

Werk

Titel: Buchbesprechungen.

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0062|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Buchbesprechungen

Sto zadan. Von *H. Steinhaus*. Mit 165 Textabb., 196 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. Cena zł. 15.—.

Dies ist eine Sammlung von hundert mathematischen Problemen leichter und schwieriger Art, sowohl unterhaltsam als auch lehrreich. Es sind Probleme aus zahlreichen verschiedenen Gebieten und viele sind hier zum ersten Mal in einem Buch erschienen. Die Kapitel sind: 1. Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen. 2. Punkte, Polygone, Kreis, Ellipse. 3. Räumliche Aufgaben, Polyeder, Kugel. 4. Praktische und nicht praktische Aufgaben. Die letzten drei Kapitel enthalten verschiedene eingekleidete Aufgaben, z. B. über das Schachbrett, über elliptische Billardspiele u. a. m. Die Lösungen der hundert Aufgaben sind vollständig ausgeführt und von zahlreichen schönen Figuren begleitet. Jeder Liebhaber der Mathematik wird sich über dieses Büchlein freuen, von dem hoffentlich bald eine Übersetzung erscheinen wird.

K. Prachar, Wien

Arithmetik. Von *P. B. Fischer*. Dritte Auflage. (Sammlung Götschen: Band 47.) Mit 19 Textabb., 152 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM. 2.40.

Die vorliegende dritte Auflage des Büchleins unterscheidet sich von der 1938 erschienenen ersten, welche in *Mh. Math.* 47 besprochen wurde, nur durch ganz geringfügige Ergänzungen und Änderungen und kann zur Wiederholung und Vertiefung der in der Mittelschule erworbenen Kenntnisse aus Arithmetik durchaus empfohlen werden.

W. Nöbauer, Wien

Lehrbuch und Aufgabensammlung der Mathematik für die 1. und 2. Klasse der Mittelschulen. Von *E. Ludwig* und *J. Laub*. Mit 231 Textabb., VII, 306 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1957. Geb. S 46.—.

Für den Mathematikunterricht an der Unterstufe unserer Mittelschulen wurde bisher als Lehr- und Übungsbuch meist das Buch von *Prowaznik* und *Klusacek* verwendet, während sich für den Unterricht der Oberstufe die von *Ludwig* und *Wühr* vorgenommene Neubearbeitung der Aufgabensammlung von *Rosenberg* — in der auch der Lehrstoff selbst knapp, aber gut verständlich dargestellt ist — als unentbehrliches Hilfsmittel erwiesen hat. Dieses bisher nur für die Oberstufe existierende Unterrichtswerk soll durch den vorliegenden und einen für die 3. und 4. Klasse bestimmten, in Vorbereitung befindlichen Band „nach unten“ fortgesetzt werden.

Das Erscheinen des Buches ist vor allem aus zwei Gründen sehr willkommen: Einerseits bereiten ja gerade an der Unterstufe der Mittelschule dem Mathematiklehrer viele Dinge große methodische Schwierigkeiten; bei ihrer Überwindung wird ihm die klare und übersichtliche Darstellung des Lehrstoffes, wie sie hier erfolgt, eine wertvolle Hilfe geben, während für den Schüler vor allem die bei jeder Lehrstoffeinheit ausgeführten Musterbeispiele von Nutzen sein werden. Andererseits soll die Anzahl der zur Verfügung stehenden Übungsaufgaben in der Mittelschule möglichst groß sein; mit den in diesem Buch ent-

haltenen 4460 Aufgaben und den Aufgaben aus dem Buch von *Prowaznik-Klusacek* wird aber jeder Lehrer auskommen; hervorzuheben sind die vielen „eingekleideten“ Aufgaben aus Gebieten, für die gegenwärtig bei unseren 10- bis 12jährigen Schülern besonderes Interesse vorhanden ist, z. B. Sport, Technik usw.; solche Aufgaben kann ja der Lehrer nur unter beträchtlichem Arbeitsaufwand selbst zusammenstellen.

