitere Topologien enthalten. Um einen ersten Einblick in die Struktur von $\mathscr{V}_d(R)$ zu gewinnen, zeigen wir

Lemma 2.

Es sei $d \in \mathscr{D}(R)$ und

$$\mathfrak{B}_d := \inf \mathscr{V}_d(R) = \bigcap_{\mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)} \mathfrak{T}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{B}_d \in \mathscr{V}_d(R).$$

Bew.: Es sei $B(p,r) \in \mathfrak{b}(R)$. Dann gilt nach Definition 3

$$\forall\, \mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)\colon\ \mathbb{C}\,B(p,r) \in \mathfrak{T},$$

woraus sofort

$$\mathbb{C}\,B(p,r) \in \bigcap_{\mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)} \mathfrak{T}$$

folgt. Es ist daher $B(p,r) \in \mathbb{A}\,\mathfrak{B}_d$. Q. E. D.

Demnach besteht $\mathscr{V}_d(R)$ aus genau all jenen Topologien aus $\mathscr{T}(R)$, die feiner sind als $\mathfrak{B}_d$.

Diese Topologie $\mathfrak{B}_d$ läßt sich sehr einfach beschreiben. Sie ist nach Lemma 2 gerade die gröbste Topologie, für welche alle abge-

schlossenen Kugeln auch abgeschlossene Mengen sind. In gewissen Sinn ist daher $\mathfrak{V}_d$ ein Gegenstück zu $\mathfrak{T}_d$. $\mathfrak{b}(R)$ kann man als eine Subbasis der abgeschlossenen Mengen in $(R, \mathfrak{V}_d)$ auffassen. Setzt man

$$\mathfrak{a} := \{B \subseteq R \mid \exists\, B(p_1, r_1), \ldots, B(p_m, r_m) \in \mathfrak{b}(R)\colon B = \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i, r_i)\},$$

so kann $\mathfrak{a}$ als eine Basis für die abgeschlossenen Mengen in $(R, \mathfrak{V}_d)$ angesehen werden:

$$\mathbb{A}\, \mathfrak{V}_d = \{A \subseteq R \mid \exists\, \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathfrak{a} : A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\} \cup \{R\}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt u. a. sofort:
Ist

$$A \in \mathbb{A}\, \mathfrak{V}_d - \{R\}, \tag{3}$$

dann gilt $\delta(A) < \infty$.

M. a. W., jede abgeschlossene echte Teilmenge von R ist beschränkt. Daraus erhält man schließlich das Nebenresultat:
Ist

$$\delta(R) = \infty, \tag{4}$$

dann kann $(R, \mathfrak{V}_d)$ kein Hausdorff-Raum sein.

Bew.: O' und O'' seien zwei beliebige nicht leere Mengen aus $\mathfrak{V}_d$. Nach (3) gibt es dann eine abgeschlossene Kugel $B(p,r)$ mit

$$\mathbb{C}\, O' \cup \mathbb{C}\, O'' \subseteq B(p,r).$$

Wegen $\delta(B(p,r)) \leqslant 2r < \infty$ gilt dann

$$O' \cap O'' \supseteq \mathbb{C}\, B(p,r) \neq \emptyset \qquad \text{Q. E. D.}$$

Damit haben wir zugleich nachgewiesen, daß i. a. in $\mathscr{V}_d(R)$ außer der diskreten noch andere Topologien vorhanden sein werden.

Nun wollen wir diese Definition auf unsere beiden Beispiele aus Abschnitt 3 anwenden.

Zu Beispiel 1. Bezeichnet man mit $\mathfrak{e}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{G}^n$, so ist, da ja jedes $B(p,r) \in \mathfrak{b}(\mathbb{G}^n)$ eine endliche Menge ist,

$$\mathbb{A}\, \mathfrak{V}_{d_1} = \mathfrak{e} \cup \{\emptyset, \mathbb{G}^n\}.$$

$\mathfrak{V}_{d_1}$ ist die sogenannte ko-finite Topologie auf $\mathbb{G}^n$, und $\mathfrak{V}_{d_1}$ ist von $\mathfrak{T}_{d_1}$ verschieden. $\mathscr{V}_{d_1}(\mathbb{G}^n)$ besteht daher aus allen Topologien, die feiner sind als $\mathfrak{V}_{d_1}$. Nach einem bekannten Satz ist dann $\mathscr{V}_{d_1}(\mathbb{G}^n)$ identisch mit der Menge aller T_1-Topologien auf $\mathbb{G}^n$.

Zu Beispiel 2. Bezeichnet man mit $\mathfrak{O}^n$ die übliche euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$, so ist einerseits, wegen $\mathfrak{b}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{A}\,\mathfrak{O}^n$,

$$\mathfrak{O}^n \supseteq \mathfrak{V}_{d_2}$$

und anderseits, wenn man $H_+ := \{(0, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_i \in \mathbb{R}, 2 \leqslant i \leqslant n\}$ setzt, wegen $H_+ \in \mathbb{A}\mathfrak{O}^n$ und $\delta(H_+) = \infty$ nach (3)

$$\mathfrak{O}^n \neq \mathfrak{V}_{d_2}.$$

Wir haben somit $\mathfrak{O}^n \supset \mathfrak{V}_{d_2}$.

