Werk

Titel: Dichteste Packung inkongruenter Kreise.

Autor: Florian, A.

Jahr: 1963

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0067|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Dichteste Packung inkongruenter Kreise

Von

A. Florian, Wien

(Eingegangen am 15. Oktober 1962)

Es sei in der euklidischen Ebene ein System S nicht übereinandergreifender, offener Kreise K_i (Radien r_i) der Homogenität

$$p = \inf \frac{r_i}{r_j},\ i,j=1, 2, 3, \ldots,\ 0 < p \leq 1$$

beliebig gegeben (wegen der Bezeichnungen vergleiche man[1]). Vor einiger Zeit habe ich eine obere Abschätzung bewiesen[1], der das Supremum $d(p)$ der Dichten aller solchen Kreislagerungen der Homogenität p genügt und die im Spezialfall $p = 1$ (kongruente Kreise) ein lange bekanntes Resultat von *Thue* ergibt. Das Problem, zu beliebig gegebenem p eine dichteste Kreislagerung zu finden, muß als hoffnungslos schwierig angesehen werden. Durch[1] und Angabe spezieller, günstiger Kreislagerungen[2, 3] wird $d(p)$ zwischen zwei sehr engen Schranken eingeschlossen; bisher war jedoch der exakte Wert von $d(p)$ nur für $p = 1$ bekannt und daher das Problem der dichtesten Lagerung nur für kongruente Kreise vollständig gelöst. Andererseits zeigte *L. Fejes Tóth*[4] die Existenz einer Zahl p_0 mit $0 < p_0 < 1$, so daß

$$d(p) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \text{ für } p_0 \leq p \leq 1$$

und

$$d(p) > \frac{\pi}{\sqrt{12}} \text{ für } 0 \leq p < p_0$$

---

[1] *A. Florian.* Rend. Circ. Mat. Palermo IX, 300–312, 1960.
[2] *J. Molnár.* Ann. Univ. Sci. Budapest II, 33–40, 1959.
[3] *A. Heppes* und *J. Molnár.* Matematikai Lapok XI/4, 330–355, 1960.
[4] Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer, Berlin 1953, S. 59.

ist. Es dürfte sehr schwierig sein, den exakten Wert von p_0 anzugeben; auch eine obere Abschätzung war bisher nicht bekannt. Wir bemerken, daß auch die Ungleichung in [1] keine solche Aussage liefert.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir nun

$$p_0 \leq 0{,}906 \ldots \tag{1}$$

Damit ist für Systeme der Homogenität $0{,}906 \ldots \leq p \leq 1$ das Problem gelöst, eine dichteste Kreispackung anzugeben: Man erhält eine solche, indem man aus einer dichtesten Packung kongruenter Kreise vom Radius 1 einen Kreis (oder eine endliche Anzahl) durch einen Kreis vom Radius p ersetzt.

Unser Resultat sagt wesentlich mehr aus als (1) und ist enthalten im folgenden

Satz: Jeder Kreis K einer Lagerung der Homogenität $p (0 < p \leq 1)$ läßt sich in ein konvexes Polygon, die Zelle Z des Kreises, einschließen, so daß die Zellen die Ebene schlicht und lückenlos ausfüllen und die Dichte eines jeden Kreises in seiner Zelle

$$\frac{K}{Z} \leq \frac{\pi}{F(s)} \tag{2}$$

ist. Dabei bedeutet

$$F(s) = \operatorname{Inf} [k(1 + s^2 - 2\,s \sin\varphi) \operatorname{tg}\varphi + l \operatorname{tg}\psi], \tag{3}$$

$k, l \geq 0$, *ganzzahlig*, $0 < \varphi < \arcsin \frac{s}{2} \leq \psi < \frac{\pi}{2}$,

$$k\varphi + l\psi = \pi$$

und

$$s = \frac{4p^2}{1 + 3p};$$

für $0{,}27 \leq p \leq 1$ *ist* (2) *sogar mit*

$$s = p$$

richtig.

$F(s)$ hat folgende geometrische Bedeutung: K sei ein Einheitskreis mit dem Mittelpunkt 0. Wir sagen, ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze in 0, dessen Basis K nicht schneidet, habe die Fußpunkteigenschaft, wenn sich durch eine Basisecke eine K nicht schneidende Gerade so legen läßt, daß der Fußpunkt der Normalen aus 0 auf diese Gerade vom Fußpunkt der Normalen aus 0 auf die Basisseite einen

Abstand $\geq s$ hat. Man überdeckt nun K durch nicht übereinandergreifende gleichschenklige Dreiecke mit der Fußpunkteigenschaft; $F(s)$ ist das Infimum der Inhaltssumme solcher Überdeckungen.

Setzt man noch $F(0) = 1$, so ist $F(s)$ in $0 \leq s \leq 1$ stetig und nicht abnehmend. Es zeigt sich (s. auch[5]), daß

$$F(s) = \sqrt{12} \tag{4}$$

in $0{,}906\ldots \leq s \leq 1$ konstant ist. Aus unserem Satz folgt dann, daß bei einer Lagerung der Homogenität p mit $0{,}906\ldots \leq p \leq 1$ die Dichte eines jeden Kreises in seiner Zelle $\leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ ist. Diese Schranke ist offenbar genau.

Beweis von (2): Man kann o. B. d. A. voraussetzen, daß S gesättigt ist, d. h. daß keine Lagerung der gleichen Homogenität p außer den Kreisen von S weitere Kreise enthält.

Unter der Distanz eines Punktes P von einem Kreis K mit Mittelpunkt 0 und Radius r verstehen wir

$$d(P, K) = \pm\sqrt{|\,0P^2 - r^2\,|}, \tag{5}$$

je nachdem, ob P außerhalb oder innerhalb K liegt. Zu jedem Kreis K_i der Lagerung konstruieren wir die Punktmenge

$$Z_i = \{P_i \mid d(P_i, K_i) \leq d(P_i, K_j),\ j = 1, 2, \ldots, j \neq i\}\ i = 1, 2, \ldots$$

und nennen sie die zu K_i gehörige Zelle[6]. Offenbar gilt für jeden Kreis jeder Lagerung

$$K_i \subset Z_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

und jede Zelle ist für jede gesättigte Lagerung positiver Homogenität ein beschränktes, konvexes Polygon endlicher Seitenzahl. Die Z_i füllen die Ebene lückenlos und (bis auf die Ränder) schlicht aus.

Wir wählen unter allen Lagerungen der Homogenität $p > 0$ einen Kreis K aus, für den K/Z maximal wird. Sein Mittelpunkt sei 0, der Radius gleich 1. Wir beweisen zunächst dafür die folgenden Eigenschaften:

Hilfssatz 1. Die Fußpunkte der Normalen aus 0 auf die Seiten von Z haben paarweise einen Abstand

---

[5] *A. Florian.* Mathematik, Technik, Wirtschaft 9/3, 110—111, 1962.

[6] Dies ist eine der möglichen Verallgemeinerungen der bekannten Dirichletschen Zellen kongruenter Kreise.

$$a \geq \frac{4p^2}{1+3p} \quad (0 < p \leq 1) \tag{6}$$

und Gleichheit kann höchstens für $p = 1$ erreicht werden.

Beweis: Für $p = 1$ ist dies trivial; es sei also $p < 1$. Einen Kreis $K_j \neq K$, dessen Zelle Z_j mit Z eine gemeinsame Seite hat, nennen wir einen Nachbarkreis von K. Jeder Kreis der Lagerung hat offenbar einen Radius $\geq p$. Ersetzt man nun jeden Nachbarkreis K_j durch einen Kreis mit dem Radius p, der K_j in dem K nächstgelegenen Punkt innen berührt, so wird Z verkleinert, wie eine einfache Rechnung zeigt; wegen der Minimaleigenschaft von Z können wir daher die Radien aller Nachbarkreise von K gleich p annehmen.

Es seien K_1, K_2 zwei Nachbarkreise von K mit den Mittelpunkten 0_1, 0_2, die Fußpunkte der Normalen aus 0 auf die entsprechenden Seiten von Z seien P_1, P_2, $a = P_1 P_2$, $00_i = l_i$ $(i = 1, 2)$ und $\varphi (0 < \varphi < \pi)$ der Winkel zwischen 00_1 und 00_2. Wir verschieben K_1 und K_2 bei festem K so, daß die drei Kreise nicht übereinandergreifen und a sein Minimum erreicht; dann müssen K_1 und K_2 sich berühren. Denn wäre dies nicht der Fall und $l_2 > l_1$, so braucht man nur l_2 bei festem l_1 und φ zu verkleinern. Bei $l_2 = l_1$ verkleinert man φ bei festem l_1, l_2; in beiden Fällen nimmt a ab.

Somit ist das Infimum von

$$4\,a^2(l_1, l_2) =$$

$$= \frac{(\lambda_1+1-p^2)^2}{\lambda_1} + \frac{(\lambda_2+1-p^2)^2}{\lambda_2} - (\lambda_1+1-p^2)(\lambda_2+1-p^2)\frac{\lambda_1+\lambda_2-4p^2}{\lambda_1 \lambda_2} \tag{7}$$

mit $\lambda_i = l_i^2$ $(i = 1, 2)$ im Bereich

$$\mathrm{B}\colon\ 1 + p \leq l_1 \leq l_2 + 2p,\ 1 + p \leq l_2 \leq l_1 + 2p \tag{8}$$

zu untersuchen. Durchläuft (l_1, l_2) eine Folge von Punkten, so daß $a^2(l_1, l_2)$ gegen das Infimum konvergiert, und ist die Folge der l_2 unbeschränkt, strebt also für eine passende Teilfolge $l_2 \to \infty$, dann strebt auch $l_1 \to \infty$ und wegen (8) konvergiert l_1/l_2 gegen 1; daher gilt

$$a \to p > \frac{4p^2}{1+3p}.$$

Ist jedoch l_2 und damit auch l_1 beschränkt, so besitzt $a^2(l_1, l_2)$ in B ein Minimum. Würde das Minimum von a im Innern von B angenommen werden, so müßte an dieser Stelle

$$4\frac{\partial a^2}{\partial \lambda_1}=\frac{1-p^2}{\lambda_1^2\lambda_2}\left[-\lambda_1^2+\lambda_2^2-4p^2\lambda_2-4p^2(1-p^2)\right]=0$$

$$4\frac{\partial a^2}{\partial \lambda_2}=\frac{1-p^2}{\lambda_1\lambda_2^2}\left[-\lambda_2^2+\lambda_1^2-4p^2\lambda_1-4p^2(1-p^2)\right]=0$$

sein; dies ist aber unmöglich, da die Summe der beiden Klammerausdrücke negativ ist. Daher muß das Minimum notwendig auf dem Rand von B erreicht werden.

Es sei zunächst $l_2=1+p$; dann ergibt sich

$$4a^2(l_1,1+p)=-\frac{1-p}{\lambda_1(1+p)}(\lambda_1+1+4p-p^2)(\lambda_1+1-p^2)+4$$

und es hat $\dfrac{\partial a^2(l_1,1+p)}{\partial \lambda_1}$ gleiches Vorzeichen wie

$$-\lambda_1^2+4p(1-p^2)+(1-p^2)^2,$$

ist also <0 wegen $l_1\geq 1+p$. Somit ist

$$a^2(l_1,1+p)\geq a^2(1+3p,1+p)=\frac{16p^4}{(1+3p)^2}.$$

Es sei nun $l_2=l_1+2p$; dann ist

$$a(l_1,l_1+2p)=p\frac{l_1^2+2l_1p-(1-p^2)}{l_1(l_1+2p)}$$

mit l_1 wachsend und somit wegen $l_1\geq 1+p$

$$a(l_1,l_1+2p)\geq a(1+p,1+3p)=\frac{4p^2}{1+3p}.$$

Wegen der Symmetrie von $a(l_1,l_2)$ ist damit Hilfssatz 1 bewiesen.

Das Minimum von a wird bei $p<1$ erreicht, wenn ein kleiner Kreis die beiden anderen berührt und die drei Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, was für eine Zelle nicht eintreten kann. Wir geben nun eine Verschärfung von Hilfssatz 1:

Hilfssatz 2. Für $p\geq 0{,}27$ ist der Abstand a der Fußpunkte der Normalen aus 0 auf je zwei benachbarte Seiten von Z

$$a\geq p. \tag{9}$$

Beweis: Für $p=1$ ist dies trivial; es sei also wieder $p<1$. Die Behauptung ist nach (7) gleichwertig mit

$$\lambda_2^2 - 2(\lambda_1 + 2p^2)\lambda_2 + \lambda_1^2 - 4p^2\lambda_1 - 4p^2(1-p^2) \leq 0.$$

Die Wurzeln des links stehenden Polynoms in λ_2 sind

$$\lambda_1 + 2p^2 \pm 2p\sqrt{1+2\lambda_1},$$

wovon eine $< \lambda_1$, die andere $> \lambda_1$ ist. Da man wegen der Symmetrie $\lambda_2 \geq \lambda_1$ voraussetzen kann, genügt es zu zeigen, daß

$$\lambda_2 \leq \lambda_1 + 2p^2 + 2p\sqrt{1+2\lambda_1} \tag{10}$$

ist.

Es sei t der Abstand eines Eckpunktes der Zelle von 0. Dann gilt für die anstoßenden Seiten

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{2p}{t^2-1+p^2}\left[-p\lambda_1 + p(2t^2-1+p^2) + \sqrt{t^2-1}\sqrt{4\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 - p^2+1)^2}\right],$$

und (10) ist gleichwertig mit

$$f_1(\lambda_1, p) \equiv p\lambda_1 - \sqrt{t^2-1}\sqrt{4\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 - p^2+1)^2} + \\ + (t^2 - 1 + p^2)\sqrt{1+2\lambda_1} - pt^2 \geq 0. \tag{11}$$

Man findet nun

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} = p - \sqrt{t^2-1}\,\frac{2t^2 - (\lambda_1 - p^2 + 1)}{\sqrt{4\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 - p^2+1)^2}} + \frac{t^2 - 1 + p^2}{\sqrt{1+2\lambda_1}} \tag{12}$$

und

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1^2} = \frac{t^2 - 1 + p^2}{(1+2\lambda_1)^{3/2}} f_2(\lambda_1, p) \tag{13}$$

mit

$$f_2(\lambda_1, p) = 4t^2\sqrt{t^2-1}\left(\frac{1+2\lambda_1}{4\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 - p^2+1)^2}\right)^{3/2} - 1.$$

Es ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = c(\lambda_1^2 + \lambda_1 - p^4 + p^2 - 2t^2),$$

wobei $c > 0$ ist. Unter der Voraussetzung

$$t \leq 1 + p \tag{14}$$

ist

$$t^2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^2,$$

also

$$\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} > 0.$$

Weiter ergibt sich, wenn (14) gilt,

$$f_2((1+p)^2, p) = \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{t^2-1}\,\frac{[1+2(1+p)^2]^{3/2}}{(1+p)^3} - 1$$

$$\geq \frac{1}{2}\,\frac{[1+2(1+p)^2]^{3/2}}{(1+p)\,(p^2+2p)} - 1 > 0.$$

Wegen $\lambda_1 \geq (1+p)^2$ ist daher

$$f_2(\lambda_1, p) > 0$$

und nach (13) auch

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_1^2} > 0.$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1}((1+p)^2, p) = \frac{(1+p)^2 - t^2}{1+p} + \frac{t^2 - 1 + p^2}{\sqrt{1+2(1+p)^2}} > 0$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} > 0.$$

