

Werk

Titel: Die konstant gedrahlte Netzfläche 4. Grades.

Autor: BRAUNER, H.

Jahr: 1961

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0065|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Die konstant gedrahlte Netzfläche 4. Grades

Von

H. Brauner, Wien

(Eingegangen am 4. Mai 1960)

Mit 1 Textabbildung

In einer Reihe von Arbeiten habe ich in letzter Zeit jene windschiefen Strahlflächen behandelt, deren Drall für sämtliche Erzeugenden einen konstanten Wert (ungleich 0 oder ∞) besitzt [1], [2], [3], [4]. Insbesondere ist es bei diesen Untersuchungen, die ich einer Anregung von J. Krames verdanke, gelungen, eine von J. Krames [5], ([6], 241 f.) aufgefundene Cayleysche Strahlfläche 3. Grades, die den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert und eine zylindrische Erzeugende 2. Ordnung besitzt als *einzigste Fläche 3. Grades mit konstantem Drall* nachzuweisen [3]. Dabei wurden jedoch nur Strahlflächen in Betracht gezogen, die mindestens eine stetige Schar reeller Erzeugenden tragen; den folgenden Untersuchungen werden ebenfalls nur solche „*reellen Strahlflächen*“ zugrunde gelegt. Sie enthalten zu jeder komplexen Erzeugenden auch die konjugiert komplexe; ist eine ihrer Torsallinien komplex, so ist auch die konjugiert komplexe Gerade Torsallinie der Fläche. Neben dem einschaligen Drehhyperboloid und den Binormalenflächen algebraischer Raumkurven konstanter Torsion stellt obige Fläche 3. Grades das einzige bisher bekannte Beispiel einer algebraischen konstant gedrahlten Strahlfläche dar.

In dieser Mitteilung werden die *reellen Netzflächen 4. Grades von konstantem Drall* aufgesucht. Es existiert — bis auf Ähnlichkeiten — eine einzige Fläche dieser Art; sie ist nach der Sturmschen Einteilung von VIII. Art, besitzt eine Ferntorsallinie 2. Ordnung und oskuliert den absoluten Kegelschnitt doppelt. Diese Fläche kommt in der Literatur bisher nicht vor.

1.

Die Erzeugenden einer Strahlfläche Φ werden durch ihre zu den kartesischen Koordinaten $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$, $z = x_3 : x_0$ gehörigen

Plückerkoordinaten $p_1 : \dots : p_6$ gegeben, die stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t seien. Zwischen diesen Plückerkoordinaten gilt identisch in t

$$\Omega(p) \equiv 2(p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6) = 0. \quad (1)$$

Ist a der Abstand zweier Nachbarerzeugenden e und e_1 von Φ und φ ihr Winkel, so versteht man unter dem Drall d von Φ längs der Erzeugenden e

$$d = \lim_{e_1 \rightarrow e} \frac{a}{\varphi}. \quad (2)$$

Unter Verwendung des Richtungsvektors $\alpha(t) = (p_1, p_2, p_3)$ der Erzeugenden und des Vektors $\mathfrak{z} = \alpha \times \alpha'$ (wobei der Akzent die Differentiation nach t bedeutet), der die Richtung der Zentraltangenten angibt, berechnet man an Stelle des Ausdrucks (2)

$$d = \frac{\Omega(p') \alpha^2}{2 \mathfrak{z}^2}. \quad (3)$$

Eine algebraische Strahlfläche besitzt eine durch ihre Ordnung und ihren Rang bestimmte Zahl von isotropen Erzeugenden und Torsallinien, die insbesondere zylindrisch sein können; für diese besonderen Erzeugenden nimmt der Drall d im allgemeinen die Werte 0 oder ∞ an. Soll nun Φ einen von 0 und ∞ verschiedenen konstanten Drall besitzen, so muß (3) für diese besonderen Erzeugenden eine unbestimmte Form werden und die (unter Umständen wiederholte) Anwendung der Regel von de l'Hopital einen vorgeschriebenen Wert für d liefern. Diese in [3] durchgeführte Diskussion ergibt folgende für windschiefe Strahlflächen konstanten Dralls notwendige Bedingungen:

Satz 1: *Eine windschiefe Strahlfläche kann nur dann konstant gedraht sein, wenn*

a) *jede eigentlich nicht torsale isotrope Erzeugende eine isotrope asymptotische Ebene besitzt sowie*

b) *jede eigentliche Torsallinie entweder eine isotrope Torsalebene aufweist bzw. eine zylindrische Erzeugende mindestens zweiter Ordnung oder eine isotrope zylindrische Erzeugende ist und*

c) *zu jeder isotropen asymptotischen Ebene entweder eine Torsallinie oder eine isotrope Erzeugende gehört.*

Satz 2: *Eine windschiefe Strahlfläche konstanten Dralls besitzt keine reelle gewöhnliche Fernerzeugende, keine reelle Ferntorsallinie erster Ord-*

nung mit eigentlicher Torsalebene und keine reelle gewöhnliche Fernrückkehrerzeugende¹.

2.

Es ist zweckmäßig, zunächst jene Netze ins Auge zu fassen, die einen uneigentlichen Brennstrahl e besitzen. Sämtliche in solchen Netzen enthaltenen konstant gedrahten Strahlflächen können nämlich direkt bestimmt werden. Ist der zweite Brennstrahl f dieses Netzes eigentlich, das Netz also hyperbolisch, so ist die Netzfläche ein (im allgemeinen schiefes) Konoid. Wir fragen zunächst nach *allen konstant gedrahten Konoiden*.

Ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) werde so gewählt, daß e die Ferngerade der xy -Ebene wird und f unter Verwendung eines Parameters μ die Darstellung

$$x = \mu \sin \omega, \quad y = 0, \quad z = \mu \cos \omega \quad (\omega \text{ konstant}) \quad (4)$$

erhält. Die Plückerkoordinaten der Strahlen des durch e und f bestimmten Netzes sind dann Funktionen von μ und eines weiteren Parameters λ und es gilt

$$p_1 : \dots : p_6 = 1 : \lambda : 0 : -\lambda \mu \cos \omega : \mu \cos \omega : \lambda \mu \sin \omega. \quad (5)$$

Jede in diesem Netz enthaltene Netzfläche Φ kann durch eine Gleichung der Form $\lambda = \lambda(\mu)$ gegeben sein. Sodann errechnet man für den Drall dieser Fläche nach (3):

$$d = \cos \omega \cdot (\lambda^2 + 1) \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}. \quad (6)$$

Für konstantes d kann (6) integriert werden und unter Verwendung etwa der Anfangsbedingung $\lambda = 0$ für $\mu = 0$ erhält man

$$\lambda = \operatorname{tg} \left(\frac{\cos \omega}{d} \cdot \mu \right). \quad (7)$$

Die zugehörige Fläche besitzt nach (5) und (7) die Gleichung

$$x - y \operatorname{ctg} \frac{z}{d} - z \operatorname{tg} \omega = 0. \quad (8)$$

Diese transzendente Fläche ist für $\omega = 0$ eine Wendelfläche, die durch euklidische Verschraubung der x -Achse um die z -Achse entsteht. Durch Anwendung der Affinität

¹ Die Fernrückkehrerzeugenden wurden in [3] nicht behandelt; das obige Ergebnis folgt jedoch aus den dort angegebenen Formeln.

$$\bar{x} = x + z \operatorname{tg} \omega, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z \quad (9)$$

geht die Wendelfläche in die Fläche (8) über; bei dieser Affinität bleiben u. a. die absoluten Punkte des Brennstrahles e fest. (8) ist daher Wendelfläche einer zur euklidischen Metrik affinen Metrik, wobei das ausgeartete Grundtetraeder der Schraubung zwei absolute Punkte zu Ecken hat. Das Bündel der bei dieser affinen Schraubung festbleibenden *Schraub- F_2* besteht aus koaxialen schiefen Kreiszylindern.

