Werk

Titel: Ein Beitrag zur Konstruierbarkeit geometrischer Aufgaben in der hyperbolischen Eb...

Autor: STROMMER, J.

Jahr: 1962

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0066|log42

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ein Beitrag zur Konstruierbarkeit geometrischer Aufgaben in der hyperbolischen Ebene

Von

J. Strommer, Budapest

Mit 5 Textabbildungen

(Eingegangen am 21. September 1960)

1. Die traditionellen Hilfsmittel der geometrischen Konstruktionen sind das Lineal und der Zirkel. Schon früh wurde das Interesse der Geometer von der Frage angezogen, ob es möglich ist, bei der Lösung geometrischer Aufgaben den Zirkel teilweise oder ganz durch andere geometrische Instrumente zu ersetzen.

Eine der am häufigsten mit dem Zirkel ausgeführten Operationen besteht darin, auf einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte aus eine gegebene Strecke abzutragen; diese Operation ist gleichbedeutend mit der Bestimmung des Schnittpunktes eines gegebenen Kreises mit einer durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden. In der Praxis führt man eine solche Operation häufig auch ohne Benützung des Zirkels aus, indem man sich eines Papierstreifens oder eines Lineals mit Einteilung bedient. Irgend ein solches Instrument nennen wir einen Streckenübertrager.

Es ist bekannt, daß in der euklidischen Geometrie diejenigen geometrischen Konstruktionsaufgaben mit Lineal und Streckenübertrager (ja sogar mit Eichmaß, d. h. mit einem Instrument, welches nur das Abtragen einer einzigen bestimmten Strecke ermöglicht) ausführbar sind, die sich auf Grund der ersten vier Axiomgruppen der euklidischen Geometrie lösen lassen[1]. In der hyperbolischen Geometrie erfordern sämtliche bekannten Konstruktionen der Parallelen durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden die Bestimmung des Schnittpunktes eines Kreises mit einer Geraden, die nicht durch seinen Mittelpunkt geht; deswegen kann man nicht erwarten, daß auch in der hyperbolischen Geometrie mit Lineal und Streckenübertrager allein diejenigen geome-

[1] S. *Hilbert* [4], S. 115—118.

trischen Konstruktionsaufgaben ausführbar sind, die sich auf Grund der Axiome I—IV lösen lassen, die *Hilbert* zur Begründung der *Bolyai-Lobatschefskys*chen Geometrie angenommen hat[2].

Die Theorie der geometrischen Konstruktionen lehrt, daß sich eine weitere Ausdehnung des Gebietes der mit vorgeschriebenen Hilfsmitteln lösbaren Aufgaben ergibt, wenn auf dem Zeichenblatte andere Figuren gegeben sind, die bestimmten Bedingungen genügen, wie z. B. ein Parallelogramm oder ein Quadrat usw.[3]. Die Ausdehnung des Gebietes der lösbaren Aufgaben hängt davon ab, was man als gegeben annimmt, bevor man den Gebrauch jedes anderen Instrumentes verbannt. Es wäre angemessen, als fundamentale Daten gerade diejenigen anzunehmen, welche nötig sind, um diejenigen Aufgaben mit Lineal und Streckenübertrager konstruieren zu können, deren Ausführung auf Grund der Axiome I—IV der hyperbolischen Geometrie möglich ist.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß diejenigen geometrischen Konstruktionsaufgaben mit Lineal und Streckenübertrager konstruierbar sind, die sich unter Zugrundelegung der Axiome I—IV ausführen lassen, falls zwei zueinander parallele Gerade gegeben sind.

J. C. H. Gerretsen[4] hat gezeigt, daß die Existenz der Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden die einen inneren Punkt, sowie mit einem anderen Kreise, der sowohl einen inneren als auch einen äußeren Punkt des gegebenen Kreises enthält, auf Grund der Axiome I—IV nachgewiesen werden kann. Von dieser Tatsache aus wird im Folgenden auch gezeigt, daß sich sämtliche geometrische Konstruktionsaufgaben, die mittels des Lineals und des Zirkels lösbar sind, notwendig mit Lineal und Streckenübertrager ausführen lassen, falls zwei zueinander parallele Gerade gegeben sind.

2. Wir erkennen sofort, daß unter Zugrundelegung der Axiome I—IV alle und nur die elementaren Konstruktionsaufgaben lösbar sind, die sich auf die folgenden Aufgaben 1—5 zurückführen lassen:

Aufgabe 1. Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden.

Aufgabe 2. Den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden, falls die Geraden nicht parallel sind und kein gemeinsames Lot haben.

---

[2] *Hilbert* [3], S. 137—140, s. auch *Hilbert* [4], Anhang III, S. 159—164.
[3] Vgl. z. B. *Enriques* [1], S. 73—77.
[4] *Gerretsen* [2], S. 565—566.

Aufgabe 3. Eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden von einem Punkte aus abzutragen.

Aufgabe 4. Einen gegebenen Winkel an einen gegebenen Halbstrahl anzutragen.

Aufgabe 5. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen.

Wir fügen den Grundaufgaben 1—5 noch die folgende hinzu, die, wie im folgenden gezeigt wird, durch die eben genannten Aufgaben gelöst werden kann:

Aufgabe 6. Zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt eine Senkrechte zu ziehen.

Zur Ausführung der Aufgaben 1—2 bedürfen wir des Lineals, und um die Aufgabe 3 auszuführen, genügt es den Streckenübertrager anzuwenden.

Die Aufgabe 6 lösen wir auf folgende Weise. Es sei A ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden[5]; dann bestimmen wir auf dieser und

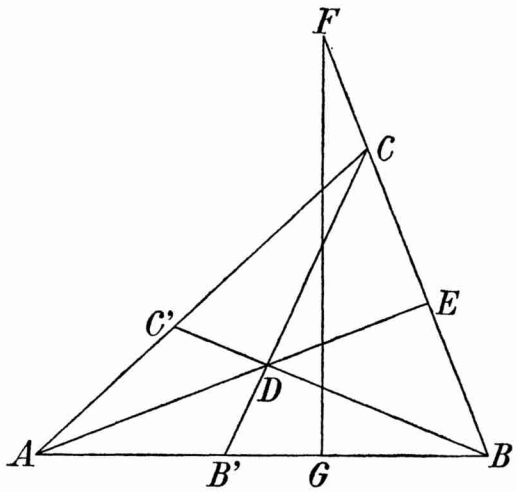

Abb. 1

auf einer beliebigen anderen durch A gehenden Geraden die Punkte B und C, so daß die Strecken AB und AC einander gleich werden (Abb. 1). Es sei nun B' irgend ein Punkt auf der Geraden AB, der zwischen A und B liegt und wir tragen von A aus auf der Geraden AC die Strecke AB' ab, etwa bis C'. Die Geraden BC' und CB' mögen sich

[5] Wir erlauben uns, wie es üblich ist, bei den Konstruktionen beliebige Hilfspunkte zu benützen.

in D, die Geraden BC und AD in E schneiden. Man trage auf der Geraden BC von B aus nach C hin die Strecke AB bis F ab und die Strecke BE auf der Geraden AB von B aus nach A hin bis G: dann ist die Gerade FG zu der Geraden AB senkrecht.

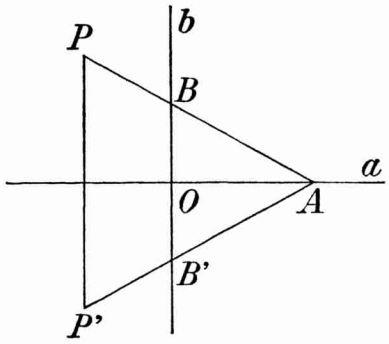

Abb. 2

Es sei nun a die gegebene Gerade und P der gegebene Punkt. Liegt der Punkt P außerhalb der Geraden a, dann bestimmen wir eine Gerade b, die zu der Geraden a senkrecht ist. Wir wählen auf der Geraden a einen Punkt A, so daß A und P auf verschiedenen Seiten der Geraden b liegen (Abb. 2). Die Gerade b treffe a in O und AP in B. Wir verlängern die Strecke OB um sich selbst über den Punkt O hinaus bis B' und tragen auf der Geraden AB' von A aus nach B' hin die Strecke AP etwa bis P' ab: dann ist PP' die gesuchte Senkrechte.

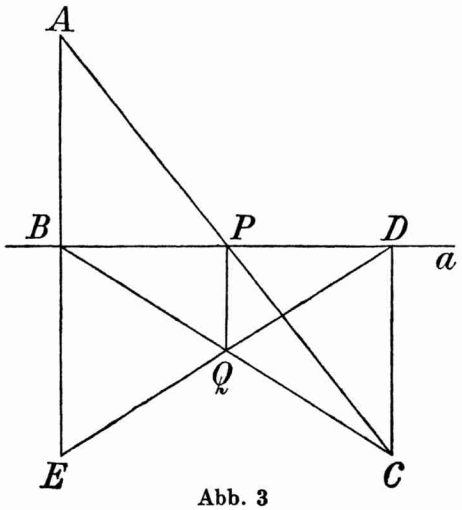

Abb. 3

Ist ferner P ein Punkt der Geraden a, dann fällen wir von einem beliebigen, außerhalb der Geraden a gelegenen Punkte A aus das Lot auf a (Abb. 3). Der Fußpunkt dieses Lotes sei B. Wir verlängern die

Strecken AP und BP um sich selbst über den Punkt P hinaus bis C und D, ferner die Strecke AB um sich selbst über B hinaus bis E. Die Geraden BC und DE mögen sich in Q schneiden: dann ist PQ die gesuchte Senkrechte; die Aufgabe 6 ist somit gelöst.

Wir können nunmehr leicht auch die Aufgabe 4 allein mittels Lineals und Streckenübertragers lösen.

Um endlich die Aufgabe 5 auszuführen, falls zwei zueinander parallele Gerade a und b gegeben sind, benutzen wir die folgende einfache Konstruktion: es sei P der gegebene Punkt, l die gegebene Gerade und Q der Fußpunkt des aus P auf l gefällten Lotes. Wir errichten dann in irgendeinem Punkte A der Geraden a eine Senkrechte auf a und tragen von A aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin die Strecke PQ ab, etwa bis B und C (Abb. 4). Aus dem Punkte B fällen wir das Lot auf b und verlängern dieses um sich selbst über den Fußpunkt hinaus bis D, ebenso das aus diesem Punkte auf a gefällte Lot um sich selbst über den Fußpunkt hinaus bis E. Sodann fällen wir aus C das Lot auf b und verlängern auch dieses um sich selbst über den Fußpunkt hinaus etwa bis F. Die aus B auf EF gefällte Senkrechte treffe nun EF in G: dann ist $\sphericalangle ABG$ der zu der Lotstrecke PQ gehörige Parallelwinkel. In der Tat: BG ist nach *Hjelmslev* parallel zu a[6].

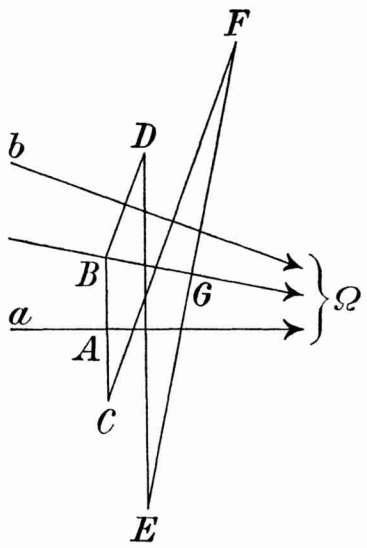

Abb. 4

Damit ist gezeigt, daß die Aufgaben 1—5 sämtlich durch Lineal und Streckenübertrager lösbar sind, falls zwei zueinander parallele Geraden gegeben sind.

3. Nachdem so die Konstruktionen, die man mit dem Lineal und dem Streckenübertrager ausführen kann, untersucht worden sind, wollen wir nun zusehen, inwieweit der Zirkel durch den Streckenübertrager völlig ersetzt werden kann.

---

[6] Vgl. *Hjelmslev* [5].

Zu dem Zwecke führen wir zunächst folgende Bezeichnungsweise ein. Wir bezeichnen die zu den Lotstrecken $a, b, \ldots$ gehörigen Parallelwinkel stets mit dem entsprechenden griechischen Kleinbuchstaben, d. h. es ist

$$\alpha = \Pi(a),\ \beta = \Pi(b), \ldots$$

und wir verstehen unter den Strecken $a', b', \ldots$ jene Strecken, deren Parallelwinkel die Parallelwinkel von $a, b, \ldots$ jeweils zu einem Rechten ergänzen; es gilt also

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \frac{1}{2}\pi \quad \text{usw.}$$

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Parallelwinkel die Lotstrecke zu bestimmen, können wir auf eine Weise lösen, die nur das Ziehen von Parallelen und das Fällen von Loten erfordert[7].

Es seien nun O und X zwei beliebige Punkte der Ebene und F der Fußpunkt des aus einem beliebigen, außerhalb der Geraden OX gelegenen Punkte P auf die Gerade OX gefällten Lotes; wir bestimmen auf dem Halbstrahl FP den Punkt P', so daß die zu den Strecken $FP = y$ und $FP' = y'$ gehörigen Parallelwinkel komplementär sind, d. h. daß

$$\Pi(y) + \Pi(y') = \frac{1}{2}\pi$$

wird (Abb. 5). Wir ordnen einem beliebigen Punkte P einer durch die Gerade OX bestimmten Halbebene den nach der obigen Vorschrift eindeutig bestimmten Punkt P' zu. Die so erklärte Abbildung ist eineindeutig und involutorisch.