Weiter ergibt sich

$$f_1((1+p)^2,\ p) = p(1+p)^2 - 2(1+p)\,(t^2-1) +$$
$$+ (t^2 - 1 + p^2)\sqrt{1+2(1+p)^2} - p\,t^2;$$

falls

$$f_1((1+p)^2, p) \geq 0 \tag{15}$$

ist, ist (14) erfüllt. Denn wäre $t > 1+p$, so wäre

$$p(1+p)^2 < p\,t^2$$

und

$$t^2 - 1 > p^2 + 2p,$$

woraus wegen

$$\sqrt{1+2(1+p)^2} - 2(1+p) < 0$$

folgt

$$(t^2-1)\,(\sqrt{1+2(1+p)^2} - 2(1+p)) <$$
$$< (p^2+2p)\,(\sqrt{1+2(1+p)^2} - 2(1+p)).$$

Daher wäre

$$f_1((1+p)^2, p) < 2[(p^2+p)\sqrt{1+2(1+p)^2} - (p^2+2p)(1+p)] =$$
$$= 2p(1+p)[\sqrt{1+2(1+p)^2} - (p+2)] < 0.$$

Demnach ist (11) gezeigt, wenn (15) oder

$$t^2 - 1 \leq \frac{p^2(p+2+\sqrt{1+2(1+p)^2})}{2+3p-\sqrt{1+2(1+p)^2}} \tag{16}$$

bewiesen ist, wo rechts eine monoton wachsende Funktion steht.

Dabei wurde zunächst die Voraussetzung gemacht, daß die zwei entsprechenden Nachbarkreise von K sich berühren; da aber bei der im Beweis zum Hilfssatz 1 vorgenommenen Verschiebung der Kreise t abnimmt, ist (16) allgemein hinreichend.

Um eine obere Abschätzung für t zu gewinnen, beachtet man, daß für die kleinste Zelle der Inhalt der konvexen Hülle eines jeden Eckpunktes und K

$$\psi(t) = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1} + \sqrt{t^2-1}$$

nicht größer als der Inhalt einer beliebigen Zelle, etwa eines umbeschriebenen regulären Sechsecks sein kann. Daher muß

$$\psi(t) \leq \sqrt{12} = 3{,}4641\ldots,$$

also

$$\sqrt{t^2-1} \leq 1{,}2$$

sein. (16) ist damit sicher für

$$0{,}7 \leq p \leq 1$$

erfüllt.

Es lassen sich an einen Einheitskreis genau dann n nicht übereinandergreifende gleich große Kreise anlegen, wenn ihr Radius

$$p \leq \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} = g(n)$$

ist. Wegen

$$0{,}7 < g(7)$$

lassen sich daher für $p \leq 0{,}7$ mindestens 7 Kreise vom Radius p an den Einheitskreis anlegen; somit muß dann t für die kleinste Zelle so klein sein, daß $\psi(t)$ den Inhalt des K umbeschriebenen regulären Siebenecks nicht übertrifft

$$\psi(t) \leq 3{,}37099,$$

also

$$\sqrt{t^2 - 1} \leq 1{,}04.$$

(16) ist damit für

$$0{,}52 \leq p \leq 0{,}7$$

gleichfalls erfüllt. Setzt man das Verfahren fort, so findet man, daß (16) für $0{,}27 \leq p \leq 1$ gilt, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. Es sei $0 < s \leq 1$ gegeben und Z ein konvexes Polygon, das den Einheitskreis K mit Mittelpunkt 0 enthält und die Eigenschaft besitzt, daß der Abstand der Fußpunkte je zweier aus 0 auf benachbarte Seiten von Z gefällten Normalen $\geq s$ ist; wir nennen dies die Fußpunkteigenschaft von Z. Dann ist

$$Z \geq F(s) = \operatorname{Inf}\,[k(1 + s^2 - 2\,s \sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi + l \operatorname{tg}\psi], \tag{17}$$

wobei k, l, φ, ψ so zu variieren sind, daß

$$k, l \geq 0 \text{ und ganzzahlig, } 0 < \varphi < \arcsin\frac{s}{2} \leq \psi < \frac{\pi}{2},$$

$$k\varphi + l\,\psi = \pi$$

ist.

Beweis: Verbindet man 0 mit den Ecken E_i $(i=1, \ldots, n)$ des Polygons, so zerfällt es in Dreiecke Δ_i, deren bei 0 gelegene Winkel $2\,\varphi_i$ $(0 < \varphi_i < \frac{\pi}{2})$ seien. A sei der Fußpunkt der Normalen aus 0 auf eine Seite $E_1 E_2$ von Z, so daß

$$0A = u \geq 1$$

ist. Offenbar erreicht Δ bei festem φ und u sein Minimum für das gleichschenklige Dreieck $0\overline{E}_1\,\overline{E}_2$

$$\Delta \geq u^2 \operatorname{tg}\varphi. \tag{18}$$

Durch $\overline{E}_1$ und $\overline{E}_2$ lassen sich K nicht schneidende Gerade legen, so daß die Fußpunkte der aus 0 auf sie gefällten Normalen von A einen Abstand $\geq s$ besitzen. Dazu braucht man nur, falls A zwischen E_1 und E_2 liegt und $AE_1 < AE_2$ ist, durch $\overline{E}_1$ die Parallele zur Seite $E_n E_1$ von Z und, falls A nicht zwischen E_1 und E_2 liegt und $AE_1 < AE_2$ ist, durch $\overline{E}_1$ die Tangente an K zu legen.

Es soll nun u bei gegebenem φ nach unten abgeschätzt werden. Wie vorhin gezeigt, kann u nur solche Werte annehmen, daß sich durch $\overline{E}_1$ eine K nicht schneidende Gerade legen läßt, so daß der Fußpunkt

der Normalen aus 0 auf diese Gerade von A einen Abstand $\geq s$ besitzt. Einen solchen Wert $u \geq 1$ nennen wir zulässig; mit u ist auch jede Zahl $> u$ zulässig. Für $\varphi \geq \arcsin \frac{s}{2}$ ist $u = 1$ zulässig; denn der Berührungspunkt der Tangente von $\overline{E}_1$ an K hat von A den Abstand $2 \sin \varphi \geq s$. Für $0 < \varphi < \arcsin \frac{s}{2}$ sind nur die Zahlen $u \geq \sqrt{1 + s^2 - 2 s \sin \varphi}$ zulässig. Denn die Länge der Tangente von $\overline{E}_1$ an K ist dann

$$\sqrt{u^2 - \cos^2 \varphi} + \sin \varphi \geq s.$$

Ist $u^2 < 1 + s^2 - 2 s \sin \varphi$, so ist wegen $\varphi < \frac{\pi}{6}$ und $u < \sqrt{1 + s^2} \leq \sqrt{2}$

$$A\overline{E}_1 = u \operatorname{tg} \varphi < 1.$$

Daher hat der Fußpunkt der Normalen aus 0 auf eine K nicht schneidende Gerade durch $\overline{E}_1$ den maximalen Abstand von A, wenn die Gerade K berührt; dann ist aber der Abstand $< s$, u also nicht zulässig.

Wendet man (18) auf jedes Dreieck an und addiert, so folgt nach dem Vorhergehenden

$$Z \geq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \operatorname{tg} \varphi_i \geq \sum_{i=1}^{l} \operatorname{tg} \varphi_i +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{n} (1 + s^2 - 2 s \sin \varphi_i) \operatorname{tg} \varphi_i = G(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{19}$$

wobei

$$\arcsin \frac{s}{2} \leq \varphi_i < \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, l \; (0 \leq l \leq n),$$

$$0 < \varphi_i < \arcsin \frac{s}{2}, \quad i = l + 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \pi \tag{20}$$

gilt.