Satz 3: *Die einzigen konstant gedrahten Konoide sind die Wendelflächen der euklidischen und jener affinen Schraubungen, bei denen zwei Ecken des Grundtetraeders Punkte des (euklidisch) absoluten Kegelschnittes sind.*

Daß die euklidischen Wendelflächen die einzigen geraden Konoide konstanten Dralls sind, habe ich bereits in [1] nachgewiesen.

Als zweiten Fall werden jene Netzflächen behandelt, die in einem parabolischen Netz um eine uneigentliche Gerade e liegen. Für eine reelle Fläche ist e reell und kann in der Ferngerade der xy -Ebene angenommen werden. Liegen ferner die durch den Fernpunkt der x -Achse gehenden Netzstrahlen in der Ebene $z = 0$, so besitzt das Netz unter Verwendung zweier Parameter λ und μ die Darstellung

$$p_1 : \dots : p_6 = 1 : k\mu : 0 : -k\mu^2 : \mu : \lambda \quad (k \neq 0). \quad (10)$$

Eine in diesem Netz enthaltene Fläche ist dann durch $\lambda = \lambda(\mu)$ festgelegt und für ihren Drall gilt nach (3)

$$d = \frac{1}{k} + k\mu^2; \quad (11)$$

dieser Ausdruck ist für $k \neq 0$ niemals unabhängig von μ , d. h.:

Satz 4: *Eine in einem parabolischen Netz mit Fernbrennstrahl enthaltene Strahlfläche ist niemals konstant gedraht.*

3.

Jede *Strahlfläche 4. Grades* ist in einem linearen Strahlkomplex oder einem Strahlnetz enthalten². Die von *R. Sturm* eingeführte Einteilung der Strahlflächen 4. Grades nach der Art ihrer Doppelkurve und Doppeltorse unterscheidet 12 Arten solcher Flächen, wobei die

² Eine lehrbuchartige Behandlung der Strahlflächen 4. Grades findet sich bei *E. Müller — J. Krames* ([6], S. 246 ff.). Sämtliche im folgenden verwendeten Eigenschaften solcher Flächen, die nicht mit anderen Zitaten versehen sind, können in diesem Buche nachgelesen werden.

Flächen I. und II. Art (die beide vom Geschlecht 1 sind) sowie die rationalen Strahlflächen der VII., VIII., X. und XII. Art Netzflächen sind. Unter diesen Netzflächen 4. Grades sollen nun jene konstanten Dralls herausgefunden werden.

Flächen I. Art: Diese Netzflächen Φ_I sind durch eine (2,2)-Korrespondenz zwischen den getrennten reellen oder konjugiert komplexen Netzbrennstrahlen e und f bestimmt, welche die Doppelkurve der Fläche abgeben und somit die Kuspidualpunkte der stets getrennten acht Torsallinien erster Ordnung enthalten. Die Ebenenbüschel um e und f bilden die Doppeltorse der Fläche, je vier der acht stets getrennten Torsalebene gehen durch e bzw. f . Besitzt Φ_I keine Fernerzeugende und keine zylindrische Erzeugende, so müssen, falls Φ_I konstant gedraht ist, sämtliche acht Torsallinien erster Ordnung nach Satz 1 zu isotropen Torsalebene gehören. Da durch e und f insgesamt nur höchstens vier isotrope Ebenen existieren, müßten Torsalebene zusammenfallen, was nach Obigem unmöglich ist. Ebenso besitzt Φ_I keine eigentlichen zylindrischen Erzeugenden; diese wären nämlich von erster Ordnung und nach Satz 1 isotrop, d. h. e und f sollten durch zwei konjugiert isotrope Kuspidualpunkte gehen und durch jeden Netzträger gäbe es in diesem Falle noch drei weitere Torsalebene, die — ohne zusammenzufallen — sämtlich isotrop sein müßten. Besitzt Φ_I schließlich eine Fernerzeugende, so ist diese sicher reell; nach Satz 2 müßte sie eine Ferntorsallinie erster Ordnung mit uneigentlicher Torsalebene sein. Da alle Torsalebene einen Brennstrahl enthalten, wäre dann ein Brennstrahl uneigentlich. Nach Satz 3 existiert aber keine konstant gedrahte Fläche 4. Grades dieser Art.

Flächen II. Art: Eine solche Fläche Φ_{II} entsteht aus einer I. Art, wenn die beiden Brennstrahlen e und f zusammenrücken. Φ_{II} liegt demnach in einem parabolischen Netz um eine reelle Gerade e und enthält vier stets getrennte Torsallinien zweiter Ordnung. Besitzt Φ_{II} keine Fernerzeugende und keine zylindrische Erzeugende, so müßten für konstantem Drall nach Satz 1 sämtliche Torsalebene isotrop sein und (da durch e nur zwei isotrope Ebenen existieren) zweimal zwei Torsalebene zusammenfallen, was aber bei einer Φ_{II} unmöglich ist. Für eine eigentliche Leitlinie e kommen weiters keine isotropen zylindrischen Erzeugenden vor, weil sämtliche Kuspidualpunkte einer Φ_{II} stets auf der reellen Geraden e liegen. Besitzt Φ_{II} eine nicht isotrope zylindrische Erzeugende (jedoch keine Fernerzeugende), so läge nach Satz 1 eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung mit dem Kuspidualpunkt im

Fernpunkt von e vor. Die restlichen drei Torsalebenen müßten dann nach Satz 1 isotrop sein, durch e gehen und dürften nicht zusammenfallen, was nicht möglich ist. Enthält Φ_{II} , ohne daß e uneigentlich ist, eine Fernerzeugende, so wäre diese stets reell und nach Satz 2 eine Torsallinie zweiter Ordnung. Die restlichen drei Torsallinien zweiter Ordnung hätten dann eigentliche Kuspidalpunkte und müßten nach Satz 1 zu getrennten isotropen Torsalebenen durch e gehören, was wieder unmöglich ist. Ist schließlich die Brennlinie e des parabolischen Netzes uneigentlich, so existiert nach Satz 4 keine konstant gedrahlte Fläche Φ_{II} .

Zusammenfassend kann gesagt werden:

Satz 5: *Es gibt keine reellen elliptischen Strahlflächen 4. Grades mit konstantem Drall.*

4.

