Werk

Titel: Über die Zerlegung des Raumes in homothetische konvexe Körper.

Autor: Groemer, Helmut

Jahr: 1964

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0068|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Zerlegung des Raumes in homothetische konvexe Körper*

Von

Helmut Groemer, Corvallis, Ore., USA

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 10. Juli 1963)

Im Euklidischen n-dimensionalen Raum R^n sei M irgendeine beschränkte abgeschlossene Menge, die innere Punkte besitzt. $\{M_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ bedeute eine Zerlegung des R^n; d. h. es soll jeder Punkt des R^n, der kein Randpunkt eines M_i ist, in genau einem M_i liegen. M heiße ein *homothetischer Zerlegungskörper*, wenn eine Zerlegung $\{M_i\}$ des R^n existiert, bei der alle M_i zu M homothetisch sind. Zu jedem M_i soll es also ein $\lambda_i > 0$ geben, so daß M_i durch eine Translation in $\lambda_i M$ übergeführt werden kann. Dabei werde stets vorausgesetzt, daß die Menge aller vorkommenden λ_i eine positive untere und eine endliche obere Schranke besitzt; dadurch wird vor allem erreicht, daß sich die M_i nirgends häufen. Gibt es sogar eine Zerlegung $\{M_i\}$ des R^n, bei der alle M_i zu M translationsgleich sind, so heiße M ein *translativer Zerlegungskörper*. Jeder translative Zerlegungskörper ist demnach auch ein homothetischer Zerlegungskörper. Es soll hier für $n \leqq 4$ und konvexes M eine Umkehrung dieser Tatsache bewiesen werden, nämlich der folgende

Satz. *Jeder konvexe homothetische Zerlegungskörper des* R^n $(n \leqq 4)$ *ist ein translativer Zerlegungskörper.*

Die Voraussetzung $n \leqq 4$ ist vermutlich überflüssig. Die Annahme der Konvexität jedoch ist schon für $n = 2$ wesentlich. Abb. 1 gibt ein bemerkenswertes Beispiel dafür, das mir Herr *L. Danzer* mitteilte[1] und mit seiner Erlaubnis hier wiedergegeben wird.

---

* Die Durchführung dieser Arbeit wurde von der National Science Foundation finanziell unterstützt (Research Grant NSF-GP-261).

[1] Mündliche Mitteilung bei der Tagung für diskrete Geometrie in Oberwolfach, 23. bis 29. Juli 1962.

Man sieht unmittelbar ein, daß A und B zueinander homothetisch sind, daß man durch Translation von A alleine keine Zerlegung erhält und daß $A \cup B$ eine Zerlegung der Ebene ergibt ($a > 1$).

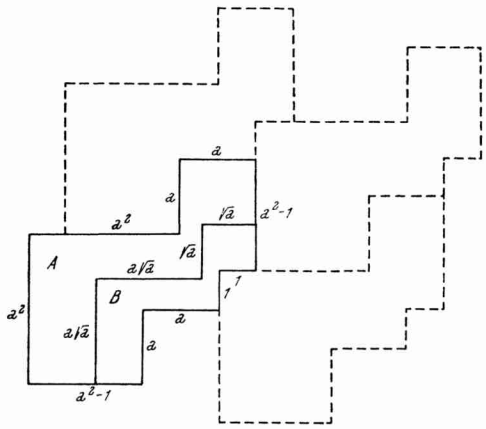

Abb. 1

Der Beweis des angeführten Satzes liefert das folgende etwas mehr sagende Resultat.

Dann und nur dann existiert eine Zerlegung des R^n ($n \leqq 4$) *in untereinander homothetische konvexe Körper, die nicht alle zueinander translationsgleich sind, wenn diese Körper Zylinder sind, die translative* (($n-1$)*-dimensionale*) *Zerlegungskörper als Basis haben.*

Durch schichtweises Anordnen solcher Zylinder erkennt man, daß diese einerseits translative Zerlegungspolyeder sind und andrerseits, wenn man Schichten verschiedener Höhe verwendet, auch Zerlegungen des R^n ergeben können, bei denen nicht alle Körper untereinander translationsgleich sind.

Es ist zunächst nötig einige Bezeichnungen einzuführen. Sind K und L zwei konvexe Körper (kompakte konvexe Mengen mit inneren Punkten), so bedeute $K \sim L$ die Homothetie, $K \simeq L$ die Translationsgleichheit von K und L. Anstatt von einer Hyperebene wird meist nur von einer Ebene geredet. Die ($m-1$)-dimensionalen Polyeder, welche ein m-dimensionales Polyeder begrenzen, heißen die Seitenflächen von P. Ist der Durchschnitt zweier Seitenflächen von P ($m-2$)-dimensional, so heiße er eine Kante von P.

Bedeutet X irgendeine Teilmenge des R^n, so sei $[X]$ die konvexe Hülle von X und $L(X)$ derjenige X enthaltende lineare Teilraum des R^n, welcher möglichst kleine Dimension hat. Wird von nun an von inneren Punkten, Randpunkten etc. von X gesprochen, so bezieht sich dies stets auf $L(X)$ als zugrunde liegenden Raum. (Man kann demnach z. B. im R^3 von den inneren Punkten einer Strecke sprechen.) $I(X)$ sei die Menge der inneren Punkte, $R(X)$ die Menge der Randpunkte von X. O bezeichne die leere Menge.

Nun werden drei einfache Hilfssätze bewiesen. Die Hilfssätze 1 und 3 beziehen sich auf zwei zentralsymmetrische konvexe Körper B_i $(i = 1, 2)$ mit $B_1 \sim B_2$. Bedeutet X_1 irgendeine Teilmenge von B_1, so werde stets $X_2 = \sigma X_1$ gesetzt, wenn σ diejenige Homothetie bezeichnet, für welche $B_2 = \sigma B_1$ ist. X_i^+ sei die zu X_i bezüglich des Mittelpunktes von B_i symmetrisch gelegene Menge.

Hilfssatz 1. *Im* R^m $(m \geqq 2)$ *seien* B_i $(i=1, 2)$ *zwei zentralsymmetrische m-dimensionale konvexe Polyeder mit* $B_1 \sim B_2$, $B_1 \cap B_2 \subset R(B_i)$. *Es existiere eine Ebene* U *und Seitenflächen* C_i *von* B_i *mit* $C_i \subset U$. *Hat* C_i *zwei zueinander parallele Seitenflächen* $N_i, \tilde{N}_i$ *für die* $N_1 \cap \tilde{N}_2$ *ein* $(m-2)$*-dimensionales Polyeder ist, so gibt es Seitenflächen* D_i, D_i^+ *von* B_i *mit*

$$N_i = C_i \cap D_i,\ \tilde{N}_i = C_i \cap D_i^+,\ N_i^+ = C_i^+ \cap D_i^+,\ \tilde{N}_i^+ = C_i^+ \cap D_i. \tag{1}$$

Beweis. Es gibt eine Ebene V, welche B_1 von B_2 separiert. Weil $N_1 \cap \tilde{N}_2$ $(m-2)$-dimensional ist, gilt dann

$$N_1 = V \cap C_1, \tag{2}$$

$$\tilde{N}_2 = V \cap C_2. \tag{3}$$

V ist Stützebene von B_1. W sei die zu V parallele Stützebene von B_1 $(W \neq V)$. Aus (3) und $B_1 \sim B_2$ folgt

$$\tilde{N}_1 = W \cap C_1. \tag{4}$$

Übt man auf V, W und C_1 die Reflexion bezüglich des Mittelpunkts von B_1 aus, so erhält man zu V, W parallele Ebenen V^+, W^+ und die Seitenfläche C_1^+. Da C_1^+ zwischen V und W liegt und $V^+ \cap C_1^+ \neq O$, $W^+ \cap C_1^+ \neq O$ ist, liegen auch V^+ und W^+ zwischen V und W. Weil der Abstand zwischen V und W derselbe ist, wie derjenige zwischen V^+ und W^+, muß $V^+ = W$, $W^+ = V$ sein. Daraus folgt unmittelbar

$$\tilde{N}_1^+ = V \cap C_1^+,\ N_1^+ = W \cap C_1^+. \tag{5}$$

Wird $D_1 = B_1 \cap V$, $D_1^+ = B_1 \cap W$ gesetzt, so ergeben sich aus (2), (4)

und (5) die Beziehungen (1) für $i = 1$; wegen $B_2 \sim B_1$ erhält man daraus dasselbe für $i = 2$.

Hilfssatz 2. *B sei ein zentralsymmetrisches m-dimensionales konvexes Polyeder, das zwei parallele Seitenflächen C, C^+ hat, die ihrerseits lauter paarweise parallele Seitenflächen besitzen. Gibt es zu jedem Paar N, $\tilde{N}$ solcher Seitenflächen von C ein Paar paralleler Seitenflächen D, D^+ von B, so daß*

$$N = C \cap D,\ \tilde{N} = C \cap D^+,\ N^+ = C^+ \cap D^+,\ \tilde{N}^+ = C^+ \cap D$$

gilt, so ist B die konvexe Hülle $[C, C^+]$ von C und C^+. Ist C zentralsymmetrisch, so ist B ein Zylinder.

Beweis. $[C, C^+]$ ist offenkundig der Durchschnitt von Halbräumen, deren begrenzende Ebenen entweder C, C^+ oder eines der D bzw. D^+ enthalten. Da C, C^+ und die D, D^+ Seitenflächen von B sind, enthält jeder solche Halbraum auch B. Daher ist $B \subset [C, C^+]$; wegen $C \subset B$, $C^+ \subset B$ hat man aber $[C, C^+] \subset B$. Also gilt $B = [C, C^+]$ und der Hilfssatz ist bewiesen. Sind C und C^+ zentralsymmetrisch, so ist $C \approx C^+$ und daher $[C, C^+]$ ein Zylinder.

Hilfssatz 3. *B_1 und B_2 seien zwei m-dimensionale zentralsymmetrische konvexe Polyeder mit $B_1 \sim B_2$. Es existiere je ein Paar paralleler Seitenflächen C_i, C_i^+ von B_i, für welche $B_i = [C_i, C_i^+]$ $(i = 1, 2)$ gilt. Ist entweder $L(C_1) \neq L(C_2)$ oder $L(C_1^+) \neq L(C_2^+)$ und gilt $I(B_1) \cap I(B_2) \neq O$, so ist mindestens eine der Beziehungen*

$$C_1 \cap I(B_2) \neq O,\ C_1^+ \cap I(B_2) \neq O,\ C_2 \cap I(B_1) \neq O,\ C_2^+ \cap I(B_1) \neq O$$

richtig.

Beweis. Man darf annehmen, daß etwa $L(C_2)$ zwischen $L(C_1)$ und $L(C_1^+)$ liegt $(L(C_2) \neq L(C_1),\ L(C_2) \neq L(C_1^+))$. Es soll gezeigt werden, daß dann $I(B_1) \cap I(B_2) = O$ ist, wenn $C_2 \cap I(B_1) = O$ gilt. Für $m = 1$ und $m = 2$ sind die B_i Strecken bzw. homothetische Parallelogramme und die Behauptung versteht sich von selbst. Ist $m \geqq 3$, so gibt es eine Ebene S, welche C_2 von B_1 separiert. Projiziert man B_1 und B_2 auf eine zweidimensionale Ebene, welche eine zu S und eine zu C_1 senkrechte Gerade enthält, so hat man für die Projektionen $P(B_i)$ von B_i dieselbe Situation vorliegen wie im zweidimensionalen Fall. Man bekommt $I(P(B_1)) \cap I(P(B_2)) = O$, woraus $I(B_1) \cap I(B_2) = O$ folgt.

Jetzt kann der angekündigte Satz bewiesen werden.

Beweis des Satzes. M ist ein n-dimensionaler konvexer Körper, $\{M_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Zerlegung des $R^n (n \leqq 4)$ in zu M homothetische M_i, die nicht alle untereinander translationsgleich sind. Für

den R^1 ist der Satz richtig. Es werde die Induktionsannahme gemacht, daß dies auch für den R^{n-1} zutreffe. Man hat nur zu zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen M ein Zylinder sein muß; denn die Tatsache, daß dann die Basis von M ein $(n-1)$-dimensionales translatives Zerlegungspolyeder ist, folgt sofort aus der Induktionsannahme, wenn man im R^n eine zu den Basen der M_i parallele Ebene E festlegt und bedenkt, daß für die Menge aller M_i, die nicht in einem gewissen durch E begrenzten Halbraum liegen, die $M_i \cap E$ mit $M_i \cap E \neq O$ eine Zerlegung von E, d. h. eines R^{n-1} ergeben.

Ist S_i irgendeine Teilmenge von M_i (z. B. eine Seitenfläche, Kante etc.) so werde stets S_j durch $S_j = \sigma S_i$ gesetzt, wenn σ die durch $M_j = \sigma M_i$ definierte Homothetie ist.

Weil $\{M_i\}$ eine Zerlegung des R^n in untereinander homothetische konvexe Körper ist, folgt, daß M ein zentralsymmetrisches Polyeder ist, dessen Seitenflächen ebenfalls zentralsymmetrisch sind (*Groemer* [1]). Es sei T die Vereinigungsmenge aller zu M_0 translationsgleichen M_i. Voraussetzungsgemäß ist $T \neq R^n$ und die M_i häufen sich nirgends. Es gibt daher ein gewisses M_i, etwa M_0, das eine Seitenfläche F_0 besitzt, die nicht vollständig von Körpern aus T überdeckt wird. Es sei $F = L(F_0)$ gesetzt. Im allgemeinen werden in F noch Seitenflächen anderer M_i liegen. Dafür kommen natürlich nur die F_i und die zu F_i parallelen Seitenflächen F_i' von M_i in Frage. Wird

$$H = \bigcup_{F_i \subset F} F_i \tag{6}$$

gesetzt, so sieht man ohne Schwierigkeit (vgl. *Groemer* [1], Hilfssatz 3), daß auch

$$H = \bigcup_{F_i \subset F} F_i' \tag{7}$$

gilt. Wegen $I(M_i) \cap I(M_j) = O$ ist außerdem für alle $F_i \subset F$, $F_j \subset F$, bzw. $F_i' \subset F$, $F_j' \subset F$

$$I(F_i) \cap I(F_j) = O, \; I(F_i') \cap I(F_j') = O \qquad (i \neq j). \tag{8}$$

Gemäß der Wahl von M_0 und F_0 gibt es ein $F_i' \subset H$, etwa F_1', das mit F_0 innere Punkte gemeinsam hat, für das jedoch M_1 nicht in T liegt. Man hat also

$$I(F_0) \cap I(F_1') \neq O, \tag{9}$$

$$F_0 \not\approx F_1'. \tag{10}$$

Wegen der Symmetrie von M_i und F_i ist

$$F_i \approx F_i'. \tag{11}$$

Für ein beliebiges $X_i \subset F_i$ sei X_i' stets durch $X_i' = \sigma X_i$ definiert, wobei σ diejenige Translation bedeutet, für welche $F_i' = \sigma F_i$ ist. Der obere Strich bei X_i' soll also nicht als eine Bezeichnung für eine Symmetrie bezüglich des Mittelpunkts von M_i sondern als ein Zeichen für eine Translation aufgefaßt werden. Die Seitenflächen von F_i seien mit $K_i^0, K_i^1, \ldots K_i^d$; $K_{i*}^0, K_{i*}^1, \ldots K_{i*}^d$ bezeichnet. K_i^s und K_{i*}^s sollen dabei parallel sein. Zu jeder Kante K_i^s von M_i gibt es also stets drei weitere zu K_i^s parallele Kanten, nämlich K_{i*}^s, $K_i^{s'}$, $K_{i*}^{s'}$.

Es werde zunächst vorausgesetzt, daß es zu jedem s mit $0 \leqq s \leqq d$ ein M_j gibt, so daß mindestens eine der vier Kanten K_j^s, K_{j*}^s, $K_j^{s'}$, $K_{j*}^{s'}$ von M_j einen Punkt besitzt, der im Innern von H liegt. Enthält für ein gewisses s und j K_j^s einen inneren Punkt von H, so muß wegen (6) und (8) ein K_{k*}^s existieren, für das $F_k \subset H$ gilt und $K_j^s \cap K_{k*}^s$ $(n-2)$-dimensional ist. Wegen Hilfssatz 1 gibt es dann zwei Seitenflächen G_j^s, $G_j^{s'}$ von M_j, für die

$$K_j^s = F_j \cap G_j^s,\ K_{j*}^s = F_j \cap G_j^{s'},\ K_j^{s'} = F_j' \cap G_j^s,\ K_{j*}^{s'} = F_j' \cap G_j^{s'}$$

ist (man hat $C_j = F_j$, $C_j^+ = F_j'$, $N_j = K_j^s$, $\tilde{N}_j = K_{j*}^s$, $N_j^+ = K_{j*}^{s'}$, $\tilde{N}_j^+ = K_j^{s'}$, $D_j = G_j^s$, $D_j^+ = G_j^{s'}$ zu setzen). Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn nicht K_j^s sondern eines der $K_j^{s'}$, K_{j*}^s oder $K_{j*}^{s'}$ einen inneren Punkt von H enthält. Wegen $M_j \sim M_i$ gilt dies nicht nur für das vorhin gewählte von s abhängige j sondern für alle $j = 0, 1, 2, \ldots$ und $s = 0, 1, \ldots d$. Aus Hilfssatz 2 erhält man daher die zu beweisende Behauptung, daß die M_i Zylinder sind.

Jetzt kann angenommen werden, daß es ein s, etwa $s = 0$, gibt, so daß für alle i mit $F_i \subset H$ die Kanten $K_i^0 = K_i$, $K_{i*}^0 = K_{i*}$ und für alle mit $F_i' \subset H$ die Kanten $K_i^{0'} = K_i'$, $K_{i*}^{0'} = K_{i*}'$ im Rande von H liegen. Es wird sich zeigen, daß dies unmöglich ist.

Bezeichnet man mit $\mathbf{M}$ die Menge aller $F_i \subset H$, für die es kein j mit $F_i = F_j'$ gibt und mit $\mathbf{M}'$ die Menge aller $F_i' \subset H$, für die es kein j mit $F_i' = F_j$ gibt, so ist jedenfalls

$$\mathbf{M} \cap \mathbf{M}' = O. \tag{12}$$

(6), (7), (10) ergeben

$$F_0 \subset \mathbf{M},\ F_1' \subset \mathbf{M}'. \tag{13}$$

Aus (6) und (7) erhält man, wenn $\overline{H}$ durch

$$H = \bigcup_{F_i \in \mathbf{M}} F_i \tag{14}$$

definiert wird, $\overline{H} \subset H$ und

$$\overline{H} = \bigcup_{F_i' \in \mathbf{M}'} F_i'. \tag{15}$$

Nach wie vor liegen die Seitenflächen K_i, K_{i*} aller $F_i \in \mathbf{M}$ im Rande von H; dasselbe gilt von den K_i', K_{i*}' aller $F_i' \in \mathbf{M}'$. Alles weitere spielt sich jetzt in dem höchstens dreidimensionalen Raum $F = L(H)$ ab. Die vorkommenden F_i und F_i' sind immer in $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{M}'$.

Ist F eindimensional, so sind die F_i, F_i' Strecken. Aus (9) und (10) ergibt sich, daß von den vier Endpunkten von F_0, F_1' mindestens einer im Innern von $F_0 \cup F_1'$ und daher im Innern von H liegt; es war aber vorausgesetzt, daß diese Punkte im Rande von H liegen.

Wenn F zweidimensional ist, so sei

$$C_0 = L(K_0),\ C_{0*} = L(K_{0*}) \tag{16}$$

gesetzt. C_0 und C_{0*} sind zueinander parallele Geraden. C_0 muß durch gewisse K_i, die zu einem F_i mit $F_i \in \mathbf{M}$ gehören, lückenlos ausgefüllt werden. Andernfalls gäbe es einen Endpunkt von einem $K_j \subset C_0$ ($F_j \in \mathbf{M}$), der nicht im Innern eines gewissen K_r'($F_r' \in \mathbf{M}'$) liegt, obwohl $I(K_j) \cap I(K_r') \neq O$ ist (man beachte dazu, daß jedes F_i von gewissen F_i', überdeckt wird, aber für alle u $K_i \cap I(F_u') = O$, $K_i' \cap I(F_u) = O$ ist, so daß jedes K_i von gewissen K_i' und jedes K_i' von gewissen K_i überdeckt wird). Es gäbe also ein l, für das K_j und K_l' einen bei der Homothetie $F_j \sim F_l'$ entsprechenden Endpunkt gemeinsam haben. Wäre $F_j \approx F_l'$, so ergäbe sich $F_j = F_l'$, was (12) widerspräche. Gälte $F_j \not\approx F_l'$, so muß, weil K_j und K_l' und daher auch $[K_j, K_{j*}]$ und $[K_l', K_{l*}]$ innere Punkte gemeinsam haben, nach Hilfssatz 3 eine der Kanten K_j, K_{j*}, K_l', K_{l*}' einen inneren Punkt von F_l' bzw. F_j enthalten. Da dies nicht möglich ist, wird also C_0 durch die K_i lückenlos ausgefüllt. Entsprechendes gilt natürlich auch für C_{0*} und die Geraden $C_1' = L(K_1')$, $C'_{1*} = L(K'_{1*})$ Wegen (10) kann nicht $C_0 = C_1'$, $C_{0*} = C'_{1*}$ sein. Auf Grund von (9) darf dann angenommen werden, daß etwa C_1' zwischen C_0 und C_{0*} liegt ($C_1' \neq C_0$, $C_1' \neq C_{0*}$). C_1' enthält dann innere Punkte von F_0. Da C_1' durch die K_i' lückenlos ausgefüllt wird, gäbe es daher ein K_i' mit $K_i' \cap I(F_0) \neq O$, was wieder unmöglich ist, da $K_i' \subset R(H)$ gelten soll.