G besitzt unter den Bedingungen (20) ein Minimum; an dieser Stelle ist notwendig

$$\varphi_1 = \ldots = \varphi_l = \psi, \tag{21}$$

da $\operatorname{tg} \varphi$ in $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ konvex ist. Weiter folgt notwendig

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial G}{\partial \varphi_k} \; (l+1 \leq j, k \leq n),$$

also

$$f(\varphi_j, s) = f(\varphi_k, s) \qquad j \neq k \tag{22}$$

mit

$$f(\varphi, s) = -4\, s \sin\varphi + (1 + s^2 - 2\, s \sin\varphi) \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -4\, s \cos\varphi - 2\, s \cos\varphi \operatorname{tg}^2\varphi + \\
&\quad + 2(1 + s^2 - 2\, s \sin\varphi)(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) \operatorname{tg}\varphi, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\, \partial s} &= -4 \cos\varphi - 2 \cos\varphi \operatorname{tg}^2\varphi + \\
&\quad + 4(s - \sin\varphi)(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) \operatorname{tg}\varphi \leq \\
&\quad \leq \frac{-2 - 2\sin^2\varphi - 2\cos^4\varphi + 4\sin\varphi}{\cos^3\varphi} < 0
\end{aligned}$$

wegen $\varphi < \frac{\pi}{6}$, und weiter wegen $s > 2 \sin\varphi$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} < -8 \sin\varphi \cos\varphi - 4 \sin\varphi \cos\varphi \operatorname{tg}^2\varphi + 2 \operatorname{tg}\varphi (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) < 0.$$

Aus (22) ergibt sich somit notwendig

$$\varphi_{l+1} = \ldots = \varphi_n = \varphi. \tag{23}$$

(19), (21) und (23) zeigen zusammen, wenn man noch $n - l = k$ setzt, die Behauptung von Hilfssatz 3.

Aus den Hilfssätzen 1 bis 3 folgt unmittelbar die Richtigkeit unseres Satzes (2).

Um schließlich (1) aus (2) zu folgern, genügt es, (4) zu beweisen. An anderer Stelle (s. [5]) wurde gezeigt, daß

$$F(s) = \operatorname*{Inf}_x F_1(x, s) \tag{24}$$

ist mit folgender Definition von F_1: Es sei

$$m \arcsin\frac{s}{2} \leq \pi < (m+1) \arcsin\frac{s}{2},\ m \geq 6, \text{ ganzzahlig};$$

dann ist $F_1(x, s) = k(1 + s^2 - 2\, s \sin\varphi) \operatorname{tg}\varphi + l \operatorname{tg}\psi$, wobei

$$k = j + 1, \varphi = \frac{x}{j+1} \quad \text{für } j \arcsin\frac{s}{2} \leq x < (j+1)\arcsin\frac{s}{2}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$k = m+1, \varphi = \frac{x}{m+1} \quad \text{für } m \arcsin\frac{s}{2} \leq x \leq \pi,$$

$$l = m, \quad \psi = \frac{\pi - x}{m} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi - m \arcsin\frac{s}{2},$$

$$l = j, \quad \psi = \frac{\pi - x}{j} \quad \text{für } \pi - (j+1)\arcsin\frac{s}{2} < x \leq$$
$$\leq \pi - j \arcsin\frac{s}{2} \quad (j = m-1, \ldots, 1),$$