Das Buch, das in Inhalt und Gliederung natürlich dem gegenwärtig in Österreich gültigen Lehrplan entspricht, also in Arithmetik die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalzahlen und Brüchen sowie die Schlußrechnungen und ihre Anwendung umfaßt, in Geometrie vor allem die grundlegenden Eigenschaften von Dreieck, Viereck, Kreis und einigen einfachen Körpern, wird bestimmt bald an allen österreichischen Mittelschulen Verwendung finden.

W. Nöbauer, Wien

Stereometrie. Von *M. Miller*. (Sammlung Crantz.) Mit 102 Textabb., 100 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. DM 4.60.

An sehr interessanten Beispielen führt der Verfasser die Leser durch das Gebiet der Stereometrie und führt dabei elementare Rechnungen an der Pyramide, dem Prisma, den fünf regelmäßigen Polyedern, dem ebenflächigen Prismatoid, dem Drehkegel und Drehzylinder und an Kugelteilen vor. Zu 62 Übungsaufgaben sind Lösungshinweise und die Ergebnisse angegeben. Dadurch ist das Büchlein vorzüglich zum Selbststudium auch jener Leser geeignet, die über keine tiefgründige mathematische Ausbildung verfügen. Schöne Figuren begleiten den Text.

Dem Fachmann wie dem mathematisch interessierten Leser wird dieses Büchlein viel Freude bereiten.

J. Laub, Wien

Calcolo delle matrici. Von *S. Cherubino*. (Monografie Matematiche: Band 4.) VII, 322 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1957. Lire 4000.

Die Theorie der Matrizen hat in Italien eine alte, auf *Gaetano Scorza* zurückgehende Tradition, dessen bekanntes Buch „Corpi numerici e algebre“ (1921) die Grundzüge der Matrizenrechnung enthält und sie zur Konstruktion von Algebren benutzt. Aber nicht nur diese rein algebraischen Fragestellungen haben das Interesse an der Matrizenrechnung wach gehalten, sondern fast noch mehr die Probleme der *Riemannschen Matrizen*, die ebenfalls von *Gaetano Scorza* intensiv studiert worden waren; daraus folgten viele neuartige Beziehungen zur Theorie analytischer Funktionen mehrerer Variablen, den Abelschen Funktionskörpern, und zu den durch derartige Funktionen parametrisierten algebraischen Mannigfaltigkeiten, den Abelschen Mannigfaltigkeiten. Die Herkunft aus diesem geistigen Erbe ist auch dem vorliegenden Lehrbuch der Matrizenrechnung deutlich aufgeprägt, wenn es sich auch im einzelnen den heutigen Erfordernissen entsprechend anpaßt.

In den beiden ersten Kapiteln wird der formale Kalkül entwickelt und die grundlegenden Begriffe eingeführt. Verf. geht hier von dem Satz aus, daß eine Matrix durch gewisse „elementare“ Operationen in eine Dreiecksmatrix übergeführt werden kann; dazu müssen allerdings die Elemente einem Körper angehören, was für die zu beweisenden Sätze eine überflüssige Einschränkung ist. Die Einführung leidet so etwas an Geschlossenheit, weil die Kenntnis der Determinantentheorie vorausgesetzt wird und der Begriff des äußeren Produktes nicht vorkommt. Im übrigen aber ist die Darstellung im allgemeinen geschickt gewählt,

sehr breit und ausführlich in den Einzelheiten und leicht verständlich. Das 3. Kapitel enthält Sätze über die Eigenwerte und deren Abschätzungen, die heute besonders aktuell sind, wo ein großer Teil der mathematischen Arbeit dem Dienste an modernen Rechenautomaten untergeordnet wird. Dagegen ist in anderer Hinsicht wieder sehr interessant und bemerkenswert das letzte Kapitel über Matrizenfunktionen, in dem die Theorie analytischer Funktionen hyperkomplexer Variablen nach *Spampinato* dargelegt wird. W. Gröbner, Innsbruck

Sur les bases des groupes d'ordre fini. Von *S. Piccard*. (Mémoires de l'Université de Neuchâtel: Tome 25.) XXIV, 242 S. Neuchâtel: Secrétariat de l'Université. 1957.