Von nun an wird F als dreidimensional vorausgesetzt. Durch (16) werden dann zwei (zweidimensionale) Ebenen C_0, C_{0*} definiert. In C_0 und C_{0*} seien zwei Punktmengen J und J_* durch

$$J = \bigcup_{K_i \subset C_0} K_i,\ J_* = \bigcup_{K_{i*} \subset C_{0*}} K_{i*} \qquad (F_i \in \mathbf{M}) \tag{17}$$

erklärt. Aus (14) und (15) folgt dann

$$J = \bigcup_{K_i' \subset C_0} K_i', \; J_* = \bigcup_{K'_{i*} \subset C_{0*}} K'_{i*} \qquad (F_i' \in \mathbf{M}'). \tag{18}$$

Es ist stets

$$I(K_i) \cap I(K_j) = O, \; I(K_i') \cap I(K_j') = O, \tag{19}$$

denn wäre etwa $I(K_i) \cap I(K_j) \neq O$, so hätte man $I(F_i) \cap I(F_j) \neq O$ im Gegensatz zu (8).

Alle $K_i \subset J$ und alle $K_i' \subset J$ besitzen eine Seite L_i bzw. L_i' mit $L_i \subset R(J)$ und $L_i' \subset R(J)$ (L_i und L_j sowie L_i und L_j' sollen dabei bei der Homothetie $K_i \sim K_j$ bzw. $K_i \sim K_j'$ einander entsprechen). Träfe dies nicht zu, so ergäben die Hilfssätze 1 und 2 unmittelbar $F_i = [K_i, K_{i*}]$ und aus Hilfssatz 3, (9) und (10) ergäbe sich, daß eine der Beziehungen $K_0 \cap I(F_1') \neq O$, $K_{0*} \cap I(F_1') \neq O$, $K_1' \cap I(F_0) \neq O$, $K'_{1*} \cap I(F_0) \neq O$ richtig wäre, was unmöglich ist, da vorausgesetzt war, daß K_0, K_{0*}, K_1', K'_{1*} in $R(H)$ liegen. Gilt $K_j \subset J$, $K'_k \subset J$ und $I(K_j) \cap I(K'_k) \neq O$, so folgt mit Hilfe von Hilfssatz 3, wenn man bedenkt, daß unter dieser Voraussetzung $[K_j, K_{j*}]$ und $[K_k', K'_{k*}]$ innere Punkte gemeinsam haben, $F_j \approx F_k'$. Ist wieder $K_j \subset J$, $K_k' \subset J$, so können L_j und L_k' keinen (bei der Homothetie $F_j \sim F_k'$) entsprechenden Endpunkt gemeinsam haben. Es folgte sonst nach dem soeben Gesagten, weil offenkundig $I(K_j) \cap I(K_k') \neq O$ wäre, $F_j \approx F_k'$, woraus in diesem Falle auf $F_j = F_k'$ geschlossen werden könnte; dies widerspricht (12). Setzt man $Q_0 = L(L_0)$, so folgt daher unter Berücksichtigung von (17), (18) und $L_i \subset R(H)$, $L_i' \subset R(H)$, daß die Gerade Q_0 sowohl durch gewisse L_i wie auch durch gewisse L_i' lückenlos ausgefüllt wird. Dabei haben je zwei L_i und je zwei L_i' keine inneren Punkte gemeinsam. Die Menge aller F_i und F_j', für welche $L_i \subset Q_0$, $L_j' \subset Q_0$ gilt, besteht aus lauter untereinander translationsgleichen Körpern. Denn wäre etwa $F_r \not\approx F_s$, so könnte man annehmen, daß L_r und L_s in Q_0 benachbart sind. Nach dem vorhin Bewiesenen gäbe es ein L_t', das sowohl L_r wie auch L_s überlappt. Daraus folgte $I(K_r) \cap I(K_t') \neq O$, $I(K_s) \cap I(K_t') \neq O$ und dies ergäbe, wie schon bemerkt wurde, $K_r \approx K_t'$, $K_s \approx K_s'$ und daher $K_r \approx K_s$. $\tilde{Q}_0$ bedeute die in C_0 liegende zu Q_0 parallele Stützgerade von K_0. Für alle K_i und K_i' mit $L_i \subset Q_0$ bzw. $L_i' \subset Q_0$ sind die Stützmengen $\tilde{L}_i = \tilde{Q}_0 \cap K_i$ und $\tilde{L}_i' = \tilde{Q}_0 \cap K_i'$ untereinander translationsgleich. Jedes $\tilde{L}_i$ und $\tilde{L}_i'$ ist entweder ein Punkt oder eine Strecke. Die erste Möglichkeit kann jedoch ausgeschlossen werden. $\tilde{Q}_0$ enthielte in diesem Falle, da alle $L_i \subset Q_0$ und $L_i' \subset Q_0$ gleich lang sind, zwei Reihen äquidistanter Punkte,

nämlich die $\tilde{L}_i \subset Q_0$ und die $\tilde{L}' \subset \tilde{Q}_0$. Aus $\tilde{L}_j = \tilde{L}_k'$ folgte $F_j = F_k'$, was (12) widerspricht. Es gäbe daher in $I(K_0)$ Punkte, die in keinem K_i' mit $L_i' \subset Q_0$ liegen. Ist jedoch $K_s' \cap I(K_0) \neq O$ mit einem s, für das $L_s' \not\subset Q_0$ gilt, so müßte $Q_s = L(L_s')$ zwischen Q_0 und $\tilde{Q}_0 (Q_s \neq Q_0, Q_s \neq \tilde{Q}_0)$ liegen. Da man genauso wie für Q_0 auch für Q_s beweisen kann, daß es von den K_i mit $L_i \subset Q_0$ lückenlos ausgefüllt wird, gibt es ein L_r mit $I(K_0) \cap L_r \neq O$, was die widerspruchsvolle Beziehung $I(K_0) \cap I(K_r) \neq O$ ergäbe. Es liege der zweite Fall vor; die $\tilde{L}_i$ und $\tilde{L}_i'$ seien also Strecken. Die $\tilde{L}_i$ oder $\tilde{L}_i'$ mit $K_i \subset J$ bzw. $K_i' \subset J$ können keinen Punkt von $I(J)$ enthalten, weil sonst dieses $J \cap \tilde{L}_i$ oder $J \cap \tilde{L}_j'$ überdeckt werden müßte und dafür kämen nur gewisse L_j oder L_j' in Frage; diese können aber keinen Punkt von $I(J)$ enthalten. Alles über die $L_i \subset Q_0$ und $L_i' \subset Q_0$ Gesagte läßt sich daher auch auf die $\tilde{L}_i \subset \tilde{Q}_0$, $\tilde{L}_i' \subset \tilde{Q}_0$ anwenden. $\tilde{Q}_0$ wird demgemäß sowohl durch gewisse $\tilde{L}_i$ wie auch durch gewisse $\tilde{L}_i'$ lückenlos ausgefüllt. Daraus folgt unmittelbar, daß der in J zwischen Q_0 und $\tilde{Q}_0$ gelegene Streifen P_0 durch die K_i, für welche $L_i \subset Q_0$, $\tilde{L}_i \subset \tilde{Q}_0$ gilt, lückenlos und ohne Überlappung ausgefüllt wird. Dasselbe gilt für die K_i' mit $L_i' \subset Q_0$, $\tilde{L}_i' \subset \tilde{Q}_0$. Insbesondere müssen die K_i und K_i' untereinander translationsgleiche Parallelogramme sein. K_{i*} geht daher durch eine Translation aus K_i hervor. L_i gehe dabei in L_{i*} und $\tilde{L}_i$ in $\tilde{L}_{i*}$ über. Entsprechend sind L_{i*}' und $\tilde{L}_{i*}'$ definiert. Setzt man $Q_{0*} = L(L_{i*})$, so erkennt man wegen der Translationsgleichheit der F_i, F_i' mit $L_i \subset Q_0$, $L_i' \subset Q_0$, wegen der Zentralsymmetrie der F_i, F_i', und weil die K_i, K_i' Parallelogramme sind, daß der in J_* liegende durch Q_{0*} und $\tilde{Q}_{0*}$ begrenzte Streifen P_{0*} durch die K_{i*} bzw. K_{i*}' in derselben Weise ausgefüllt wird wie P_0 durch die K_i und K_i'.

Die F_i mit $L_i \subset Q_0$ sind also dergestalt säulenartig angeordnet, daß die K_i den durch Q_0, $\tilde{Q}_0$ begrenzten Streifen P_0 und die K_{i*} den durch Q_{0*}, $\tilde{Q}_{0*}$ begrenzten Streifen P_{0*} lückenlos und ohne Überlappung ausfüllen. Dasselbe gilt von den F_i' mit $L_i' \subset Q_0$.

Betrachtet man irgendein F_j mit $K_j \not\subset P_0$, so lassen sich C_j und J_j ($J_0 = J$) analog zu (16), (17), (18) definieren. Es ist dann für alle L_i mit $K_i \subset C_i$ und ebenso für alle L_i' mit $K_i' \subset C_i$

$$L_i \subset R(J_j),\ L_i' \subset R(J_j). \tag{20}$$

Andernfalls wären ja für alle Seiten des Parallelogramms K_i die Bedingungen von Hilfssatz 1 erfüllt. Aus Hilfssatz 2 folgte, daß die F_i Zylinder sind und Hilfssatz 3 zusammen mit (9), (10) ergäbe einen Widerspruch. Wegen (20) läßt sich, wenn man von K_j ausgeht, alles das beweisen,

was von K_0 ausgehend gezeigt wurde. Alle F_i und F_i' mit $F_i \subset \overline{H}$, $F_i' \subset \overline{H}$ ordnen sich daher in Säulen der vorhin beschriebenen Art an. Die zugehörigen Q_i, $\tilde{Q}_i$, Q_{i*}, $\tilde{Q}_{i*}$ sind dabei alle zu Q_0 parallel. Je zwei in einer solchen Säule benachbarte F_k, F_l oder F_k', F_l' haben einen Durchschnitt D_{kl} bzw. D_{kl}' der ein Parallelogramm mit Ecken in Q_k, $\tilde{Q}_k$, Q_{k*}, $\tilde{Q}_{k*}$ enthält. Alle D_{kl} und D_{kl}' sind wegen der Homothetie aller F_i und F_i' untereinander parallel. Aus (9) folgt, daß es einen Punkt p mit

$$p \in I(F_0) \cap I(F_1') \tag{21}$$

gibt. Z bedeute eine zu den D_{kl} parallele Ebene, die p enthält. Ist $\overline{F}_i = Z \cap F_i \neq O$, so liegt das Parallelogramm R_i mit den Eckpunkten $q_i = Q_i \cap Z$, $\tilde{q}_i = \tilde{Q}_i \cap Z$, $q_{i*} = Q_{i*} \cap Z$, $\tilde{q}_i = \tilde{Q}_{i*} \cap Z$ in $\overline{F}_i$. Entsprechendes gilt für die analog definierten $\overline{F}_i'$, R_i', q_i' usw. Alle R_i und R_i' sind untereinander homothetisch. Bedeuten Z^+ und Z^- die beiden durch Z begrenzten abgeschlossenen Halbräume, so bezeichne $\overline{\mathbf{M}}$ die Menge aller $\overline{F}_i$, deren zugehöriges F_i in $\mathbf{M}$ liegt und für die zudem $F_i \cap Z \neq O$, $F_i \not\subset Z^-$ ist. Dementsprechend ist $\overline{\mathbf{M}}'$ die Menge aller $\overline{F}_i'$ mit $F_i' \in \mathbf{M}'$, $F_i' \cap Z \neq O$, $F_i' \not\subset Z^-$. Je zwei $\overline{F}_i$ und ebenso je zwei $\overline{F}_i'$ haben keine inneren Punkte gemeinsam; sonst müßte Z die beiden zugehörigen F_i bzw. F_i' separieren, was wegen $F_i \not\subset Z^-$, $F_i' \not\subset Z^-$ unmöglich ist. Setzt man

$$S = \bigcup_{\overline{F}_i \in \overline{\mathbf{M}}} \overline{F}_i, \tag{22}$$

so gilt wegen (14), (15) auch

$$S = \bigcup_{\overline{F}_i' \in \overline{\mathbf{M}}'} \overline{F}_i'. \tag{23}$$

Aus (10) und (21) folgt

$$p \in I(\overline{F}_0),\ p \in I(\overline{F}_1') \tag{24}$$

und

$$\overline{F}_0 \not\approx \overline{F}_1'. \tag{25}$$

(22), (23), (24), (25) bedeuten, daß S auf zwei wesentlich verschiedene Arten, das eine Mal durch die $\overline{F}_i \in \overline{\mathbf{M}}$, das andere Mal durch die $\overline{F}_i' \in \overline{\mathbf{M}}'$, lückenlos und ohne Überlappung ausgefüllt werden kann. Es soll jedoch gezeigt werden, daß $\overline{\mathbf{M}} \neq \overline{\mathbf{M}}'$ auf einen Widerspruch führt.

Schreibt man $\overline{K}_i = K_i \cap Z$, $\overline{K}_{i*} = K_{i*} \cap Z$, $\overline{K}_i' = K_i' \cap Z$, $\overline{K}_{i*}' = K_{i*}' \cap Z$, so läßt sich zunächst

$$\overline{K}_i \subset R(S),\ \overline{K}_{i*} \subset R(S),\ \overline{K}_i' \subset R(S),\ \overline{K}_{i*}' \subset R(S) \tag{26}$$

zeigen. Wäre etwa $x \in \overline{K}_i$, $x \in I(S)$, so gäbe es ein K_{i*} mit $I(\overline{K}_i) \cap I(\overline{K}_{i*}) \neq O$. Dies ergäbe die der Voraussetzung $K_i \subset R(\overline{H})$ widersprechende Beziehung $I(K_i) \cap I(K_{i*}) \neq O$. Genauso verfährt man bei den anderen Möglichkeiten.

Nun werde $W_{jk} = \overline{F}_j \cap \overline{F}_k$ ($\overline{F}_j \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{F}_k \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{F}_j \cap \overline{F}_k \neq O$) geschrieben. Sind s und t die Endpunkte der Strecke W_{jk} ($s = t$ ist dabei nicht ausgeschlossen), so soll $s \in R(S)$, $t \in R(S)$ gezeigt werden. Wegen (26) kann man dabei $s \notin \overline{K}_i$, $s \notin \overline{K}_{i*}$ annehmen. Die durch s gehende zu $\overline{K}_i$ parallele Gerade enthält dann zwei offene Intervalle der Form (x, s), (s, y) mit $(x, s) \cup (s, y) \subset I(\overline{F}_j) \cup I(\overline{F}_k)$. Da $s \in R(\overline{F}_j \cup \overline{F}_k)$ ist, müßte es ein F_l mit $s \in \overline{F}_l$ geben. $\overline{F}_l$ enthielte dann Punkte aus (x, s) oder (s, y), was $I(\overline{F}_j) \cap I(\overline{F}_l) \neq O$ oder $I(\overline{F}_k) \cap I(\overline{F}_l) \neq O$ zur Folge hat. Es wurde aber schon bemerkt, daß je zwei $\overline{F}_i$ keine inneren Punkte gemeinsam haben. Natürlich gilt für die F_i' dasselbe wie für die F_i.

Es sei $G_i = R(S) \cap R(\overline{F}_i)$, $G_i' = R(S) \cap R(\overline{F}_i')$ gesetzt. $\overline{F}_i$ ist durch die Angabe von G_i eindeutig bestimmt; es ist nämlich $\overline{F}_i = [G_i]$. Da $[G_i] \subset \overline{F}_i$ selbstverständlich ist, hat man nur $\overline{F}_i \subset [G_i]$ zu zeigen. Wäre dies nicht der Fall, so existierte ein Punkt z und ein Index j, so daß $z \in R(\overline{F}_j)$, $z \notin [G_j]$ gälte. Da man aus $z \in R(S)$ zusammen mit $z \in R(F_j)$ sogar $z \in G_i$ erhält, müßte $z \in I(S)$ sein. Es gibt dann ein F_k, für das $z \in I(\overline{F}_k \cup \overline{F}_j)$, d. h. $z \in W_{jk}$ ist. Da, wie oben bewiesen wurde, $s \in R(S)$, $t \in R(S)$ gilt, ist $s \in G_j$, $t \in G_j$, woraus, weil s und t die Endpunkte von W_{jk} sind, $W_{jk} \subset [G_j]$ und daher $z \in [G_j]$ folgt. Genauso beweist man $\overline{F}_i' = [G_i']$.

Da die $Q_i, \tilde{Q}_i, Q_{i*}, \tilde{Q}_{i*}$ die Parallelogramme R_i, R_i' eindeutig bestimmen, ergibt sich, daß die Menge aller zu den $\overline{F}_i \in \overline{\mathfrak{M}}$ gehörigen R_i mit der Menge aller zu den $F_i' \in \overline{\mathfrak{M}}'$ gehörigen R_i' übereinstimmt. Ist x irgendein Punkt aus einem $\overline{F}_j$, der in $R(S)$ liegt, d. h. $x \in G_j$ und läßt sich zeigen, daß dann $x \in \overline{F}_k'$, $R_j = R_k'$ gilt, so ist alles bewiesen. Man bedenke dazu, daß man dann $G_j \subset G_k'$ hat und dementsprechend auch $G_k' \subset G_j$ also $G_j = G_k'$ sein wird, was $[G_j] = [G_k']$ d. h. $\overline{F}_j = \overline{F}_k'$ und somit $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}'$ ergibt.

Zu jedem $x \in G_j$ gibt es eine x enthaltende (nicht zu einem Punkt degenerierte) Strecke $X \subset G_j$; denn liegt x in höchstens zwei $\overline{F}_i$, so ist dies selbstverständlich und drei $\overline{F}_i$ können sich, wie schon gezeigt wurde, nie in einem Punkt treffen. Da demnach G_j durch die Menge der inneren Punkte der Strecken, aus welchen es sich zusammensetzt, als deren abgeschlossene Hülle eindeutig bestimmt ist, kann man voraussetzen,

daß x im Inneren einer Strecke $X \subset G_j$ liegt. Gilt $I(X) \cap \overline{K}_j \neq O$, so ist $X \subset \overline{K}_j$ und daher $X \subset \overline{K}_k'$, $R_j = R_k'$, insbesondere also $x \in \overline{F}_k'$, was zu zeigen war. Es darf somit $I(X) \cap \overline{K}_j = O$ und dementsprechend $I(X) \cap \overline{K}_{j*} = O$ angenommen werden.

Man ziehe nun die Geraden $D = L(q_j, q_{j*})$, $\tilde{D} = L(\tilde{q}_j, \tilde{q}_{j*})$ sowie die zu D und $\tilde{D}$ parallele Gerade D_x, welche durch x geht. D und $\tilde{D}$ enthalten je eine von $\overline{K}_j$, $\overline{K}_{j*}$ verschiedene Seite des Parallelogramms R_j. Indem man nötigenfalls die Bezeichnung ändert, kann man annehmen, daß $\tilde{D}$ und D_x auf verschiedenen Seiten von D liegen. Schließlich sei noch K diejenige Gerade, welche x enthält und zu $\overline{K}_j$ parallel ist. K hat mit $I(\overline{F}_j)$ ein offenes Intervall mit x als Endpunkt gemein. Wegen (23) und $X \subset G_j \subset R(S)$ gibt es ein k mit $x \in \overline{F}_k' \in \mathfrak{M}'$, $I(X) \cap R(\overline{F}_k') \neq O$. Ebenfalls aus $X \subset R(S)$ folgt dann, daß $\overline{F}_k'$ bezüglich $L(X)$ auf derselben Seite wie $\overline{F}_j$ liegt. Damit, und weil $x \in \overline{F}_k'$ zur Folge hat, daß $\overline{K}_k'$ und $\overline{K}_{k*}'$ bezüglich K auf verschiedenen Seiten liegen, erhält man, daß entweder $\overline{K}_k'$ oder $\overline{K}_{k*}'$ bezüglich D_x auf derselben Seite wie $\overline{F}_j$ liegt. Wegen $R_j \sim R_k'$ ist aber dann ganz R_k' hinsichtlich D_x auf derselben Seite wie $\overline{F}_j$. Da für $R_k' \neq R_j$ $I(R_j) \cap I(R_k') = O$ sein muß (jedes R_k' ist ja irgendein R_s), ist R_k' entweder zwischen D_x und D oder bezüglich D nicht auf derselben Seite wie R_j. Im ersten Fall gilt dann offenbar

$$\overline{F}_j \cap I(R_k') \neq O \tag{27}$$

und im zweiten

$$\overline{F}_k' \cap I(R_j) \neq O. \tag{28}$$

Aus (27) erhält man, da für irgendein s $R_k' = R_s$ sein muß, $\overline{F}_j \cap I(R_s) \neq O$. Weil aber zwei verschiedene F_i keine inneren Punkte gemeinsam haben, folgt daraus $R_s = R_j$ und es ist $R_k' = R_j$. Dasselbe erhält man aus (28).

Abschließend sei noch auf *Delaunay* [2], [3] und *A. D. Alexandrov* [4] hingewiesen, wo für $n \leqq 4$ ebenfalls von Lagerungen homothetischer konvexer Körper die Rede ist.

Literatur

[1] *H. Groemer*, Über Zerlegungen des Euklidischen Raumes. Math. Zeitschr. **79**, 364–375 (1962).

[2] *B. Delaunay*, Sur la théorie des parallèloèdres. C. R. Acad. Scie. Paris **183**, 464–467 (1926).

[3] *B. Delaunay*, Sur la généralisation de la théory des parallèloèdres. Izwestija Akad. Nauk SSSR (Ser. 7), 641–646 (1933).

[4] *A. D. Alexandrov*, Déduction des parallèloèdres non normaux à 4 dimensions (russisch). Izwestija Akad. Nauk SSSR (Ser. 7), 803–817 (1934).