In beiden Fällen existieren daher, wie nach (4) zu erwarten war, außer $\mathfrak{T}_d$ noch weitere mit der Metrik d verträgliche Topologien. Man beachte dabei, daß sowohl $\mathfrak{V}_{d_1}$ als auch $\mathfrak{V}_{d_2}$ das Hausdorffsche Trennungsaxiom T_2 nicht erfüllen.

In Definition 3 haben wir jetzt jedem metrischen Raum (R, d) eine Familie von Topologien zugeordnet. Unter diesen ist eine, nämlich $\mathfrak{V}_d$, als besonders einfach ausgezeichnet, und es liegt nahe, metrischen Räumen mit einer Elementarlänge $\mathfrak{V}_d$ anstelle $\mathfrak{T}_d$ zuzuordnen.

Eine einfache Überlegung zeigt jedoch sehr schnell, daß dies nicht immer zweckmäßig wäre. Da $\mathfrak{V}_d$ gröber ist als $\mathfrak{T}_d$, kann es in $(R, \mathfrak{V}_d)$ „zu viele" und in $(R, \mathfrak{T}_d)$ „zu wenig" konvergente Folgen geben. Das sieht man am besten an Hand von Beispiel 2. Setzt man für alle $i \in \mathbb{N}$ $x_i := ((1/i), 0, \ldots, 0)$ bzw. $y_i := (1 + i, 0, \ldots, 0)$, so konvergieren die Folgen (x_i) und (y_i) bzgl. der Topologie $\mathfrak{V}_{d_2}$ gegen $o := (0, \ldots, 0)$, obwohl stets $y_i \notin E(o)$ ist; aber weder (x_i) noch (y_i) konvergiert gegen irgendeinen Punkt bzgl. $\mathfrak{T}_{d_2}$. Um diese Situation etwas zu verbessern, engen wir die Menge der mit d verträglichen Topologien etwas ein, indem wir folgende Vereinbarung treffen.

Definition 4.

Es sei $d \in \mathscr{E}(R)$. Genau dann nennen wir eine Topologie $\mathfrak{T} \in \mathscr{T}(R)$ *mit der Metrik d im engeren Sinn verträglich*, wenn $\mathfrak{T} \in \mathscr{V}_d(R)$ und zusätzlich die Bedingung

$$(U) \qquad \forall p \in R: E(p) \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(p)$$

erfüllt ist. Die Menge aller mit d im engeren Sinn verträglichen Topologien bezeichnen wir mit $\mathscr{G}_d(R)$.

Mit dem Symbol

$$(R, d, \mathfrak{T})$$

bezeichnen wir im weiteren immer eine Menge R zusammen mit $d \in \mathscr{E}(R)$ und $\mathfrak{T} \in \mathscr{G}_d(R)$.

Wegen

$$\mathfrak{T}_d \in \mathscr{G}_d(R) \tag{5}$$

ist stets $\mathscr{G}_d(R) \neq \emptyset$.

5. *Eine Verallgemeinerung des Bogenbegriffs.* Bei der Konstruktion der inneren Metrik in einem gewöhnlichen metrischen Raum $(R, d, \mathfrak{T}_d)$ spielt der Begriff des Bogens eine fundamentale Rolle ([1], [4]). Dabei versteht man unter einem Bogen in einem topologischen Raum das eineindeutige und stetige Bild eines kompakten Intervalles der reellen Zahlengeraden. Wir haben uns hier bewußt auf die etwas allgemeinere Formulierung des Bogenbegriffs festgelegt. Denn meist nennt man eine Punktmenge aus R erst dann einen Bogen, wenn sie einem kompakten Intervall homöomorph ist. Dieser speziellere Bogenbegriff fällt mit unserem zusammen, wenn $(R, \mathfrak{T})$ ein Hausdorff-Raum ist.

Jetzt sei $(R, \mathfrak{T})$ ein fester topologischer Raum, p, q und r drei Punkte aus R. Weiter sei A ein Bogen aus R, der p mit r, und B ein Bogen aus R, der r mit q verbindet. Denkt man sich jetzt A und B in bekannter Weise aneinandergefügt, so wird $A \cup B$ i. a. kein Bogen sein. Jedoch kann man, falls $(R, \mathfrak{T})$ ein Hausdorff-Raum ist, zeigen, daß es einen Bogen $C \subseteq A \cup B$ gibt, der p und q miteinander verbindet. Denn $A \cup B$ ist das stetige Bild eines kompakten Intervalles der reellen Zahlengeraden in einen Hausdorff-Raum und somit bogenzusammenhängend. I. a. kann aber diese für die Konstruktion einer inneren Metrik äußerst wichtige Eigenschaft nicht auf topologische Räume angewendet werden, die das Hausdorffsche Trennungsaxiom nicht erfüllen. Da wir aber auch solche Topologien in unseren Überlegungen zulassen, sind wir aus diesem Grund gezwungen, den Begriff des Bogens in geeigneter Weise zu verallgemeinern[2]. Vorerst treffen wir folgende Vereinbarung. Unter einem *geordneten System* $\mathfrak{t}$ *von Intervallen* verstehen wir im weiteren stets eine endliche Menge von kompakten Intervallen $T_1 := [\alpha_1, \beta_1], \ldots, T_n := [\alpha_n, \beta_n]$ der reellen Zahlengeraden, wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein darf, mit $\beta_i < \alpha_{i+1}$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$. $\mathscr{A}$ sei die Familie aller möglichen geordneten Systeme von Intervallen. Nun erklären wir

[2] Eine andersartige Verallgemeinerung soll in einer eigenen Arbeit untersucht werden.