Flächen VII. Art: Die rationalen Flächen Φ_{VII} sind in einem hyperbolischen oder elliptischen Strahlnetz mit den Brennstrahlen e und f enthalten und besitzen eine stets reelle Doppelerzeugende, die speziell eine gewöhnliche Rückkehrerzeugende sein kann. Die Brennstrahlen und die Doppelerzeugende bilden die Doppelkurve der Fläche. Φ_{VII} enthält vier stets getrennte Torsallinien erster Ordnung, falls eine Doppelerzeugende existiert bzw. zwei Torsallinien erster Ordnung, wenn eine Rückkehrerzeugende vorhanden ist. Die Kuspidalpunkte liegen gleichverteilt auf den doppelten Leitgeraden e und f , durch die auch die Torsalebenen gehen.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß Φ_{VII} eine *Doppelerzeugende* besitzt. Enthält Φ_{VII} dann keine Fernerzeugende, so müßten die Torsallinien bei konstantem Drall nach Satz 1 entweder isotrop zylindrisch oder mit einer isotropen Torsalebene behaftet sein. Im Falle isotroper zylindrischer Erzeugenden sind die Brennstrahlen e und f konjugiert isotrop; die Fernkurve von Φ_{VII} hat in deren Fernpunkten E_u und F_u Spitzen und ist von 4. Klasse. Die restlichen beiden Torsallinien erster Ordnung müßten zu konjugiert isotropen Torsalebenen durch e bzw. f gehören, deren isotrope Ferngeraden jedoch von den Spitzentangenten verschieden wären. Sind die Spitzentangenten nicht isotrop, so besitzt die Fernkurve noch weitere sechs isotrope Tangenten, die nach Satz 1 zu gewöhnlichen isotropen Erzeugenden der Fläche gehören müßten; da es jedoch nur vier solche geben kann, ist nach Satz 1 die Fläche nicht konstant gedraht. Sind schließlich die Spitzentangenten selbst isotrop, so gibt es durch E_u und F_u sonst keine isotrope Gerade und die

beiden restlichen Torsallinien erster Ordnung könnten daher im Gegensatz zu Satz 1 keine isotropen Torsalebenen besitzen. Eine Φ_{VII} konstanten Dralls mit einer Doppelerzeugenden und ohne Fernerzeugenden besitzt somit notwendig vier Torsallinien erster Ordnung in den vier isotropen Ebenen durch e und f .

Längs der Doppelerzeugenden, die sicher eigentlich ist, solange Φ_{VII} keine Fernerzeugenden besitzt und die wir als x -Achse des Koordinatensystems wählen, existieren zwei verschiedene Berührkorrelationen, in denen den getrennten Schnittpunkten der Doppelerzeugenden mit e und f jeweils dieselben Tangentialebenen zugewiesen werden. Ist die Doppelerzeugende zunächst zu keinem Netzbrennstrahl parallel, so sollen diese beiden Schnittpunkte die Koordinaten $E(1:\varepsilon:0:0)$ bzw. $F(1:-\varepsilon:0:0)$ erhalten, wobei $\varepsilon = 1$ im Falle eines hyperbolischen Netzes und $\varepsilon = i$ im Falle eines elliptischen Netzes zu setzen ist. Dreht man das Koordinatensystem so um die Doppelerzeugende, daß die Fernpunkte der Netzbrennstrahlen die Koordinaten $E_u(0:a:1:\varepsilon b)$ bzw. $F_u(0:\bar{a}:1:-\varepsilon b)$ (b reell $\neq 0$, a und $\bar{a}$ reell für hyperbolisches Netz und konjugiert komplex für elliptisches Netz) erhalten und bezeichnet man die Böschung der Ebenen des Büschels um die x -Achse gegen die Ebene $z = 0$ mit λ , so lauten die Gleichungen der beiden Berührkorrelationen längs der Doppelerzeugenden, die beide denselben Drall d liefern müssen:

$$x\lambda\sqrt{b(1+db)} \pm xb\sqrt{\varepsilon^2 b - d} \mp \lambda\sqrt{\varepsilon^2 b - d} - \varepsilon^2 b\sqrt{b(1+db)} = 0; \quad (12)$$

alle Wurzeln sind dabei positiv zu nehmen. Der Ebene $\lambda = 0$ speziell werden in den beiden Korrelationen zwei zum Ursprung symmetrische, verschiedene Punkte mit den Koordinaten

$$x_{1,2} \equiv \pm \xi = \pm \varepsilon^2 \sqrt{\frac{b(1+db)}{\varepsilon^2 b - d}} \quad (\xi \neq 0) \quad (13)$$

zugewiesen. Bisher wurde der Fall ausgeschlossen, daß ein Netzbrennstrahl zur Doppelerzeugenden parallel ist; dann ist das Netz hyperbolisch und die beiden Berührkorrelationen besitzen dieselbe asymptotische Ebene. Da außerdem zum Schnittpunkt der Doppelerzeugenden mit dem anderen Netzbrennstrahl in beiden Korrelationen dieselbe Tangentialebene gehört und der Drall übereinstimmen muß, sind die beiden Berührkorrelationen identisch und es liegt eine Rückkehrerzeugende vor. Das Auftreten einer Rückkehrerzeugenden wird weiter unten betrachtet.

Jede Ebene durch die Doppelerzeugende schneidet Φ_{VII} in einem irreduziblen einteiligen Kegelschnitt. Speziell die Ebene $z = 0$ enthält einen Kegelschnitt c durch die Punkte $(1 : \pm \xi : 0 : 0)$, dessen Gleichung lautet

$$x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 E y - \xi^2 = 0. \quad (14)$$

Die isotropen Ebenen durch e bzw. f besitzen in $z = 0$ Fernpunkte, die den Gleichungen

$$x^2(1 + \varepsilon^2 b^2) + y^2(a^2 + \varepsilon^2 b^2) - 2 a x y = 0 \quad (15)$$

bzw.

$$x^2(1 + \varepsilon^2 b^2) + y^2(\bar{a}^2 + \varepsilon^2 b^2) - 2 \bar{a} x y = 0 \quad (16)$$

genügen. Da diese isotropen Ebenen die Torsalebene einer konstant gedrehten Φ_{VII} wären, müßten sie den Kegelschnitt c berühren. Die Fernpunkte der Tangenten aus E bzw. F an c erfüllen die Gleichungen

$$x^2 \xi^2 + 2 x y (B \xi^2 + \varepsilon E) + y^2 [(E + \varepsilon B)^2 - C(\varepsilon^2 - \xi^2)] = 0 \quad (17)$$

bzw.

$$x^2 \xi^2 + 2 x y (B \xi^2 - \varepsilon E) + y^2 [(E - \varepsilon B)^2 - C(\varepsilon^2 - \xi^2)] = 0 \quad (18)$$

und diese Fernpunkte müßten nach Obigem mit (15) bzw. (16) identisch sein. Dies liefert für die Koeffizienten von c

$$2 B = -(a + \bar{a}) : (1 + \varepsilon^2 b^2), \quad 2 E = \xi^2(\bar{a} - a) : \varepsilon(1 + \varepsilon^2 b^2), \quad (19)$$

$$C = \frac{\xi^2}{\varepsilon^2 - \xi^2} \left[\left(\frac{E + \varepsilon B}{\xi} \right)^2 - \frac{a^2 + \varepsilon^2 b^2}{1 + \varepsilon^2 b^2} \right] = \frac{\xi^2}{\varepsilon^2 - \xi^2} \left[\left(\frac{E - \varepsilon B}{\xi} \right)^2 - \frac{\bar{a}^2 + \varepsilon^2 b^2}{1 + \varepsilon^2 b^2} \right],$$

woraus folgt

$$a^2 - \bar{a}^2 = 0. \quad (20)$$

Im Falle $a = \bar{a}$ (a reell) ist nach (15) bzw. (16) das Netz hyperbolisch ($\varepsilon = 1$) und man erhält für c eine Parameterdarstellung in der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 + t^2 : \xi + 2 B \sigma t - \xi t^2 : -2 \sigma t : 0, \quad (21)$$

wobei

$$\sigma = \frac{1 + b^2}{b} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 + a^2 + b^2}} \quad (22)$$

gilt. Φ_{VII} ist durch diesen Kegelschnitt c und die beiden doppelten Leitgeraden e und f festgelegt und besitzt nach (21) die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
p_1 : \dots : p_6 = & \xi^2 - 1 + 2\sigma\xi B(1-b^2)t - 2[\xi^2 + 1 + 2\sigma^2 b^2 B^2]t^2 - \\
& - 2\sigma\xi B(1-b^2)t^3 + (\xi^2 - 1)t^4 : \\
& : - 2\sigma\xi t + 4\sigma^2 B b^2 t^2 + 2\sigma\xi t^3 : \\
& : 2b\sigma t + 2b\sigma t^3 : \\
& : - 4\sigma^2 b t^2 : \\
& : - 2\sigma\xi b t - 4\sigma^2 B b t^2 + 2\sigma\xi b t^3 : \\
& : - 2\sigma t - 2\sigma t^3.
\end{aligned} \tag{23}$$

Berechnet man den Drall dieser Fläche nach (3), so erhält man den Quotienten zweier Polynome 12. Grades in t . Dieser Quotient ist, wie eine längere Rechnung lehrt, für reelles a und b niemals von t unabhängig, d. h. es gibt keine konstant gedrahte Fläche dieser Art.

Nach (20) ist noch der Fall $a = -\bar{a} \equiv i\alpha$ (α reell) zu diskutieren. Nach (15) bzw. (16) ist das Netz elliptisch ($\varepsilon = i$), c erhält die Parameterdarstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 - 2Et + \sigma t^2 : \xi - \sigma\xi t^2 : - 2\xi^2 t : 0, \tag{24}$$

wobei

$$\sigma = - \frac{b^2 \xi^4 (1 - \alpha^2 - b^2)}{(1 + \xi^2)(1 - b^2)^2} \tag{25}$$

gilt und die Fläche besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned}
p_1 : \dots : p_6 = & \xi^2 + 1 - 2(\alpha\xi^2 + 2E)t + 2(2\alpha E\xi^2 + 2E^2 + \\
& + \sigma - \sigma\xi^2)t^2 - 2\sigma(\alpha\xi^2 + 2E)t^3 + \sigma^2(\xi^2 + 1)t^4 : \\
& : - 2\xi^3 t + 2\sigma\xi^3 t^3 : \\
& : - 2b\xi^2 t + 4bE\xi^2 t^2 + 2b\sigma\xi^2 t^3 : \\
& : 4b\xi^4 t^2 : \\
& : 2b\xi^3 t - 2b\sigma\xi^3 t^3 : \\
& : 2\xi^2 t - 4\xi^2(\alpha\xi^2 + E)t^2 + 2\sigma\xi^2 t^3.
\end{aligned} \tag{26}$$

Der nach (3) berechnete Drall dieser Fläche kann für reelles α und b niemals von t unabhängig sein, so daß auch diese Flächen nicht konstant gedraht sind.

Nun müssen noch jene Formen der Flächen Φ_{VII} mit einer Doppelerzeugenden untersucht werden, bei denen eine Fernerzeugende existiert. Zunächst werde der Fall betrachtet, daß die Doppelerzeugende uneigentlich ist, was durch Satz 2 noch nicht erledigt ist. Die Fernebene enthält dann außer der Doppelerzeugenden noch einen einteiligen Kegelschnitt c , der nicht durch E_u bzw. F_u geht. Er schneidet den

absoluten Kegelschnitt in vier Punkten, die paarweise konjugiert komplex sind und Fernpunkte von nicht zylindrischen isotropen Erzeugenden darstellen. Nach Satz 1 müßten sämtliche dieser vier Punkte Berührungspunkte mindestens erster Ordnung zwischen den beiden Fernkegelschnitten sein, d. h. daß der Kegelschnitt c den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt. Diese beiden Kegelschnitte besitzen daher nur zwei getrennte gemeinsame Tangenten, so daß unmöglich alle vier Torsallinien erster Ordnung mit isotropen Torsalebene versehen sein können; nach Satz 1 sind diese Flächen daher nicht konstant gedraht. Enthält Φ_{VII} schließlich eine von der Doppelerzeugenden verschiedene Fernerzeugende, so müßten nach Satz 2 ein Netzträger uneigentlich sein; nach Satz 3 gibt es dann keine konstant gedrahte Fläche 4. Grades.

Besitzt nun Φ_{VII} eine *Rückkehrerzeugende*, so gibt es zwei Torsallinien erster Ordnung, die nach Satz 1 isotrop zylindrisch oder mit einer isotropen Torsalebene behaftet sein müßten. In beiden Fällen sind die Doppelgeraden e und f konjugiert komplex und das Netz daher elliptisch ($\varepsilon = i$). Längs der Rückkehrerzeugenden, die wir zunächst eigentlich voraussetzen, inzidieren die beiden Berührkorrelationen und das ist nach (12) und (13) etwa für $d = -1:b$, $\xi = 0$ der Fall. Die andere Möglichkeit $d = -b$, $\xi = \infty$ liefert nichts wesentlich anderes; es sind nur die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ vertauscht. Bei diesen Überlegungen ist allerdings vorausgesetzt, daß kein Netzbrennstrahl zur Rückkehrerzeugenden parallel ist; wäre das der Fall, so hätte dieser Brennstrahl einen reellen Fernpunkt und das Netz wäre hyperbolisch, im Widerspruch zu oben.

Jede Ebene durch die Rückkehrerzeugende enthält außerdem einen einteiligen irreduziblen Kegelschnitt, der die Rückkehrerzeugende berührt. Speziell der Kegelschnitt c in der Ebene $z = 0$ berührt die Rückkehrerzeugende im Ursprung und besitzt eine Parameterdarstellung der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 + \sigma t^2 : t + \lambda t^2 : \mu t^2 : 0 \quad (\sigma, \lambda, \mu \text{ reell}). \quad (27)$$

Setzt man $a = \alpha + i\beta$, so muß im Falle isotroper Torsalebene gelten

$$\begin{aligned} 2b^2\lambda(4\sigma + 1) + (\lambda - \alpha\mu)(4\sigma + 4\beta\mu + 1) &= 0 \\ 16b^2\mu^2 + 16b^2\lambda^2 - b^2(4\sigma + 1)^2 - 16(\lambda - \alpha\mu)^2 + (4\sigma + 4\beta\mu + 1)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

bzw. für isotrope zylindrische Erzeugenden

$$\lambda = \alpha \mu, \sigma = -1:4, \alpha^2 = \bar{\alpha}^2 = b^2 - 1. \quad (29)$$

Die durch c und die beiden Doppelgeraden e und f bestimmte Fläche hat dann nach (27) die Darstellung

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 = & 1 + (\beta \mu + 2\sigma + 1)t^2 + (2\lambda - \alpha \mu)t^3 + \\ & + (\beta \sigma \mu + \sigma^2 + \lambda^2 - \alpha \mu \lambda)t^4 : \\ & : \mu t^3 + \mu(\lambda - \alpha \mu)t^4 : \\ & : b \mu t^2 + b \mu \sigma t^4 : \\ & : b \mu^2 t^4 : \\ & : -b \mu t^3 - b \lambda \mu t^4 : \\ & : -\mu t^2 - \mu(\beta \mu + \sigma)t^4. \end{aligned} \quad (30)$$

Für ihren Drall errechnet man nach (3) den Quotienten zweier Polynome 12. Grades in t . Unter Verwendung von (28) und (29) ergibt sich nach längerer Rechnung, daß dieser Quotient für eine reelle nicht ausgeartete Fläche niemals unabhängig von t sein kann.

Die (gewöhnliche) Rückkehrerzeugende einer Φ_{VII} kann auch uneigentlich sein; bei einer reellen Fläche ist sie stets reell und daher hat nach Satz 2 eine solche Fläche niemals konstanten Drall. Liegt schließlich eine von der Rückkehrerzeugenden verschiedene Erzeugende der Fläche in der Fernebene, so ergeben die Sätze 2 und 3, daß eine Fläche nicht konstanten Dralls vorliegen muß.

Damit sind alle Fälle reeller Flächen VII. Art untersucht und es hat sich ergeben:

Satz 6: *Es gibt keine reelle Strahlfläche 4. Grades VII. Art mit konstantem Drall.*

5.

Flächen VIII. Art: Fallen die beiden Leitlinien einer Fläche VII. Art zusammen, so entsteht eine Strahlfläche VIII. Art Φ_{VIII} . Diese besitzt zwei Torsallinien zweiter Ordnung und eine Doppelerzeugende bzw. eine Torsallinie zweiter Ordnung und eine gewöhnliche Rückkehrerzeugende. Hat Φ_{VIII} im ersten Fall keine Fernerzeugende und keine zylindrische Erzeugende, so müßten die beiden Torsallinien zweiter Ordnung bei konstantem Drall nach Satz 1 zu den isotropen Ebenen durch den reellen Brennstrahl e jenes parabolischen Netzes gehören, in dem die Fläche liegt. Der Rang der Fläche ist dann sechs und ihre Fernkurve besitzt daher zwölf isotrope Tangenten als Ferngeraden isotroper asymptotischer Ebenen, von denen insbesondere zwei als

Torsalebene zu den beiden Torsallinien gehörten. Da Φ_{VIII} acht isotrope Erzeugende enthält, bleiben isotrope asymptotische Ebenen über, die weder eine isotrope noch eine torsale Erzeugende enthalten, was nach Satz 1 unzulässig ist. Besitzt Φ_{VIII} keine Fernerzeugende aber eine zylindrische Erzeugende, so ist deren Kuspidalpunkt der reelle Fernpunkt von e und nach Satz 1 läge daher eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung vor; die verbleibende Torsallinie zweiter Ordnung wäre dann nicht zylindrisch und hätte eine reelle Torsalebene, was Satz 1 verbietet. Enthält Φ_{VIII} schließlich eine von der Doppelerzeugenden verschiedene Fernerzeugende und ist e eigentlich, so müßte die Fernerzeugende nach Satz 2 eine Torsallinie zweiter Ordnung und somit reell sein; die zweite Torsallinie zweiter Ordnung könnte dann nicht zylindrisch sein und müßte im Gegensatz zu Satz 1 eine reelle Torsalebene besitzen. Daß e selbst uneigentlich ist, erscheint nach Satz 4 ausgeschlossen.

Nun bleibt noch der Fall, daß die Doppelerzeugende uneigentlich ist. Wir legen dann die Leitgerade e in die x -Achse des Koordinatensystems und die reelle Doppelerzeugende in die Ferngerade der Ebene $z = 0$. Die Fernebene enthält dann außer der Doppelgeraden noch einen einteiligen irreduziblen Kegelschnitt c , der bei konstantem Drall der Fläche den absoluten Kegelschnitt doppelt berühren müßte. Die beiden isotropen Tangenten von c müßten die Ferngeraden der beiden isotropen Torsalebene abgeben und durch den Fernpunkt E_u von e gehen. c besitzt eine Parameterdarstellung der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 + t^2 : \alpha(t^2 - 1) : 2 \alpha t \quad (\alpha \text{ reell}). \quad (31)$$

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in jenen Punkt von e , dem die Ebene $y = 0$ entspricht, so lautet die Parameterdarstellung der durch c und e bestimmten Fläche nach zweckmäßiger Wahl der Einheitsstrecke

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 = 2 t(1 + t^2) : 2 \alpha t(t^2 - 1) : 4 \alpha t^2 : \\ : 0 : -2 \alpha t(t^2 - 1) : \alpha(t^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

und nach (3) erhält man für ihren Drall

$$d = -\frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right)^2; \quad (33)$$

dieser Ausdruck kann niemals von t unabhängig sein.

Besitzt nun Φ_{VIII} eine *Rückkehrerzeugende* und somit nur eine Torsallinie zweiter Ordnung, so liegt diese stets in einer reellen Torsalebene. Sie könnte daher nach Satz 1 und 2 entweder eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung oder eine reelle Ferntorsallinie zweiter Ordnung sein. Beide Fälle sind denkbar und bedürfen einer genaueren analytischen Untersuchung. Ist schließlich die Rückkehrerzeugende oder die Leitlinie e uneigentlich, so existiert nach den Sätzen 2 bzw. 4 keine konstant gedrahte Strahlfläche dieser Art.

Um die fehlenden beiden Fälle zu diskutieren, legen wir die stets reelle Rückkehrerzeugende in die x -Achse. Die eigentliche Brennnlinie e des parabolischen Netzes besitzt den einzigen Kuspidualpunkt der Fläche als Fernpunkt und ist daher zur Rückkehrerzeugenden keinesfalls parallel. Wir wählen die y - und z -Achse so, daß e die Gleichungen

$$x + \alpha z = 0, \quad y = 0 \quad (34)$$

annimmt. Jede Ebene durch die Rückkehrerzeugende schneidet die Fläche nach einem einteiligen irreduziblen Kegelschnitt, der die Rückkehrerzeugende berührt. Speziell der in der Ebene $z = 0$ liegende Flächenkegelschnitt c soll die Rückkehrerzeugende im Punkt $(\alpha : 1 : 0 : 0)$ berühren. Durch jeden Punkt von e gehen zwei Erzeugenden, die in der diesem Punkt im parabolischen Netz um e zugewiesenen Ebene liegen; speziell durch den Fernpunkt E_u von e geht die Torsallinie zweiter Ordnung, deren Torsalebene c berührt. Diese Torsallinie ist zylindrisch oder eine Ferngerade.

Wir schließen zunächst den Fall aus, daß c die y -Achse berührt. Der funktionelle Zusammenhang zwischen den Höhenkoten z der Punkte auf e und einem geeigneten Parameter t auf c kann dann nach Wahl einer zweckmäßigen Einheitsstrecke in der Form

$$z = \mp t^2 \quad (35)$$

geschrieben werden, wobei das obere Vorzeichen zu nehmen ist, falls c die y -Achse nicht reell schneidet. Der Kegelschnitt c hat die Darstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = a + a_1 t + a_2 t^2 : 1 \pm t^2 : \pm b t^2 : 0 \quad (36)$$

und damit die Fläche Φ_{VIII}

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 = & 1 \pm (1 - \alpha a) t^2 \mp \alpha a_1 t^3 \mp \alpha a_2 t^4 : \mp b t^2 : \\ & : \pm a t^2 \pm a_1 t^3 \pm a_2 t^4 : \\ & : - b t^4 : \mp t^2 - t^4 : - \alpha b t^4. \end{aligned} \quad (37)$$

Berechnet man nach (3) den Drall dieser Fläche, so erhält man den Quotienten zweier Polynome 10. Grades und dieser Quotient ist nur dann unabhängig von t , wenn gilt:

$$a = 0, \quad a_1 = \sqrt{8:27}, \quad a_2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad b = 1:\sqrt{3}. \quad (38)$$

Die zugehörige Fläche Φ_{VIII}^*

$$p_1 : \dots : p_6 = 3\sqrt{3}(1+t^2) : -3t^2 : \sqrt{8}t^3 : -3t^4 : -3\sqrt{3}(t^2+t^4) : 0 \quad (39)$$

besitzt den konstanten Drall $d = \sqrt{3}$ und wird im letzten Abschnitt ausführlich diskutiert.

Der noch offene Fall, daß c die y -Achse berührt, liefert nach entsprechenden Normierungen die Darstellung

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 = 1 + \alpha a t^2 + \alpha a_1 t^3 + \alpha a_2 t^4 : b t^2 : -a t^2 - a_1 t^3 - a_2 t^4 : \\ : -b t^4 : t^2 : -\alpha b t^4. \end{aligned} \quad (40)$$

Für eine reelle irreduzible Fläche dieser Art ist der nach (3) berechnete Drall niemals konstant.

Wir erkennen daraus den

Satz 7: *Bis auf Ähnlichkeiten existiert eine einzige reelle Strahlfläche 4. Grades VIII. Art mit konstantem Drall.*

6.

Flächen X. Art: Die rationalen Strahlflächen Φ_X sind durch eine (1,3)-Korrespondenz zwischen den stets reellen Brennstrahlen e und f bestimmt. e ist eine dreifache Leitgerade von Φ_X , auf der sämtliche Kuspidualpunkte der vier Torsallinien liegen, f eine einfache Leitgerade, durch die die Torsalebenen gehen. Die vier Torsallinien können sämtlich von erster Ordnung sein oder paarweise zusammenfallen und somit zu einer Torsallinie zweiter Ordnung und zwei Torsallinien erster Ordnung oder sogar zu zwei getrennten Torsallinien zweiter Ordnung führen. Besitzt Φ_X keine zylindrische und keine Fernerzeugende, so müßten bei konstantem Drall nach Satz 1 sämtliche Torsallinien zu isotropen Torsalebenen gehören. Das ist nur so möglich, daß Φ_X zwei Torsallinien zweiter Ordnung in den isotropen Ebenen durch f besitzt. Die Fernkurve von Φ_X enthält den Fernpunkt der dreifachen Leitgeraden als dreifachen Punkt mit drei stets getrennten Tangenten. Sie ist von 6. Klasse und besitzt daher zwölf isotrope Tangenten, die Ferngeraden von isotropen asymptotischen Ebenen oder isotropen Torsalebenen sind.

Nach Satz 1 würden zwei für die Torsallinien und höchstens acht für die isotropen Erzeugenden verbraucht. Es blieben somit mindestens zwei isotrope asymptotische Ebenen, die weder eine isotrope noch eine torsale Erzeugende enthielten, was nach Satz 1 für Flächen konstanten Dralls unmöglich ist.

Besitzt nun Φ_x eine zylindrische Erzeugende, so ist diese reell, weil ihr Kuspidalpunkt der reelle Fernpunkt der Leitlinie e ist; es läge somit eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung vor. Da bei einer solchen die Torsalebene mit der asymptotischen Ebene zusammenfällt ([6], S. 102), enthält die Ferngerade dieser Ebene im Fernpunkt von e vier Schnittpunkte mit der Fernkurve von Φ_x ; die Torsalebene geht aber auch durch die einfache Leitgerade f . Ihre Ferngerade schneidet daher die Fernkurve der Fläche außerdem im Fernpunkt der einfachen Leitgeraden. Die Fernkurve zerfällt somit und enthält eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung mit eigentlicher Torsalebene. Die restlichen Torsallinien müßten nach Satz 1 Torsallinien erster Ordnung in den isotropen Ebenen durch f sein. Dieser Fall muß analytisch untersucht werden. Ist schließlich eine Leitgerade uneigentlich, so können die Flächen nach Satz 3 nicht konstant gedraht sein.

Besitzt Φ_x eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung mit eigentlicher Torsalebene, so zerfällt die Fernkurve der Fläche in diese Torsallinie und eine irreduzible einteilige Kubik c . Jeder Schnittpunkt von c mit dem absoluten Kegelschnitt i ist Fernpunkt einer isotropen nicht zylindrischen Erzeugenden; nach Satz 1 müßte bei konstantem Drall in jedem Schnittpunkt dieser Art zumindest eine Berührung erster Ordnung zwischen c und i vorliegen. Da keiner dieser Punkte reell ist, muß die Kubik c den absoluten Kegelschnitt i in zwei Punkten I und $\bar{I}$ oskulieren. c besitzt im Fernpunkt der dreifachen Leitgeraden e einen Doppelpunkt; dieser Doppelpunkt ist gleichzeitig Kuspidalpunkt der Ferntorsallinie. Die Fläche Φ_x ist durch c und die beiden Leitgeraden e und f bestimmt. In jeder Ebene durch e liegt genau eine Erzeugende, die durch den Schnittpunkt dieser Ebene mit der einfachen Leitgeraden f und den Restschnittpunkt dieser Ebene mit c geht. Speziell in der Verbindungsebene von e mit der Ferntorsallinie liegt keine weitere Erzeugende von Φ_x , d. h. die Ferntorsallinie muß c im Doppelpunkt berühren. Da die Ferntorsallinie von zweiter Ordnung ist, geht durch den Fernpunkt der dreifachen Leitgeraden keine weitere Erzeugende und c besitzt daher keine weitere Tangente im Doppelpunkt und hat eine Spitze mit der Ferntorsallinie als Spizentangente. c ist dann

von 3. Klasse und hat sechs isotrope Tangenten, die sämtlich für die doppelte Oskulation mit i verbraucht sind. Die beiden Torsallinien erster Ordnung, die isotrope Torsalebene besitzen müßten, sind also selbst isotrop und da die Torsalebene durch die einfache Leitgerade f gehen, ist der Fernpunkt von f der absolute Pol der gemeinsamen Sehne von c und i .

Wir legen das Koordinatensystem so, daß die Punkte I und $\bar{I}$ in die absoluten Punkte der xy -Ebene fallen und außerdem die Spitze E_u von c auf der Ferngeraden der Ebene $x = 0$ liegt; E_u habe die Koordinaten $(0 : 0 : 1 : a)$, wobei a reell und $\neq 0$ ist. Die Kubik c ist dann zu $x = 0$ projektiv symmetrisch ([3], S. 107); wählt man als Parameter t auf c den Wert $x : y$ des Schnittpunktes von $z = 0$ mit dem den betreffenden Kurvenpunkt aus der Spitze E_u projizierenden Strahl, so lautet die Parameterdarstellung von c

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 2t^3 : 3t^2 + 1 : \sqrt{3}(t^2 + 1). \quad (41)$$

Es gilt $a = \sqrt{3}$ und der Fernpunkt der einfachen Leitgeraden f hat die Koordinaten $(0 : 0 : 0 : 1)$. Legt man den Ursprung des Koordinatensystems so auf e , daß f die x -Achse schneidet, so lauten die Parameterdarstellungen der beiden Leitgeraden

$$e \dots x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \mu : 0 : 1 : \sqrt{3}, \quad f \dots x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : c : 0 : \lambda \\ (c \neq 0). \quad (42)$$

Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung der Fläche zu

$$p_1 : \dots : p_6 = 2t^4 : t + 3t^3 : \sqrt{3}(t + t^3) : c\sqrt{3}(1 + 3t^2) : \\ : c(t + 3t^3) : -c\sqrt{3}(t + 3t^3) \quad (43)$$

und nach (3) besitzt sie den Drall

$$d = -\frac{c\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right). \quad (44)$$

Dieser Wert ist niemals konstant.

Flächen XII. Art: Die rationalen Flächen Φ_{XII} entstehen aus jenen der X. Art, wenn die beiden Netzbrennstrahlen zusammenfallen. Diese Flächen sind daher in einem parabolischen Netz enthalten und besitzen den Brennstrahl e entweder in zweifacher Weise als Torsallinie zweiter Ordnung oder als Torsallinie vierter Ordnung (Voss'sche Flächen). Besitzt Φ_{XII} keine Fernerzeugende, so müßte die reelle Gerade e bei konstantem Drall eine zylindrische Erzeugende mindestens zweiter

Ordnung sein, die beiden Kuspidalpunkte müßten zusammenfallen und es würde eine Vosssche Fläche mit einer zylindrischen Erzeugenden vierter Ordnung vorliegen. Diese kann durch eine Projektivität zwischen einer reellen Kurve 3. Ordnung und einer ihrer Tangenten erzeugt werden, wobei dem eigentlichen Berührungspunkt dieser Tangente in der Projektivität ihr Fernpunkt zugewiesen wird. Nach entsprechenden Normierungen besitzt diese Fläche die Darstellung

$$p_1 : \dots : p_6 = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 : t^3 : t^4 : 0 : -t^3 - \alpha t^4 : \\ : t^2 + \alpha t^3. \quad (45)$$

Für ihren Drall erhält man nach (3) den Quotienten zweier Polynome 8. Grades in t und der Koeffizientenvergleich liefert keine reelle Φ_{XII} konstanten Dralls, wohl aber eine *stets komplexe Fläche* mit der Darstellung

$$p_1 : \dots : p_6 = -\frac{i}{8} + \frac{i}{2} t^2 + i t^4 : t^3 : t^4 : 0 : -t^3 - \alpha t^4 : t^2 + \alpha t^3, \quad (46)$$

die den *reellen konstanten Drall* $d = -1 : 9$ besitzt.

Enthält Φ_{XII} schließlich eine Fernerzeugende, so müßte nach Satz 2 eine Torsallinie mindestens zweiter Ordnung in der Fernebene liegen, die aber mit dem Brennstrahl e zusammenfällt. Nach Satz 4 gibt es keine Fläche konstanten Dralls dieser Art.

Somit gilt:

Satz 8: *Es gibt keine reellen Strahlflächen 4. Grades X. und XII. Art mit konstantem Drall.*

7.

Nach den vorhergehenden Überlegungen existiert bis auf Ähnlichkeiten eine einzige reelle Netzfläche 4. Grades mit konstantem Drall. Sie ist nach 5. von VIII. Art; wird im Gegensatz zu 5. die Einheitsstrecke des Raumes nicht speziell gewählt, so lautet die Parameterdarstellung der Fläche Φ_{VIII}^*

$$p_1 : \dots : p_6 = 3\sqrt{3}(1+t^2) : -3t^2 : \sqrt{8}t^3 : -\sqrt{3}dt^4 : -3d(t^2+t^4) : 0, \quad (47)$$

wobei d ihren konstanten Drall bedeutet. Man berechnet als ihre Gleichung:

$$9(xz + \sqrt{3}yz - dy)^2 + 8\sqrt{3}y^3(x + \sqrt{3}y) = 0. \quad (48)$$

Sie ist in einem parabolischen Netz um die z -Achse enthalten und besitzt die x -Achse als Rückkehrerzeugende. Ihr Schnitt mit $z = 0$

ist außerdem eine Hyperbel h , deren Mittelpunkt M der Ursprung ist, die die Rückkehrerzeugende zur Asymptote besitzt und einen Asymptotenwinkel von 30° aufweist (s. Abb.). Projiziert man die Erzeugenden der Fläche in Richtung der Rückkehrerzeugenden auf die yz -Ebene

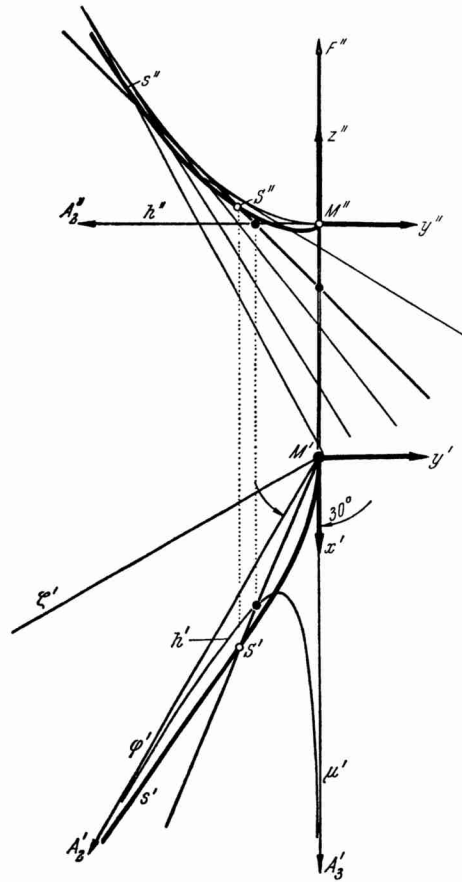


Abb. 1. Die konstant gedrahte Netzfläche 4. Grades. Die vollständige Fläche entsteht nach Spiegelung des gezeichneten Teiles an der z -Achse.

(s. Abb.), so entsteht als scheinbarer Umriß nach (47) die Parabel $3\sqrt{3} dz - 2y^2 = 0$. Die Berührungskorrelation längs der z -Achse ist dadurch festgelegt, daß dem Mittelpunkt M der Hyperbel h die Verbindungsebene μ mit der Rückkehrerzeugenden zugewiesen wird, dem Fernpunkt F die Verbindungsebene φ mit der zweiten Asymptote von h

und dem Punkt $z = \frac{\sqrt{3}}{2} d$ die Ebene ζ , die zu μ bezüglich φ symmetrisch liegt. In der Ebene ζ liegen isotrope Erzeugenden von Φ_{VIII}^* , deren Schnittpunkte mit $z = 0$ zusammen mit den Asymptoten die Hyperbel h festlegen. Die *Fernkurve* von Φ_{VIII}^* zerfällt in eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung, die F mit dem Fernpunkt der von der Rückkehrerzeugenden verschiedenen Asymptote von h verbindet und eine rationale Kubik

$$9z^2(x + \sqrt{3}y) + 8\sqrt{3}y^3 = 0 \quad (49)$$

mit einer Spitze im Fernpunkt der Rückkehrerzeugenden, die den absoluten Kegelschnitt in den beiden absoluten Punkten der Ebene ζ oskuliert. Die *Striktionslinie* s von Φ_{VIII}^* hat die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 &= \sqrt{6}(3 + 2t^2) : 6\sqrt{3}d(t + t^3) : \\ &: -6dt^3 : \sqrt{2}d(-3t^2 + 2t^4); \end{aligned} \quad (50)$$

es ist dies eine *Raumkurve 4. Ordnung 2. Art*, deren Trisekanten jene Strahlschar auf dem hyperbolischen Paraboloid Ψ

$$(\sqrt{3}x + y)(\sqrt{3}x + 5y) + 6\sqrt{3}dz = 0 \quad (51)$$

erfüllen, die die Ferngerade der Ebene φ enthält. s entsteht als Schnitt von Ψ mit dem geraden Konoid 3. Grades

$$z(\sqrt{3}x + y)(x + \sqrt{3}y) = d y(\sqrt{3}x + 5y) \quad (52)$$

um die z -Achse, das mit Ψ eine Scheitelerzeugende und eine Ferngerade gemeinsam hat. s geht durch M , oskuliert μ und berührt dort die Rückkehrerzeugende und geht ferner durch F , oskuliert φ und berührt dort die Ferntorsallinie. Die vollständige Striktionslinie von Φ_{VIII}^* ist, da Φ_{VIII}^* den Rang 5 besitzt, von 10. Ordnung und besteht aus der „eigentlichen Striktionslinie“ s , der doppelt zu zählenden Ferntorsallinie und aus den doppelt zu zählenden isotropen Erzeugenden in der Ebene ζ (vgl. [10], S. 580, [11], S. 261 und [6], S. 154). Nach (47) umhüllen die Zentralebenen von Φ_{VIII}^* eine Böschungsfläche mit einer kubischen Parabel als Gratlinie; der Richtkegel dieser *Zentraltorse* ist ein Drehkegel vom Öffnungswinkel $\pi/3$. Variiert d , so erhält man ∞^1 Flächen Φ_{VIII}^* , die durch zentrische Streckung aus M ineinander übergehen; jede dieser Flächen ist zur z -Achse axial symmetrisch.

Nach Untersuchungen von K. Strubecker [7] (s. auch [6], S. 163f) kann Φ_{VIII}^* als Bahnfläche einer ihrer Erzeugenden bei einer gewissen eingliedrigten Kollineationsgruppe erzeugt werden. Das Fixtetraeder dieser Kollineationen besteht dabei aus dem Mittelpunkt M (1 : 0 : 0 : 0)

der Hyperbel h , den Fernpunkten $A_2(0 : -\sqrt{3} : 1 : 0)$ und $A_3(0 : 1 : 0 : 0)$ von h und dem Fernpunkt $F(0 : 0 : 0 : 1)$ der doppelten Leitgeraden. Bei dieser Kollineationsgruppe bleiben die Quadriken $\mathcal{A}$

$$z(x + \sqrt{3} y) + \lambda y = 0 \quad (53)$$

eines Büschels durch ein gemeinsames Erzeugendenvierseit einzeln fest. Zeichnet man eines der hyperbolischen Paraboloiden $\mathcal{A}$ als Maßfläche einer nichteuklidischen Maßbestimmung aus, so stellt die obige Kollineationsgruppe eine gewisse *nichteuklidische Schraubung* dar und Φ_{VIII}^* ist eine *nichteuklidische Strahlschraubfläche* von jener Art, deren Erzeugenden eine Seite des Fixtetraeders schneiden. *Strubecker* nennt solche Flächen 4. Grades „*Mohrmannsche Flächen*“; *H. Mohrmann* [8] und *H. Neudorfer* [9] haben insbesondere die Schmieglinien solcher Flächen untersucht. Die Schraublinien sind dabei Raumkurven 3. Ordnung mit einem gemeinsamen Schmiegtetraeder, das durch folgende Stücke bestimmt ist: der Kuspidalpunkt F mit der Torsalerzeugenden und der Torsalebene φ , der Fernpunkt A_3 der Rückkehrerzeugenden mit der Rückkehrerzeugenden und der Ebene $z = 0$. Eine dieser Bahnkurben liegt auf der Fläche Φ_{VIII}^* und ist dort *Schmieglinie*. Φ_{VIII}^* ist nun nicht nur nichteuklidische Strahlschraubfläche einer einzigen nichteuklidischen Schraubung, sondern sogar von ∞^1 solchen Schraubungen, da der Fixpunkt A_3 in einem beliebigen Punkt $\hat{A}_3$ auf der Rückkehrerzeugenden gewählt werden kann, wobei an Stelle der Ebene $z = 0$ dann die Ebene jenes Flächenkegelschnittes von Φ_{VIII}^* als Fixtetraederebene zu nehmen ist, der die Rückkehrerzeugende in $\hat{A}_3$ berührt. Insgesamt gestattet somit Φ_{VIII}^* eine *zweigliedrige Gruppe* projektiver Automorphismen, die unter Verwendung zweier Parameter ω und τ lauten

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 = \tau^2 x_0 + \tau^2 \omega x_1 + \tau^2 \omega \sqrt{3} x_2 : \tau^3 x_1 + \tau(\tau^2 - 1) \sqrt{3} x_2 : \\ : \tau x_2 : \omega x_2 + x_3. \end{aligned} \quad (54)$$

Zu jeder dieser ∞^1 nichteuklidischen Schraubungen gibt es eine auf Φ_{VIII}^* gelegene Bahnkurve, die dort Schmieglinie ist. Alle Schmieglinien von Φ_{VIII}^* sind somit Kurven 3. Ordnung; sie hyperoskulieren sich im Kuspidalpunkt F und berühren alle die Rückkehrerzeugende. Projiziert man sie aus F auf die Ebene $z = 0$, so erhält man ein quadratisches Kegelschnittssystem; alle diese Kegelschnitte oskulieren sich im Schnittpunkt A_2 der Torsallinie mit der Hyperbel h (vgl. [9], S. 211).

Die Fläche ist eindeutig bestimmt, wenn man die Berührkorrelation längs ihrer doppelten Leitgeraden und ihre Fernkurve kennt. Diese

Fernkurve besteht aus der durch die Berührungskorrelation bereits festgelegten Ferntorsallinie und einer gespitzten Kubik, die den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert und im Fernpunkt der Leitgeraden die Ferntorsallinie als Wendetangente besitzt. Eine solche Kubik ist durch weitere Vorgabe ihrer (auf zwei Arten wählbaren) Spitze eindeutig festgelegt (vgl. [3], S. 108). Das Gesamtergebnis unserer Untersuchungen kann daher wie folgt zusammengefaßt werden:

Satz 9: *Die einzige konstant gedrahlte reelle Netzfläche 4. Grades ist jene den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulierende Mohrmannsche Fläche, deren Torsallinie uneigentlich ist, die eine eigentliche Torsalebene besitzt und deren eigentliche Rückkehrerzeugende die Torsalebene unter einem Winkel von 30° so durchsetzt, daß deren Normale in der Torsalebene durch den Kuspidualpunkt der Fläche geht.*

Dadurch ist die Fläche bis auf Ähnlichkeiten bestimmt.

Literatur

- [1] H. Brauner, Über Strahlenflächen von konstantem Drall. Mh. Math. **63**, 101—111 (1959).
- [2] H. Brauner, Eine Verallgemeinerung des Problems der Cesàrokurven. Math. Annalen **138**, 27—41 (1959).
- [3] H. Brauner, Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall. Mh. Math. **64**, 101—109 (1960).
- [4] H. Brauner, Erweiterung des Begriffs Drall auf Mongesche Flächen. Anz. Akad. Wiss. Wien (im Druck).
- [5] J. Krames, Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlich ferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **133**, 65—90 (1924).
- [6] E. Müller-J. Krames, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke (1931).
- [7] K. Strubecker, Über nichteuklidische Schraubungen. Mh. Math. **38**, 63—84 (1931).
- [8] H. Mohrmann, Über die Haupttangentenkurven auf Netzflächen. Math. Annalen **73**, 571—595 (1913).
- [9] H. Neudorfer, Konstruktion der Haupttangentenkurven auf Netzflächen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **134**, 205—214 (1925).
- [10] J. Krames, Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **127**, 563—584 (1918).
- [11] J. Krames, Über das Zerfallen der Striktionslinie von Regelflächen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **135**, 227—269 (1926).