Als Basis einer endlichen Gruppe wird ein Erzeugendensystem dieser Gruppe mit kleinstmöglicher Elementzahl bezeichnet, und die Verfasserin stellt in dem Buch verschiedene von ihr erzielte Resultate dar, die mit dem Begriff der Basis in Zusammenhang stehen. Ein Großteil der Untersuchungen beschäftigt sich mit Basen von Permutationsgruppen; dabei sind überaus viele Fallunterscheidungen, Hilfssätze und Rechnungen erforderlich, zumal da sich die Ergebnisse oft auf ganz spezielle Permutationsgruppen beziehen. Das Buch bildet deshalb vor allem eine nützliche Ergänzung unserer Kenntnisse über Permutationsgruppen.

Unter den behandelten Problemen seien erwähnt: Die Frage nach den Basen der symmetrischen und der alternierenden Gruppe, wo ein Element ein Zyklus ist. Die Frage nach der Gesamtzahl aller Basen einer primitiven Permutationsgruppe mit zweigliedriger Basis; man findet hier unter anderem auch eine vollständige Klassifizierung aller Basen für die alternierenden Gruppen A_4, A_5, A_6, A_7 — bei der A_7 sind es 2,308.320 insgesamt! Struktur von imprimitiven Permutationsgruppen. Systeme von Permutationen, die eine reguläre Gruppe erzeugen. Definierende Relationen für die Basen der symmetrischen Gruppe.

W. Nöbauer, Wien

Einführung in die Zahlentheorie. Von *G. H. Hardy* und *E. M. Wright*. Mit 11 Textabb., XVI, 480 S. Nach der dritten Auflage des englischen Originalwerkes übersetzt von *H. Ruoff*. München: R. Oldenbourg. 1958. DM 74.—.

Die dritte Auflage des englischen Originalwerkes wurde ausführlich in dieser Zeitschrift: *Mh. Math.* 60, 84 (1956) besprochen. Es wird daher genügen, darauf hinzuweisen und festzustellen, daß die Übersetzung recht flüssig und i. a. sehr korrekt ist. Im Gegensatz zum Originalwerk enthält das Buch ein Sachverzeichnis. Im deutschen Sprachraum werden es die Studenten sehr begrüßen, daß das für sie außerordentlich wichtige Werk nun auch in deutscher Sprache vorliegt.

N. Hofreiter, Wien

Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Von *A. Walfisz*. (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne: Tom 33.) 471 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1957.

Die Wege in der analytischen Zahlentheorie sind lang und mühsam und auch einem zuverlässigen Führer will oder kann der Leser nicht mehr folgen, wenn das Gestrüpp zu dicht wird und weit und breit nichts von einem Ziel zu sehen ist. Es ist daher zu begrüßen, wenn es der Verfasser in diesem originellen Werk unternommen hat, einige Probleme in Buchform darzustellen, die bisher nur in Originalarbeiten, in den verschiedensten Zeitschriften verstreut, zugänglich waren.

Dies umso mehr als man dem Verfasser zusammen mit einigen seiner Schüler wesentliche Beiträge zu diesen Problemen verdankt. Es handelt sich dabei um die Untersuchung der Funktion $P_k(t)$ = Differenz zwischen der Anzahl der Gitterpunkte in der k -dimensionalen Kugel mit Radius $t^{1/2}$ und dem Volumen dieser Kugel.

Schon im ersten Kapitel findet der Leser die Theorie der *Gaußschen* Summen, