Werk

Titel: Über elliptische Fixpunkte symplektischer Matrizen.

Autor: Christian, Ulrich

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0072|log33

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Monatshefte für Mathematik 72, 289—295 (1968)

Über elliptische Fixpunkte symplektischer Matrizen

Von

Ulrich Christian, Göttingen

(Eingegangen am 11. Dezember 1967)

1. Es sei

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $n \times n$ Null — bzw. Einheitsmatrizen 0, E und M eine reelle symplektische $2n \times 2n$ Matrix, d. h., M genügt der Gleichung

$$M'IM = I, \tag{2}$$

wobei M' das Transponierte von M bedeutet. Ist

$$f(M, x) = \mathrm{Det}(xE - M) \tag{3}$$

das charakteristische Polynom von M, so gilt nach [1, (13)] die Identität

$$f(M, x) = x^{2n} f(M, \frac{1}{x}). \tag{4}$$

Bezeichnet ferner α einen Eigenwert von M, so sei α genau eine $v(\alpha)$-fache Wurzel von $f(M, x)$.

Es bezeichne $\mathfrak{Z}(n)$ die Siegelsche obere Halbebene n-ten Grades, bestehend aus allen komplexen symmetrischen $n \times n$ Matrizen $Z = X + iY$ mit positivem Imaginärteil Y. Setzt man

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit $n \times n$ Matrizen A, B, C, D, so wird durch

$$M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{6}$$

eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{Z}(n)$ auf sich definiert. Z heißt ein elliptischer Fixpunkt von M, wenn

$$M\langle Z\rangle = Z \tag{7}$$

gilt. Nunmehr beweisen wir den folgenden

Satz: *Dann und nur dann besitzt M einen elliptischen Fixpunkt, wenn alle Eigenwerte α den Betrag 1 haben und wenn darüberhinaus*

$$\operatorname{Rang}(M - \alpha E) = 2n - v(\alpha) \tag{8}$$

gilt.

2. **Beweis:** Man ordne der $n \times n$ Matrix $Z = X + iY$ die $2n \times 2n$ Matrix

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -X & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -X \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{9}$$

zu. Nach *C. L. Siegel* [3, Lemma 6] wird dadurch die verallgemeinerte obere Halbebene $\mathfrak{Z}(n)$ umkehrbar eindeutig auf den Raum $\mathfrak{S}(n)$ der reellen symmetrischen positiven symplektischen $2n \times 2n$ Matrizen S abgebildet und die Fixpunktgleichung (7) geht in

$$M'SM = S \tag{10}$$

über. Gilt

$$M = R^{-1}NR$$

mit reellen symplektischen Matrizen R, N, so ist (10) äquivalent zu

$$N'(R'^{-1}SR^{-1})\,N = R'^{-1}SR^{-1},$$

und aus $S \in \mathfrak{S}(n)$ folgt $R'^{-1}SR^{-1} \in \mathfrak{S}(n)$. Mit M hat also auch N einen Fixpunkt. Wir können daher für die weiteren Untersuchungen annehmen, daß M im Sinne von [1] reduziert ist.

Wie in [1] setzen wir wieder

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \{M_1, \ldots, M_r\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_r \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r \end{pmatrix}$$

und

$$M_\varrho = \begin{pmatrix} A_\varrho & B_\varrho \\ C_\varrho & D_\varrho \end{pmatrix} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Nun gelte $M = \{M_1, M_2\}$ und die charakteristischen Gleichungen $f(M_1, x)$, $f(M_2, x)$ seien zueinander teilerfremd. Ist dann α eine Wurzel von $f(M_1, x)$ und β eine Wurzel von $f(M_2, x)$, so folgt wegen (4)

$$\alpha, \alpha^{-1} \neq \beta, \beta^{-1}.$$

Durch eine elementare Rechnung unter Benutzung der in [1] angegebenen Reduktionstheorie schließen wir daher aus (10), daß S in der Gestalt $S = \{S_1, S_2\}$ zerfällt und

$$M_\nu' S_\nu M_\nu = S_\nu \qquad (\nu = 1, 2)$$

ist. Mithin hat M genau dann einen elliptischen Fixpunkt, wenn M_1, M_2 beide für sich einen Fixpunkt besitzen. Weiterhin können wir also annehmen, daß einer der drei Fälle

$$f(M, x) = q^r(x), \tag{11}$$

$$f(M, x) = p^\delta(x), \tag{12}$$

$$f(M, x) = (x \pm 1)^{2m} \tag{13}$$

gilt, wobei $q(x)$ und $p(x)$ wie in [1, § 1] erklärt sind.

3. Im Falle (11) können wir vermöge [1, Lemma 3] stets

$$M = \begin{pmatrix} T' & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}$$

annehmen. Die Gleichung (7) geht in

$$T'ZT = Z \tag{14}$$

über. Wendet man hierauf das in [1, § 3] Gesagte an, so folgt leicht $Z = 0$, d. h., $Z \notin \mathfrak{Z}(n)$. Also hat M keinen Fixpunkt. Eine symplektische Matrix kann also höchstens dann einen Fixpunkt haben, wenn die Eigenwerte vom Betrag 1 sind.

4. Jetzt kommen wir zum Fall (12). Das Polynom $p(x)$ hat dann wegen [1, (23)] die beiden konjugiert komplexen Nullstellen α, $\bar{\alpha}$. Es gelte etwa $M = \{M_1, \ldots, M_t\}$, wobei die Kästchen $M_1, \ldots, M_t$ im Sinne von [1, § 4] unzerlegbar sind. In [1, (154)] schreiben wir R statt Z, behalten im übrigen die Bezeichnung [1] bei und bilden entsprechend [1, (157)] die $h_\tau \times h_\tau$ Matrizen

$$L_\tau = \frac{1}{1+i} \begin{pmatrix} R'_\tau & -iy_\tau R'_\tau H_\tau \\ y_\tau^{-1} R_\tau^{-1} H_\tau & iR_\tau^{-1} \end{pmatrix} \quad (\tau = 1, \ldots, t), \tag{15}$$

sowie

$$L = \{L_1, \ldots, L_t\}. \tag{16}$$

Ist wieder $J(\mu)$ die $\mu \times \mu$ Matrix

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

ferner

$$Q = \begin{pmatrix} J(h_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(h_t) \end{pmatrix} \tag{18}$$

und

$$P = \begin{pmatrix} \alpha Q' & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} Q^{-1} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

so können wir nach [1, § 4]

$$M = L^{-1} PL \tag{20}$$

wählen.

Wir setzen

$$T = L'^{-1} SL^{-1} \tag{21}$$

und erhalten

$$P' TP = T. \tag{22}$$

Setzt man noch

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & F \\ F' & T_2 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\alpha^2 QT_1Q' = T_1,\ \bar{\alpha}^2 Q'^{-1} T_2 Q^{-1} = T_2,$$

wegen $\alpha^2 \neq 1$ also $T_1 = T_2 = 0$, d. h.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F' & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

mit

$$QF = FQ. \tag{24}$$

Vermöge (21) muß T symplektisch sein, was mit

$$F^2 = -E \tag{25}$$

gleichbedeutend ist. Ferner bezeichnet $S = L' TL$ eine reelle Matrix, d. h.

$$L' TL = \overline{L}' \overline{T} \overline{L}$$

oder

$$T = (\overline{L} L^{-1})'\ T(\overline{L} L^{-1}). \tag{26}$$

In [2, Seite 10] wurde $\overline{L} L^{-1}$ berechnet, und es gilt

$$\overline{L} L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & V \\ -V'^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_t \end{pmatrix}, \tag{27}$$

wobei die $V_1, \ldots, V_t$ zu den Kästchen $M_1, \ldots, M_t$ gehören und durch [1, (129), (131)] erklärt sind. Die Bedingung (26) ist mit

$$\overline{F}' V = - VF$$

und dieses wegen [1, (129)] mit

$$\overline{F}' V = \overline{V}' F \tag{28}$$

gleichbedeutend.

Schließlich muß $S > 0$ gelten, d. h. $x'Sx > 0$ sein für alle reellen Spalten $x \neq 0$. Eine elementare Rechnung zeigt, daß dieses genau dann eintritt, wenn die hermitische Matrix $\overline{F}' V$ positiv, also

$$\overline{V}' F > 0 \tag{29}$$

ist. Genau dann hat also M einen elliptischen Fixpunkt, wenn es eine komplexe Matrix F gibt, welche den Bedingungen (24), (25), (28), (29) genügt.

Man setze $F = (F_{\varkappa\varkappa})$ mit $h_\iota \times h_\varkappa$ Matrizen $F_{\varkappa\varkappa}$; ferner sei $F_{\iota\iota} = F_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, t)$. Aus (24) schließen wir

$$J(h_\iota) F_\iota = F_\iota J(h_\iota) \qquad (\iota = 1, \ldots, t). \tag{30}$$

Nun wähle man ein festes ι. Nach [1, (132)ff] ist F_ι von der Form

$$F_\iota = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_h \\ & f_1 & \cdots & \cdots & f_{h-1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f_1 \end{pmatrix}.$$

Aus [1, § 4] folgt weiter

$$\overline{V}_\iota' = \begin{pmatrix} & & & & v \\ & & & -v & \\ & & 0 & & \\ & & v & * & \\ & -v & & & \\ & \ddots & & & \\ \ddots & & & & \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\overline{V}_\iota' F_\iota = \begin{pmatrix} & & & & a \\ & & & -a & \\ & & 0 & & \\ & & & a & * \\ & & -a & & \\ & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Diese hermitische Matrix muß positiv sein. Eine einfache Rechnung zeigt, daß dieser Fall nur für $h_\iota = 1$ eintreten kann. Wenn also M einen Fixpunkt hat, so muß $h_1 = \ldots = h_t = 1$ sein. Das liefert die Bedingung (8).

Im Falle $h_1 = \ldots = h_t = 1$ haben die Bedingungen (24), (25), (28), (29) tatsächlich eine Lösung. Man wähle nämlich für F eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $f_\tau = i\varepsilon_\tau$, $\varepsilon_\tau = \pm 1$ $(\tau = 1, \ldots, t)$. Dann sind jedenfalls (24), (25) richtig. Nach [1, (153)] ist V eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen iv_τ $(\tau=1, \ldots, t)$ und reellen v_τ. Damit ist auch (28) erfüllt. Schließlich wähle man $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ so, daß $\varepsilon_1 v_1, \ldots, \varepsilon_t v_t > 0$ gilt, und (29) ist auch befriedigt.

5. Der Fall $\alpha = -1$ läßt sich auf $\alpha = 1$ zurückführen, indem man M durch $-M$ ersetzt. Sei also $\alpha = 1$. Jetzt gibt es eine reelle nicht notwendig symplektische Matrix K mit

$$K^{-1} MK = R = \begin{pmatrix} J(h_1) & & & & \\ & \cdot & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & J(h_t) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Wir definieren $T = K'SK > 0$ und erhalten

$$R'TR = T.$$

Es sei $T = (T_{\varkappa\lambda})$ mit $h_\varkappa \times h_\lambda$ Matrizen $T_{\varkappa\lambda}$ und $T_{\mu\mu} = T_\iota$ $(\iota=1, \ldots, t)$. Für ein festes ι gilt dann

$$J(h_\iota)\, T_\iota\, J(h_\iota) = T_\iota, \tag{33}$$

gemäß [1, (114)ff] also

$$T_t = \begin{pmatrix} & & & & a \\ & & & -a & \\ & & 0 & & \\ & & a & & * \\ & -a & & & \\ & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix muß positiv sein, was nur für $h_t = 1$ eintritt. Also $h_1 = \ldots = h_t = 1$, d. h. $M = E$. Andererseits hat $M = E$ einen Fixpunkt. Unser Satz ist bewiesen.

Literatur

[1] *Christian, U.:* A reduction theory for symplectic matrices. Math. Z. **101**, 213—244 (1967).

[2] *Christian, U.:* Über gewisse Gleichungen zwischen symplektischen Matrizen. Erscheint im J. reine angew. Math.

[3] *Siegel, C. L.:* Symplectic geometry. Gesammelte Abhandlungen, Band II, 274—359 (1966) und Amer. J. Math. **65**, 1—86 (1943).