Werk

Titel: Eine Bemerkung zur Oberflächenformel von Cauchy.

Autor: Groemer, Helmut

Jahr: 1962

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0066|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Eine Bemerkung zur Oberflächenformel von Cauchy

Von

Helmut Groemer, Corvallis, Ore., USA

(Eingegangen am 26. September 1960)

Es sei F eine n-dimensionale konvexe Fläche, das heißt der Rand eines n-dimensionalen konvexen Körpers. Bedeutet $m(F)$ das Flächenmaß von F und $m(F, u)$ das Maß der Peojektion (Quermaß) von F auf eine Ebene der Richtung u (damit ist gemeint, daß die Ebene und der Einheitsvektor u aufeinander senkrecht stehen), so gilt die bekannte Oberflächenformel von Cauchy

$$m(F) = k_n \int m(F, u)\, ds,$$

wobei $k_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}$ ist und ds das Differential der n-dimensionalen Einheitskugelfläche bedeutet. Die Integration ist hierbei, wie bei allen anderen noch vorkommenden Integralen, über die ganze Fläche der Einheitskugel zu erstrecken.

Im folgenden soll dargelegt werden, daß für die Gültigkeit der Cauchyschen Oberflächenformel die Voraussetzung der Konvexität überflüssig ist, wenn man den Begriff des Quermaßes in naheliegender Weise verallgemeinert. Für ähnliche Überlegungen vergleiche auch *J. Favard* [1]. Zunächst sollen einige Definitionen gegeben werden, die beschreiben, was in diesem Zusammenhang unter einer Fläche und dem Flächenmaß zu verstehen ist. Man wird ohne weiteres erkennen, daß die hier gegebene Definition einer Fläche so allgemein ist, daß sich die wichtigsten Klassen von Flächen, insbesondere die konvexen Flächen, als Spezialfälle einordnen. Alle Definitionen beziehen sich auf den n-dimensionalen Euklidischen Raum. Unter einer Polyederfläche soll die Vereinigung von endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen beschränkten Polyedern verstanden werden. Für jede Polyederfläche P läßt sich in bekannter Weise ein Flächenmaß $m(P)$ definieren. Es sei M eine beliebige Menge, E eine Hyperebene und G die Menge aller Geraden,

die auf E senkrecht stehen und mit M mindestens i Punkte gemeinsam haben ($i = 1, 2, \ldots$). $E \cap G$ heiße die i-Projektion von M auf E. Ist u eine Richtung, für die das Lebesguesche Maß $m_i(M, u)$ der i-Projektionen auf eine Ebene der Richtung u existiert und für die der Ausdruck

$$m(M, u) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i(M, u)$$

endlich ist, so heiße $m(M, u)$ das Projektionsmaß von M in der Richtung u. Für konvexe Flächen ist das Projektionsmaß gleich dem doppelten Quermaß. Eine Menge F, die die Eigenschaft hat, daß $m(F, u)$ für alle u existiert, werde eine Fläche genannt, wenn sie sich im folgenden Sinne beliebig genau durch Polyederflächen approximieren läßt. Es existiere eine Folge P_k von Polyederflächen, für die mit einer von k und u unabhängigen Konstanten C

$$m(P_k, u) < C \tag{1}$$

gilt und für alle u

$$\lim_{k \to \infty} m(P_k, u) = m(F, u) \tag{2}$$

ist. Beim Beweis des nachstehenden Satzes wird sich ergeben, daß für jede Fläche F der Grenzwert

$$m(F) = \lim_{k \to \infty} m(P_k) \tag{3}$$

existiert und von der speziellen Wahl der approximierenden Polyederflächen, die (1) und (2) genügen, unabhängig ist. $m(F)$ kann daher als eine natürliche Definition des Flächenmaßes angesehen werden, die in allen einfachen Fällen, insbesondere für konvexe Flächen und Polyederflächen, mit anderen bekannten Definitionen übereinstimmt. Nun läßt sich der folgende Satz sehr einfach beweisen.

Satz: Ist F eine Fläche und $m(F, u)$ das Projektionsmaß von F in der Richtung u, so gilt

$$m(F) = \frac{k_n}{2} \int m(F, u)\, ds \tag{4}$$

mit $k_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}}}$.

Das in (4) stehende Integral ist entweder als allgemeines Lebesguesches Integral mit der Kugelfläche als zugrunde liegenden Raum aufzufassen oder es kann auch als gewöhnliches Lebesgue-Stieltjesintegral

angesehen werden, wobei eine Parametrisierung der Kugelfläche vorzunehmen ist, so daß das Flächenmaß der Kugelfläche eine Funktion beschränkter Schwankung der Parameter ist. Die rechte Seite von (4) hat dann für alle Flächen einen Sinn.

Beweis des Satzes: Die bekannten Beweise der Cauchyschen Oberflächenformel (vgl. etwa Bonnesen-Fenchel [2] S. 48) ergeben für konvexe $(n-1)$-dimensionale Polyeder und damit für beliebige $(n-1)$-dimensionale Polyeder die Richtigkeit von (4). Daraus erhält man durch Summation, daß (4) für beliebige Polyederflächen richtig ist. Es ist zu beachten, daß in der Definition des Projektionsmaßes auf die entsprechende Vielfachheit Rücksicht genommen wurde. Es sei nun F eine beliebige Fläche und P_k eine Folge von Polyederflächen, für die (1) und (2) gilt. Man hat wegen (3)

$$m(F) = \lim_{k\to\infty} m(P_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{k_n}{2} \int m(P_k, u)\, ds \tag{5}$$

und wegen (1) und (2) erhält man mittels des Satzes von Lebesgue über beschränkt konvergente Folgen

$$\lim_{k\to\infty} \int m(P_k, u)\, ds = \int \lim_{k\to\infty} m(P_k, u)\, ds = \int m(F, u)\, ds. \tag{6}$$

(5) und (6) ergeben den Satz.

Aus dem bewiesenen Satz erhält man als Verallgemeinerung des Satzes, daß alle geschlossenen konvexen Kurven konstanter Breite b den Umfang πb haben, daß alle Kurven konstanten Projektionsmaßes m den Umfang $\frac{\pi}{2} m$ haben. Auch die entsprechende Aussage über konvexe Körper konstanter Helligkeit läßt sich auf beliebige Flächen mit konstantem Projektionsmaß verallgemeinern.

Literatur

[1] *J. Favard:* Une définition de la longueur et de l'aire, C. r. Acad. Sci. (Paris) **194**, 344–346 (1932).

[2] *T. Bonnesen, W. Fenchel*: Theorie der konvexen Körper, Ergebn. der Math., Bd. 3, Springer 1934.