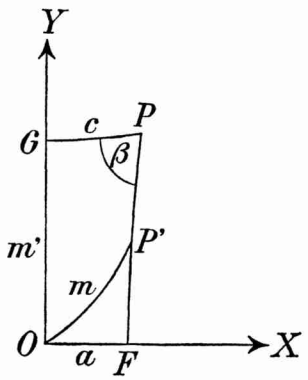

Abb. 5

Aus der obigen Definition folgt sofort, daß jedem Punkte einer von einem Punkte der Geraden OX ausgehenden Halbgeraden, die auf der Geraden OX senkrecht steht, ein Punkt derselben Halbgeraden entspricht.

Es sei nun Y ein von O verschiedener Punkt der in O auf OX errichteten Senkrechten, der auf derselben Seite der Geraden OX liegt, wie der Punkt P, und G der Treffpunkt des aus P auf die Gerade OY

[7] S. z. B. *Liebmann* [6], S. 116—117, oder auch *Liebmann* [8], S. 32.

gefällten Lotes; wir setzen voraus, daß die Punkte P und G verschieden sind. Wenn dann

$$PF = l, \quad OF = a, \quad OG = m', \quad PG = c, \quad \sphericalangle FPG = \beta$$

ist, so gibt es nach einem bekannten Satze von *F. Engel*[8] ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse m und den Katheten a und l', d. h. es ist $OP' = m$. Hieraus ergibt sich sofort, daß jedem Punkte des Kreises mit dem Mittelpunkte O durch den Punkt P', der auf derselben Seite der Geraden OX liegt wie der Punkt P, ein und nur ein Punkt der Geraden PG entspricht.

Die obige Tatsache ermöglicht es uns, die Aufgabe, die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise zu finden, mittels Lineals und Streckenübertragers zu lösen; wir schlagen folgendes Verfahren ein. Es sei O der Mittelpunkt und m der Halbmesser des gegebenen Kreises und l die gegebene Gerade (Abb. 5). Aus O fällen wir das Lot auf l; der Fußpunkt dieses Lotes sei F. Wir errichten in O die Senkrechte auf OF und bestimmen auf dieser Geraden den Punkt G, so daß $OG = m'$ wird. Die in G auf die Gerade OG errichtete Senkrechte treffe l in P. Ferner bestimmen wir auf der Geraden l den Punkt P', so daß die zu den Strecken FP und FP' gehörigen Parallelwinkel komplementär werden: dann ist P' einer der gesuchten Schnittpunkte.

Um endlich die Aufgabe auszuführen, die Schnittpunkte zweier Kreise zu finden, benutzen wir folgende einfache Konstruktion: es seien O und O_1 die Mittelpunkte der gegebenen Kreise mit den Halbmessern m bzw. m_1. Wir errichten in O und O_1 die Senkrechten auf OO_1 und bestimmen auf diesen Geraden die Punkte G bzw. G_1, so daß $OG = m'$ und $OG_1 = m_1'$ wird. Ferner errichten wir in G und G_1 die Senkrechten auf die Geraden OG bzw. OG_1; diese Geraden mögen einander in P schneiden. Sodann fällen wir aus P das Lot auf OO_1; der Fußpunkt dieses Lotes sei F. Wir bestimmen auf der Geraden PF den Punkt P', so daß die zu den Strecken FP und FP' gehörigen Parallelwinkel komplementär werden: dann ist P' einer der gesuchten Schnittpunkte der beiden Kreise.

Damit ist gezeigt, daß alle Aufgaben, die man mit dem Zirkel und Lineal ausführen kann, allein durch Lineal und Streckenübertrager lösbar sind, falls zwei zueinander parallele Geraden gegeben sind.

---

[8] S. z. B. *Liebmann* [7], S. 191, oder auch *Liebmann* [8], S. 36.

Literatur

[1] *F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, II* (Leipzig, 1907).

[2] *J. C. H. Gerretsen,* Die Begründung der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene, *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, **45** (1942), 360—366, 479—483, 559—566.

[3] *D. Hilbert,* Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, **57** (1903), 137—150.

[4] *D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie*, 8. Aufl. (Stuttgart, 1956).

[5] *J. Hjelmslev,* Neue Begründung der ebenen Geometrie, *Math. Annalen*, **64** (1907), 449—474.

[6] *H. Liebmann,* Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, **59** (1904), 110—128.

[7] *H. Liebmann,* Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, **61** (1905), 185—199.

[8] *H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie*, 3. Aufl. (Berlin und Leipzig, 1923).