Definition 5.

Es sei $(R, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

1) Genau dann heißt eine Teilmenge $B \subseteq R$ ein *verallgemeinerter Bogen in* R, kurz ein *v-Bogen in* R, wenn es ein $t = \{T_1, \ldots, T_n\} \in \mathscr{A}$, mit $T_i := [\alpha_i, \beta_i]$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, und eine injektive stetige Abbildung

$$f\colon \bigcup_{i=1}^{n} T_i \to R$$

mit

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) = B$$

gibt, wobei zusätzlich das Axiom

$$(B_0) \quad \bigwedge_{i=1}^{n-1} i \; \forall V \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(f(\beta_i)) \; \forall W \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(f(\alpha_{i+1}))\colon V \cap W \neq \emptyset$$

erfüllt sein soll.

(f, t) heißt dann eine *Parameterdarstellung von* B, $a := f(\alpha_1)$ bzw. $b := f(\beta_n)$ der *Anfangs-* bzw. *Endpunkt von* B *bzgl.* (f, t).

2) Ist $p, q \in R$, so sei $Z_{\mathfrak{T}}(p, q)$ die Menge aller v-Bogen $B \subseteq R$, für die p bzw. q bezüglich einer geeigneten Parameterdarstellung Anfangs- bzw. Endpunkt von B ist.

Anmerkungen zu Definition 5. 1) Ist $(R, \mathfrak{T})$ ein Hausdorff-Raum, so erhält man den üblichen Bogenbegriff. Ist nämlich B ein v-Bogen in R mit der Parameterdarstellung (f, t), $t := \{[\alpha_1, \beta_1], \ldots, [\alpha_n, \beta_n]\}$, so muß wegen (B_0) und der Gültigkeit des Hausdorffschen Trennungsaxioms

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} i\colon f(\beta_i) = f(\alpha_{i+1})$$

und daher, wegen der Injektivität von f,

$$n = 1$$

sein.

2) Falls $(R, \mathfrak{T})$ kein Hausdorff-Raum ist, kann es in R nicht triviale, vollständig ausgeartete v-Bogen geben. Darunter verstehen wir v-Bogen, die nur aus endlich vielen Punkten bestehen. Z. B. ist im Raum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{V}_{d_2})$, d_2 gemäß Beispiel 2 gewählt, jedes Punktepaar $\{p, q\}$ ein v-Bogen in $\mathbb{R}^n$.

3) Nun soll eine geometrische Deutung des Axioms (B_0) gegeben werden. Es sei zunächst $(R, \mathfrak{T})$ ein beliebiger topologischer

Raum, und p und q zwei Punkte aus R. Genau dann wollen wir jetzt p und q „*eng benachbart*" nennen, wenn für jede Umgebung V aus $\mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(p)$ und jede Umgebung W aus $\mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(q)$

$$V \cap W \neq \emptyset$$

ist. Man beachte, daß in einem Hausdorff-Raum zwei Punkte dann und nur dann eng benachbart sind, wenn sie zusammenfallen. Ist B ein v-Bogen mit der Parameterdarstellung (f, t), $t := \{[\alpha_1, \beta_1], \ldots, [\alpha_n, \beta_n]\}$, und setzt man für alle i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$f_i := f \mid [\alpha_i, \beta_i] \quad \text{und} \quad B_i := f_i([\alpha_i, \beta_i]),$$

so stellt jedes B_i einen Bogen im üblichen Sinn dar. Somit kann man sich B aus endlich vielen Bogen im gewöhnlichen Sinn zusammengesetzt denken. Faßt man schließlich $f_i(\alpha_i)$ bzw. $f_i(\beta_i)$ als Anfangs- bzw. Endpunkt von B_i auf, so besagt (B_0), daß jeweils der Endpunkt von B_i und der Anfangspunkt von B_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, eng benachbart sein müssen.

4) Zum Abschluß wollen wir einige einfache Tatsachen über v-Bogen zusammenstellen, die wir später stillschweigend verwenden werden.

(a) Ist B ein v-Bogen und $\gamma \in \mathbb{R}$, so gibt es immer eine Parameterdarstellung (f, t) von B, wobei $t := \{T_1, \ldots, T_n\}$ und $T_1 = [\gamma, \beta_1]$ ist.

(b) Sind B, C v-Bogen und ist $C \subseteq B$, so heißt C ein *v-Teilbogen* von B. Ist z. B. (f, t), $t := \{T_1, \ldots, T_n\}$, eine Parameterdarstellung von B, $\xi \in T_k := [\alpha_k, \beta_k]$, $\eta \in T_l := [\alpha_l, \beta_l]$ und $\xi \leqslant \eta$, so ist

$$C := f([\xi, \beta_k] \cup \bigcup_{i=k+1}^{l-1} T_i \cup [\alpha_l, \eta])$$

ein v-Teilbogen von B.

(c) Ist B ein v-Bogen mit der Parameterdarstellung (f, t), wobei a der Anfangspunkt und b der Endpunkt von B bzgl. (f, t) sei, dann gibt es, wie eine einfache Rechnung zeigt, auch eine Parameterdarstellung von B, bezüglich welcher b der Anfangspunkt und a der Endpunkt von B ist.

Nun zeigen wir den wichtigen

Satz 1.

Es sei $(R, \mathfrak{T})$ ein beliebiger topologischer Raum, p, q und r drei Punkte aus R, $B \in Z_{\mathfrak{T}}(p, r)$ und $C \in Z_{\mathfrak{T}}(r, q)$. Dann gibt es einen v-Bogen $M \in Z_{\mathfrak{T}}(p, q)$ mit $M \subseteq B \cup C$.

Bew.: Wir wählen feste Parameterdarstellungen $(f, \mathfrak{s})$ für B und (g, t) für C. Dabei sei $\mathfrak{s} := \{S_1, \ldots, S_n\} \in \mathscr{A}$ mit $S_i := [\alpha_i, \beta_i]$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, $t := \{T_1, \ldots, T_m\} \in \mathscr{A}$ mit $T_j := [\gamma_j, \delta_j]$ für $1 \leqslant j \leqslant m$. Weiter setzen wir

$$V := \bigcup_{i=1}^{n} S_i, \quad W := \bigcup_{j=1}^{m} T_j, \quad D := B \cap C, \quad K := f^{-1}(D) \subseteq V \text{ und}$$

$L := g^{-1}(D) \subseteq W$. Da $r \in D$ ist, gilt $D \neq \emptyset$.

Nun unterscheiden wir drei mögliche Fälle.

Fall 1. $D = \{r\}$.

Wir wählen die Parameterdarstellung von C so, daß

$$\beta_n = \gamma_1$$

ist, und setzen

$$h\colon V \cup W \to R;\ h(\tau) := \begin{cases} f(\tau) \text{ für } \tau \in V \\ g(\tau) \text{ für } \tau \in W \end{cases}$$

und

$$\mathfrak{q} := \{S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n \cup T_1, T_2, \ldots, T_m\}.$$

Dann ist $M := B \cup C$ ein v-Bogen aus $Z_{\mathfrak{T}}(p, q)$ mit $(h, \mathfrak{q})$ als Parameterdarstellung. Damit ist unsere Aussage im Fall 1 gezeigt. Nun sei $D \neq \{r\}$. In diesem Fall wählen wir die Parameterdarstellung von C so, daß

$$\beta_n < \gamma_1$$

ist. Da V kompakt und $K \subseteq V$ ist, existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\xi \in V$ und eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\xi := \inf K \in S_k \in \mathfrak{s}.$$

Nun unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:

Fall 2. $D \neq \{r\}$ und $\xi \in K$.

Es gibt dann ein eindeutig bestimmtes $\zeta \in W$ und $l \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$\zeta := g^{-1}(f(\xi)) \in T_l \in \mathfrak{t}.$$

Nun betrachten wir die v-Teilbogen

$$B^* := f\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} S_i \cup [a_k, \xi]\right) \quad \text{und} \quad C^* := g\left([\zeta, \delta_1] \cup \bigcup_{j=l+1}^{m} T_j\right).$$

Wegen $B^* \cap C^* = \{f(\xi)\}$ ist, nach dem oben erledigten Fall 1, $M := B^* \cup C^*$ ein v-Bogen mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist unsere Aussage auch im Fall 2 gezeigt.

Fall 3. $D \neq \{r\}$ und $\xi \notin K$.

Nach einer elementaren Konstruktion erhält man in diesem Fall eine Folge $(\xi_i) \subseteq K$ mit den folgenden Eigenschaften:

(e_1) Erstens gilt für alle natürlichen Zahlen i

$$\xi_i \in S_k \cap K \text{ und } \xi < \xi_{i+1} < \xi_i$$

und zweitens ist $\lim\limits_{i \to \infty} \xi_i = \xi$.

(e_2) Es gibt ein $l \in \{1, \ldots, m\}$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\eta_i := g^{-1}(f(\xi_i)) \in T_l \cap L$$

und

$$\lim_{i \to \infty} \eta_i = \eta$$

ist.

Wegen der Stetigkeit von f und g und wegen (e_1) und (e_2) haben wir weiter

$$\lim_{i \to \infty} f(\xi_i) = f(\xi) \in B$$

und

$$\lim_{i \to \infty} g(\eta_i) = g(\eta) \in C.$$

Da $f(\xi)$ und $g(\eta)$ nicht in D liegen können, müssen sie voneinander verschieden sein. Setzt man schließlich

$$\forall i \in \mathbb{N}: \; a_i := f(\xi_i) = g(\eta_i),$$

so gilt einerseits

$$\forall U_1 \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(f(\xi)) \, \exists N_1 \in \mathbb{N} \, \forall i \geqslant N_1 : a_i \in U_1$$

und anderseits

$$\forall U_2 \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(g(\eta)) \, \exists N_2 \in \mathbb{N} \, \forall i \geqslant N_2 : a_i \in U_2,$$

woraus schließlich

$$\forall U_1 \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(f(\xi)) \, \forall U_2 \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}}(g(\eta)) : U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

folgt. Die Punkte $f(\xi) \in B$ und $g(\eta) \in C$ sind daher in unserem Sinn eng benachbart.

Jetzt betrachten wir die v-Teilbogen

$$\tilde{B} := f\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} S_i \cup [\alpha_k, \xi]\right) \text{ und } \tilde{C} := g\left([\eta, \delta_l] \cup \bigcup_{j=l+1}^{m} T_j\right).$$

Nach unserer Konstruktion ist $\tilde{B} \cap \tilde{C} = \emptyset$ und, da $f(\xi)$ und $g(\eta)$ eng benachbart sind, $\mathrm{M} := \tilde{B} \cup \tilde{C}$ ein v-Bogen aus $Z_{\mathfrak{T}}(p, q)$, der

zugleich Teilmenge von $B \cup C$ ist. Damit ist unsere Aussage auch im Fall 3 gezeigt. Q. E. D.

Lemma 3.

Es sei B ein v-Bogen im topologischen Raum $(R, \mathfrak{T})$. Dann ist B eine kompakte Teilmenge von R.

Bew.: Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß B das stetige Bild einer kompakten Menge aus $\mathbb{R}$ ist. Q. E. D.

Lemma 4.

Es sei R eine Menge und $\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'' \in \mathscr{T}(R)$. Ist $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}''$, dann gilt für alle $p, q \in R$

$$Z_{\mathfrak{T}'}(p,q) \supseteq Z_{\mathfrak{T}''}(p,q).$$

Bew.: p,q seien zwei beliebige, festgehaltene Punkte aus R. Falls $Z_{\mathfrak{T}''}(p,q) = \emptyset$ ist, ist nichts zu zeigen. Nun sei $Z_{\mathfrak{T}''}(p,q) \neq \emptyset$ und $B \in Z_{\mathfrak{T}''}(p,q)$ mit der Parameterdarstellung (f,t).

Da f stetig bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}''$ und $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}''$ ist, ist f auch stetig bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}'$. Weiter ist wegen $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}''$ für alle $p \in R$

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{T}'}(p) \subseteq \mathfrak{U}_{\mathfrak{T}''}(p).$$

Deshalb zieht die Gültigkeit von (B_0) für den v-Bogen B in $(R, \mathfrak{T}'')$ die Gültigkeit von (B_0) für die Menge B in $(R, \mathfrak{T}')$ nach sich. Somit ist $B \in Z_{\mathfrak{T}'}(p,q)$. Q. E. D.

Definition 6.

Ein topologischer Raum $(R, \mathfrak{T})$ heißt genau dann *B-zusammenhängend*, wenn für alle $p, q \in R$

$$Z_{\mathfrak{T}}(p, q) \neq \emptyset$$

ist.

Natürlich ist jeder im üblichen Sinn bogenzusammenhängende topologische Raum auch B-zusammenhängend. Es liegt somit eine Verallgemeinerung dieses Begriffes vor. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Ein B-zusammenhängender topologischer Raum muß nicht einmal zusammenhängend sein.

Lemma 5.

Ein topologischer Raum $(R, \mathfrak{T})$ ist genau dann B-zusammenhängend, wenn es einen Punkt q_0 aus R gibt, so daß für alle $p \in R$

$$Z_{\mathfrak{T}}(p, q_0) \neq \emptyset$$

ist.

Bew.: Die Notwendigkeit ist trivial. Nun wollen wir zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Sind $a,b\in R$, dann gibt es v-Bogen $B\in Z_{\mathfrak{T}}(a,q_0)$ und $C\in Z_{\mathfrak{T}}(q_0,b)$ und damit nach Satz 1 auch ein $M\in Z_{\mathfrak{T}}(a,b)$. $(R,\mathfrak{T})$ ist daher B-zusammenhängend. Q. E. D.

Eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 4 notieren wir in

Lemma 6.

Es sei $(R,\mathfrak{T})$ ein B-zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist auch $(R,\mathfrak{S})$, falls $\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{T}$ ist, B-zusammenhängend.

Diesen Abschnitt wollen wir mit einer wichtigen Spezialisierung abschließen.

Lemma 7.

Es sei $(R,d,\mathfrak{T})$ gegeben und B ein v-Bogen mit der Parameterdarstellung (f,t), $t:=\{[\alpha_1,\beta_1],\ldots,[\alpha_n,\beta_n]\}$, in $(R,\mathfrak{T})$. Dann gibt es für alle $i, 1\leqslant i\leqslant n-1$, ein $q_i\in R$, so daß

$$\{f(\beta_i),f(\alpha_{i+1})\}\subseteq E(q_i)$$

ist.

Bew.: Nach (B_0) und (U) muß nämlich für jedes derartige i

$$D_i:=E(f(\beta_i))\cap E(f(\alpha_{i+1}))\neq\emptyset$$

sein. Wählt man nun ein $q_i\in D_i$, so folgt unsere Behauptung.

Q. E. D.

Dieses Ergebnis zeigt, daß die Randpunkte $f(\beta_i)$ und $f(\alpha_{i+1})$ der Bogen, aus welchen sich der v-Bogen B zusammensetzt, auch im Sinne der Metrik d nicht weit voneinander entfernt sein können. Das hat unter anderem zur Folge, daß verschiedene Punktmengen von vornherein als v-Bogen ausgeschieden werden können. Z. B. kann $\{p,q\}$, falls $d(p,q)>2$ ist, nicht v-Bogen in $(R,\mathfrak{T})$ sein, wenn $\mathfrak{T}\in\mathscr{G}_d(R)$ ist. (Vgl. dagegen Nr. 2 in den Anmerkungen zu Definition 5.)

6. *Die Einführung einer geodätischen Metrik in metrischen Räumen mit einer Elementarlänge.* In erster Linie kommt es jetzt darauf an, einen Längenbegriff für v-Bogen einzuführen. Auf dieser Grundlage kann dann eine geodätische Metrik konstruiert werden, wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden. Es liegt nun nahe, zu versuchen, diesen Längenbegriff auf dem üblichen Begriff der Bogenlänge aufzubauen. Das führt aber nicht zum Ziel, wenn man nicht vorher den Begriff der Bogenlänge in geeigneter Weise erweitert. Daß dies tatsächlich notwendig ist, erkennt man leicht

an Hand eines Beispieles. Es sei $(\mathbb{R}^n, d_2)$ der Raum aus Beispiel 2, jetzt mit der gewöhnlichen euklidischen Topologie $\mathfrak{O}^n$ versehen, und C ein nicht-ausgearteter Bogen aus $(R^n, \mathfrak{O}^n)$. Dann ist die Länge $\mathscr{L}(C) = \infty$. Es gibt also überhaupt keine nicht-trivialen rektifizierbaren Bogen. Wir sind daher gezwungen, den Begriff der Bogenlänge unserer speziellen Problemstellung anzupassen, d. h. zu diskretisieren. Dabei verlangen wir, daß diese diskretisierte Bogenlänge erstens eine möglichst einfache Struktur besitzt und eindeutig bestimmt ist, zweitens mit der gegebenen Metrik in engem Zusammenhang steht und drittens ein Maß darstellt. Diese Forderungen führen uns zu

Definition 7.

Gegeben sei (R,d) mit $d \in \mathscr{E}(R)$ und eine nicht leere Teilmenge M von R.

1) $\mathfrak{K} := \{E(p_i)\}_{i \in I}$ heißt genau dann eine *Elementarkugelüberdeckung von* M, wenn die Indexmenge endlich ist und

$$M \subseteq \bigcup_{i \in I} E(p_i)$$

gilt. Man beachte dabei, daß die p_i nicht notwendig in M liegen müssen.

$K(M)$ sei die *Menge aller Elementarkugelüberdeckungen von* M.

2)
$$l(M) := \begin{cases} \infty, & \text{wenn } K(M) = \emptyset \\ \min\limits_{\mathfrak{K} \in K(M)} |\mathfrak{K}|, & \text{wenn } K(M) \neq \emptyset \end{cases}$$

heiße die *Länge von* M.

Anmerkungen zu Definition 7. 1) Zu diesem ganzen Problemkreis, mit dem wir uns hier nicht weiter befassen, verweisen wir auf die Arbeit [2]. Danach hätten wir allerdings strenggenommen $2\,l(M)$ als Diskretisierung einführen müssen. Nur der größeren Einfachheit halber haben wir uns entschlossen, in Definition 7 den Faktor 2 wegzulassen.

2) Man beachte, daß die Länge $l(M)$ einer Menge M unabhängig davon ist, mit welcher Topologie (R,d) versehen ist.

Nun kommen wir zu

Satz 2.

Es sei $(R,d,\mathfrak{T})$ *gegeben. Ist* B *ein v-Bogen in* R, *dann ist* $l(B) < \infty$.

Bew.: Nach (U) gibt es zu jedem $p \in R$ eine offene Menge $O_p \in \mathfrak{T}$ mit

$$p \in O_p \subseteq E(p).$$

Daraus folgt

$$B \subseteq \bigcup_{p \in B} O_p$$

und, da B ein v-Bogen ist, nach Lemma 3 die Existenz von endlich vielen Punkten $p_1, \ldots, p_n$ auf B, so daß

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{p_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E(p_i)$$

ist. Sicher ist daher, daß $K(B) \neq \emptyset$ ist, woraus die Behauptung folgt. Q. E. D.

Es soll hier ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß für die „Rektifizierbarkeit" der v-Bogen in $(R,d,\mathfrak{T})$ die Voraussetzung von (U) entscheidend war.

Für den in Definition 7 eingeführten Längenbegriff gelten folgende einfache Beziehungen.

Lemma 8.

Es sei (R,d), $d \in \mathscr{E}(R)$ *und* $A, B \subseteq R$.

1) *Ist* $l(A) < \infty$, *so gibt es* $l(A)$ *Punkte* $q_1, \ldots, q_{l(A)}$ *in* R, *so daß*

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{l(A)} E(q_j)$$

ist.

2) *Aus* $A \subseteq B$ *folgt* $l(A) \leqslant l(B)$.

3) $l(A \cup B) \leqslant l(A) + l(B)$.

Bew.: Zu 1). Unmittelbare Folge von Definition 7.

Zu 2). Im Fall $l(B) = \infty$ ist nichts zu zeigen. Nun sei $l(B) =: m$. Dann folgt nach 1)

$$\exists\, q_1, \ldots, q_m \in R\colon A \subseteq B \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} E(q_i).$$

Somit ist $K(A) \neq \emptyset$ und $l(A) \leqslant m = l(B)$.

Zu 3). Falls $l(A)$ oder $l(B)$ unendlich ist, folgt die Ungleichung trivialerweise. Nun sei $l(A) =: m \in \mathbb{N}$ und $l(B) =: n \in \mathbb{N}$. Nach 1) gibt es dann Punkte $p_1, \ldots, p_m$ und $q_1, \ldots, q_n$ aus R mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} E(p_i) \quad \text{und} \quad B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} E(q_j).$$

Wegen

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} E(p_i) \cup \bigcup_{j=1}^{n} E(q_j)$$

ist $l(A \cup B)$ endlich und $l(A \cup B) \leqslant m + n = l(A) + l(B)$. Q. E. D.

Definition 8.

Gegeben sei $(R,d,\mathfrak{T})$, wobei jetzt $(R,\mathfrak{T})$ B-zusammenhängend sein soll.

Dann heißt

$$g_{\mathfrak{T}}\colon\ R\times R\to\mathbb{R};\ g_{\mathfrak{T}}(p,q):=\begin{cases}0, & \text{wenn } p=q\\ \min\limits_{B\in Z_{\mathfrak{T}}(p,q)} l(B), & \text{wenn } p\neq q\end{cases}$$

die *geodätische Metrik in* $(R,d,\mathfrak{T})$ und $g_{\mathfrak{T}}(p,q)$ die *geodätische Distanz von* p *und* q *bzgl.* $\mathfrak{T}$.

Daß $g_{\mathfrak{T}}$ tatsächlich eine Metrik ist, werden wir in Satz 3 beweisen. Man beachte, daß $g_{\mathfrak{T}}$ auch wesentlich von der Topologie $\mathfrak{T}$ abhängig ist, weil die Topologie bestimmt, welche Mengen v-Bogen sind.

Lemma 9.

Es sei $(R,d,\mathfrak{T})$ *gegeben und* $(R,\mathfrak{T})$ *B-zusammenhängend. Dann gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten* p,q *aus* R *immer einen* v*-Bogen* $B\in Z_{\mathfrak{T}}(p,q)$ *mit*

$$g_{\mathfrak{T}}(p,q)=l(B).$$

Dieses Lemma ist eine evidente Folge der Definition 8.

Nun zeigen wir

Satz 3.

Es sei $(R,d,\mathfrak{T})$ *gegeben und* $(R,\mathfrak{T})$ *B-zusammenhängend. Dann ist*

$$g_{\mathfrak{T}}\in\mathscr{E}(R).$$

Bew.: Es bleibt im wesentlichen zu zeigen, daß die Dreiecksungleichung erfüllt ist. O. B. d. A. wollen wir annehmen, daß p, q und r drei paarweise verschiedene Punkte aus R darstellen. Nach Lemma 9 gibt es dann zwei v-Bogen $B\in Z_{\mathfrak{T}}(p,r)$ und $C\in Z_{\mathfrak{T}}(r,q)$ mit

$$l(B)=g_{\mathfrak{T}}(p,r)\ \text{ und }\ l(C)=g_{\mathfrak{T}}(r,q)$$

und weiter nach Satz 1 einen v-Bogen $M\subseteq B\cup C$ mit

$$M\in Z_{\mathfrak{T}}(p,q).$$

Aus der Abschätzung

$$l(M)\leqslant l(B\cup C)\leqslant l(B)+l(C)=g_{\mathfrak{T}}(p,r)+g_{\mathfrak{T}}(r,q)$$

erhält man jetzt die Dreiecksungleichung

$$g_{\mathfrak{T}}(p,q)\leqslant l(M)\leqslant g_{\mathfrak{T}}(p,r)+g_{\mathfrak{T}}(r,q).$$

Q. E. D.

Satz 4.

Es sei $(R,d,\mathfrak{T}')$ *und* $(R,d,\mathfrak{T}'')$ *gegeben, und* $(R,\mathfrak{T}'')$ *sei B-zusammenhängend. Ist* $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}''$, *so gilt für alle* $p,q \in R$

$$g_{\mathfrak{T}'}(p,q) \leqslant g_{\mathfrak{T}''}(p,q).$$

Bew.: Zunächst ist nach Lemma 6 $(R,\mathfrak{T}')$ ebenfalls B-zusammenhängend und somit $g_{\mathfrak{T}'}$ definiert. Aus Lemma 4 folgt dann unsere Behauptung. Q. E. D.

Definition 9.

Gegeben sei $(R,d,\mathfrak{T})$ und $B \in Z_{\mathfrak{T}}(p,q)$.

Der v-Bogen B heißt genau dann ein *geodätischer v-Bogen zwischen den Punkten p und q*, wenn

$$g_{\mathfrak{T}}(p,q) = l(B).$$

Falls $g_{\mathfrak{T}}(p,q)$ endlich ist, existiert nach Lemma 9 ein geodätischer v-Bogen zwischen p und q.

7. *Schlußbemerkungen.* Wir wollen hier auf einige Probleme und Tatsachen hinweisen, die sich im Anschluß an unsere Betrachtungen, vor allem im letzten Abschnitt, ergeben. (R,d) sei dabei ein fester metrischer Raum mit einer Elementarlänge.