$l = 0$ für $x = \pi$

ist, während $\pi - \arcsin\frac{s}{2} < x < \pi$ auszuschließen ist. Man kann sich bei der Bestimmung des Infimums in (24) auf solche Intervalle beschränken, für die

$$k + l \geq 7$$

ist. Wie in [5] bemerkt, ergeben genaue numerische Rechnungen, daß (4) erfüllt ist. Um dies exakt nachzuweisen, wählen wir $m = 6$, also

$$s > 2 \sin\frac{\pi}{7} = 0{,}8678 \ldots;$$

nach dem Vorhergehenden stellt man leicht fest, daß in den Intervallen

$$(k-1)\arcsin\frac{s}{2} \leq x \leq \pi - l \arcsin\frac{s}{2} \tag{25}$$

mit $k + l = 7$, $1 \leq k \leq 6$ die entsprechenden Funktionen

$$f_k(x, s) = k\left(1 + s^2 - 2s \sin\frac{x}{k}\right) \operatorname{tg}\frac{x}{k} + l \operatorname{tg}\frac{\pi - x}{l} \tag{26}$$

zu untersuchen sind, während in den dazwischen liegenden Intervallen $k + l = 6$ ist. f_k erreicht bei festem s als Funktion von x sein Minimum in einem Randpunkt des Intervalles (25). Wir beweisen dies für $k = 1$; für die anderen k verläuft der Beweis ähnlich. Es ist

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = -\ 2\,s(\cos x + \frac{1}{\cos x}) + 2(1 + s^2 - 2\,s \sin x) \operatorname{tg} x\ .$$

$$.\ (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{6} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - x}{6}) = g(x, s)$$

und weiter

$$\frac{\partial g}{\partial s} = -\ 2(\cos x + \frac{1}{\cos x}) + 4(s - \sin x) \operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) \leq$$

$$\leq -\ 2(\cos x + \frac{1}{\cos x}) + 4(1 - \sin x) \operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= \frac{2}{\cos^3 x} (1 - \sin x)\,[\sin^2 x(1 + \sin x) - 2] \leq 0;$$

daraus folgt wegen $\cos x + \dfrac{1}{\cos x} \geq 2$ und $x < \dfrac{\pi}{7}$

$$g(x, s) < g(x,\ 2 \sin \frac{\pi}{7}) < -8 \sin \frac{\pi}{7} + 2(1 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{7})\ .$$

$$.\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{7}) + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}) < 0.$$

Somit ist $f_1(x, s)$ als Funktion von x im betrachteten Intervall konkav, erreicht also sein Minimum am Rande. Nun ist

$$f_1(0, s) = 6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{12}$$

und

$$f_1(\pi - 6 \arcsin \frac{s}{2}, s) \equiv h(s)$$

mit

$$h(1) = \sqrt{12},\ h'(1) = -\frac{4}{\sqrt{3}} < 0.$$

Es ist also $h(s) > \sqrt{12}$, falls $1 - s > 0$ und genügend klein ist. Die numerische Lösung der Gleichung

$$h(s_0) = \sqrt{12}$$

ergibt

$$s_0 = 0{,}906\ \ldots,$$

und es ist

$$h(s) > \sqrt{12}$$

für

$$s_0 < s < 1.$$

Daher ist

$$f_1(x, s) \geq \sqrt{12}$$

im Intervall (25) für $s_0 \leq s \leq 1$. Da dies auch für $f_k(x, s)$, $2 \leq k \leq 6$, gilt, ist (4) bewiesen.

Zusatz während der Korrektur: (1) ist auch für die Lagerung von Kreisen in einem beliebigen konvexen Bereich richtig. Genauer gilt, wie man unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse beweist, der folgende

Satz: Ist in einem konvexen Bereich B ein System von mindestens zwei Kreisen K_i der Homogenität p mit

$$0{,}906\ldots \leqq p \leqq 1$$

eingelagert, so ist ihre Inhaltssumme

$$\Sigma K_i < \frac{\pi}{\sqrt{12}} B.$$

Für $p = 1$ wurde dies von *L. Fejes Tóth* bewiesen ([4] S. 67). $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ kann darin offenbar durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.