Werk

Titel: Einführung des Wahrscheinlichkeitsoperators durch Postulate.

Autor: Beer, Susanne; Lukacs, Eugene

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0075|log38

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 75, 291—295 (1971)
© by Springer-Verlag 1971

Einführung des Wahrscheinlichkeitsoperators durch Postulate

Von

Susanne Beer, Wien, und **Eugene Lukacs***, Washington, D. C., USA

(*Eingegangen am 28. Juli 1970*)

1. Einleitung

Für den Beweis des zentralen Grenzwertsatzes verwendet man im allgemeinen die charakteristischen Funktionen, also die Fourier-Stieltjes-Transformierten von Verteilungsfunktionen. Diese Methode ist in vieler Hinsicht völlig angemessen, erfordert aber recht weitgehende Vorkenntnisse aus der Theorie der charakteristischen Funktionen, nämlich den Eindeutigkeits-, Konvolutions- und Stetigkeitssatz; die Beweise dieser drei Sätze sind bekanntlich recht mühsam.

Nun hat H. F. TROTTER [4] einen elementaren Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gegeben. Trotter ordnet jeder Verteilungsfunktion anstelle ihrer charakteristischen Funktion einen Operator zu. Seine Beweismethode ist im Prinzip dem ursprünglichen Beweis von LINDEBERG [3] ähnlich.

Es wird jeder Verteilungsfunktion $F(x)$ ein Operator A_F zugeordnet, der eine geeignet gewählte Menge von Funktionen f gemäß der Formel

$$A_F f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\, dF(y) \tag{1.1}$$

auf sich selbst abbildet. Die Operatoren A_F werden Wahrscheinlichkeitsoperatoren genannt.

Diese Methode hat bereits Eingang in verschiedene Lehrbücher gefunden, z. B. FELLER [1] und KRICKEBERG [2].

---

* Die Arbeit des zweitgenannten Verfassers wurde von der National Science Foundation unter Grant NSF-GP-22585 unterstützt.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeitsoperatoren durch einige einfache Eigenschaften vollständig bestimmt sind.

2. Die Postulate

Es sollen zunächst einige Bezeichnungen eingeführt werden. Die Funktion

$$\varepsilon_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < \xi \\ 1 & x \geq \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

ist eine Verteilungsfunktion und wird die ausgeartete Verteilung genannt.

Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Verteilungsfunktionen und ist

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, dG(y), \tag{2.2a}$$

so ist leicht einzusehen, daß $H(x)$ wieder eine Verteilungsfunktion ist; man schreibt

$$H = F * G \tag{2.2b}$$

und nennt H die Konvolution (Faltung) von F und G.

Aus (2.2a) folgt unmittelbar, daß $F * G = G * F$.

Es seien $F(x)$ und $F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, Verteilungsfunktionen; die Folge (F_n) heißt schwach konvergent gegen F, symbolisch $F_n \to F$, wenn $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ für alle Stetigkeitspunkte von $F(x)$.

Wir bezeichnen mit C die Menge der gleichmäßig stetigen, beschränkten, auf der reellen Achse definierten Funktionen. Es werde jeder Verteilungsfunktion $F(x)$ ein Operator A_F zugeordnet, der auf C definiert ist. Für den Beweis verschiedener Grenzwertsätze ist es oft zweckmäßig, den Definitionsbereich des Operators auf eine geeignet gewählte Teilmenge von C einzuschränken.

Wir zeigen nun folgenden

Satz: *Es sei jeder Verteilungsfunktion $F(x)$ ein Operator A_F zugeordnet, der folgende Eigenschaften habe:*

(I) $A_{\varepsilon_\xi} f(0) = f(\xi) \qquad (f \in C)$,

(II) $A_{\alpha F+\beta G} f(0) = \alpha A_F f(0) + \beta A_G f(0) \qquad (f \in C)$
F, G Verteilungsfunktionen, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta = 1$,

(III) *wenn $F_n \to F$, so gilt:* $\lim_{n\to\infty} A_{F_n} f(0) = A_F f(0) \qquad (f \in C)$,

(IV) $A_{F * \varepsilon_\xi} f(0) = A_F A_{\varepsilon_\xi} f(0) \qquad (f \in C)$;

dann hat A_F die Gestalt

$$A_F f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\, dF(y),$$

so daß der Wahrscheinlichkeitsoperator durch die Postulate (I) *bis* (IV) *bestimmt ist.*

Bemerkung: Die Voraussetzung (I) besagt, daß der zur ausgearteten Verteilung ε_ξ gehörige Operator den Wert $f(0)$ einer Funktion in den Wert $f(\xi)$ überführt, so daß die Wirkung des Operators A_{ε_ξ} in einer Translation des Nullpunktes um ξ besteht. (II) besagt, daß die Abbildung der konvexen Menge der Verteilungsfunktionen auf die Operatoren linear ist, (III) ist eine Stetigkeitsvoraussetzung und (IV) ist eine Annahme über die Operatoren, die speziell Faltungen zugeordnet sind.

3. Beweis

Als ersten Schritt zeigen wir, daß

$$A_F f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dF(y) \qquad (f \in C) \tag{3.1}$$

für eine beliebige Verteilungsfunktion $F(x)$.

Sei zunächst $F(x)$ eine Verteilungsfunktion, deren Träger ein endliches Intervall ist, d. h. $F(a) = 0, F(b) = 1$ $(-\infty < a < b < \infty)$. Wir betrachten eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit den Zwischenpunkten

$\xi_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$ und bilden die Differenzen

$$p_i = F(\xi_i) - F(\xi_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Setzen wir

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \varepsilon_{\xi_i}(x),$$

so ist $F_n(x)$ eine Verteilungsfunktion, und es folgt aus (I) und (II)

$$A_{F_n} f(0) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(\xi_i)$$

oder

$$A_{F_n} f(0) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})]. \tag{3.2}$$

Da $f(x)$ beschränkt und stetig ist und $F(x)$ eine Verteilungsfunktion ist, existiert das Integral $\int_a^b f(y)\,dF(y)$, und die rechte Seite von (3.2) ist daher eine zum Integral $\int_a^b f(y)\,dF(y)$ gehörige Darboux'sche Summe. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} A_{F_n} f(0) = \int_a^b f(y)\,dF(y).$$

Da $F_n \to F$, so folgt nach (III)

$$A_F f(0) = \int_a^b f(y)\,dF(y), \tag{3.3}$$

und die Behauptung (3.1) ist somit für Verteilungsfunktionen mit endlichem Träger gezeigt.

Sei nun $F(x)$ eine Verteilungsfunktion, deren Träger die Halbgerade $(-\infty, b]$ ist, so daß $0 < F(x) < 1$ für $x < b$ und $F(x) = 1$ für $x \geq b$ ist. Wir bilden die Folge von Verteilungsfunktionen

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(-n)}{1 - F(-n)} & x \geq -n \\ 0 & x < -n. \end{cases}$$

Man sieht unmittelbar, daß $F_n \to F$; daher folgt aus (III), daß $\lim_{n\to\infty} A_{F_n} f(0) = A_F f(0)$. Nun ist nach (3.3)

$$A_{F_n} f(0) = \int_{-n}^b f(y)\,dF_n(x) = \int_{-n}^b f(y)\,\frac{dF(y)}{1-F(-n)}.$$

Also

$$A_F f(0) = \lim_{n\to\infty} A_{F_n} f(0) = \int_{-\infty}^b f(y)\,dF(y). \tag{3.4}$$

In analoger Weise kann man mit Hilfe von (3.4) zeigen, daß (3.1) für Verteilungsfunktionen gilt, deren Träger die ganze Achse ist. Wir haben damit bewiesen, daß die Behauptung des Satzes für den Punkt $x = 0$ gilt; daß die Aussage für einen beliebigen Punkt x gilt, zeigen wir nun mit Hilfe der Voraussetzungen (I) und (IV).

$$A_F f(\xi) = A_F A_{\varepsilon_\xi} f(0) = A_{F * \varepsilon_\xi} f(0). \tag{3.5}$$

Nun ist

$$F * \varepsilon_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\,d\varepsilon_\xi(y) = F(x-\xi). \tag{3.6}$$

Setzt man (3.6) in (3.5) ein, so erhält man

$$A_F f(\xi) = A_{F(x-\xi)} f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dF(y-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+\xi)\, dF(y),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Bemerkung: Aus dem Beweis geht hervor, daß man das Postulat IV über die Konvolution vermeiden kann, wenn man die ersten drei Postulate dahingehend ändert, daß man den Punkt $x = 0$ durch einen beliebigen Punkt x ersetzt. Somit folgt auch aus den Voraussetzungen

(Ia) $A_{e_\xi} f(x) = f(x+\xi) \qquad (f \in C)$

(IIa) $A_{\alpha F+\beta G} f(x) = \alpha A_F(x) + \beta A_G f(x) \qquad (f \in C)$

(IIIa) Wenn $F_n \to F$, so gilt: $\lim_{n\to\infty} A_{F_n} f(x) = A_F f(x) \qquad (f \in C)$,

daß A_F der zur Verteilungsfunktion $F(x)$ gehörige Wahrscheinlichkeitsoperator ist.

Literatur

[1] Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, Vol. II. New York: J. Wiley. 1966.

[2] Krickeberg, K.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Stuttgart: Teubner. 1963.

[3] Lindeberg, J. W.: Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **15**, 211–225 (1922).

[4] Trotter, H. F.: An elementary proof of the central limit theorem. Arch. Math. **10**, 226–234 (1959).

Anschrift der Verfasser:
Dr. Susanne Beer
II. Institut für Mathematik
Technische Hochschule Wien
Karlsplatz 13
1040 Wien

Professor Eugene Lukacs
3727 Van Ness St., N. W.
Washington, D. C., USA