1) Läßt sich unter den verschiedenen möglichen geodätischen Metriken $g_{\mathfrak{T}}$, falls solche überhaupt existieren, eine besonders auszeichnen? Eine erste Schwierigkeit, die sich bei der Untersuchung dieser Frage ergibt, stellt die komplizierte Struktur von $\mathscr{G}_d(R)$ dar. Eine so einfache Auszeichnung einer Topologie aus $\mathscr{G}_d(R)$ wie etwa im Falle der Topologien aus $\mathscr{V}_d(R)$ scheint hier nicht möglich, weil

$$\mathfrak{G}_d := \bigcap_{\mathfrak{T} \in \mathscr{G}_d(R)} \mathfrak{T}$$

nicht Element von $\mathscr{G}_d(R)$ sein wird. Falls aber $\mathfrak{G}_d \in \mathscr{G}_d(R)$ und $(R,\mathfrak{G}_d)$ B-zusammenhängend ist, liegt in

$$g_d := g_{\mathfrak{G}_d}$$

eine ausgezeichnete geodätische Metrik vor. Für alle $p,q \in R$ und alle anderen geodätischen Metriken $g_{\mathfrak{T}}$ gilt dann

$$g_d(p,q) \leqslant g_{\mathfrak{T}}(p,q).$$

2) Es sei $\mathscr{G}_d^*(R)$ die Menge aller Topologien $\mathfrak{T}$ aus $\mathscr{G}_d(R)$, für welche $(R,\mathfrak{T})$ B-zusammenhängend ist. Falls $\mathscr{G}_d^*(R) \neq \emptyset$ ist, kann man definieren

$$\forall p,q \in R\colon g_d^*(p,q) := \min_{\mathfrak{T} \in \mathscr{G}_d^*(R)} g_{\mathfrak{T}}$$

und die Frage stellen, unter welchen Bedingungen g_d^* eine Metrik auf R darstellt. I. a. wird nämlich g_d^* keine Metrik auf R sein, weil man nicht damit rechnen kann, daß die Dreiecksungleichung für g_d^* erfüllt ist.

3) Interessant scheint auch die folgende schwierige Frage zu sein. Es sei $\mathcal{G}_d^*(R) \neq \emptyset$; jedem $\mathfrak{T} \in \mathcal{G}_d^*(R)$ entspricht dann eine geodätische Metrik $g_{\mathfrak{T}}$ auf R. Wir nennen jetzt zwei Topologien $\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'' \in \mathcal{G}_d^*(R)$ genau dann äquivalent, wenn

$$\forall p, q \in R\colon\ g_{\mathfrak{T}'}(p,q) = g_{\mathfrak{T}''}(p,q)$$

ist. Diese Äquivalenzrelation induziert in bekannter Weise eine Klasseneinteilung von $\mathcal{G}_d^*(R)$. Nun kann man fragen, wie sich diese Klassen beschreiben lassen, welche Eigenschaften zwei Topologien derselben Klasse gemeinsam haben müssen und wann zwei Topologien aus $\mathcal{G}_d^*(R)$ dieselbe geodätische Metrik auf R erzeugen. Diese letzte Frage kann man auch so stellen: Sei g eine geodätische Metrik auf R; inwieweit läßt sich eine Topologie $\mathfrak{T}$ festlegen, für die

$$g = g_{\mathfrak{T}}$$

ist?

4) Ist $\mathfrak{T} \in \mathcal{G}_d(R)$, so kann man $(R, \mathfrak{T})$ „im Großen" als Hausdorffsch auffassen. Wenn nämlich $d(p,q) \geq 3$ ist, gilt

$$E(p) \cap E(q) = 0\,.$$

Somit gibt es, unter Berücksichtigung von (U), für solche Punkte disjunkte Umgebungen.

5) Es sei $\mathfrak{T} \in \mathcal{G}_d(R)$. Da es nach Satz 2 keine „nicht-rektifizierbaren" v-Bogen in $(R, \mathfrak{T})$ gibt, besteht im Raum $(R, d, \mathfrak{T})$ kein Unterschied zwischen den Begriffen „v-bogenverknüpft" und „finit-v-bogenverknüpft".

6) Wieder sei $\mathfrak{T} \in \mathcal{G}_d(R)$. Ist $Z_{\mathfrak{T}}(p,q) \neq 0$, so gibt es auch einen geodätischen v-Bogen, der p und q miteinander verbindet; d. h., zwei Punkte können entweder durch einen geodätischen v-Bogen verbunden werden oder es existiert überhaupt kein v-Bogen, der die beiden Punkte miteinander verbindet.

Literatur

[1] Blumenthal, L. M.: Theory and Applications of Distance Geometry. Oxford: Clarendon Press. 1953.

[2] Domiaty, R. Z.: Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Bogenlänge in metrischen Räumen. (Erscheint im Archiv d. Math.)

[3] Kreisel, E., D.-E. Liebscher, H.-J. Treder: Quantengeometrodynamik, S. 2, 24ff. (Schriftenreihe Inst. Math. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Reihe A, Heft 3.) Berlin: Akademie-Verlag. 1967.

[4] Rinow, W.: Die innere Geometrie der metrischen Räume. (Grundlehren der math. Wiss., Bd. 105.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer. 1961.

[5] Wheeler, J. A.: Einsteins Vision. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1968.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. R. Z. Domiaty
Lehrkanzel und Institut für Mathematik III
Technische Hochschule Graz
Kopernikusgasse 24
A-8010 Graz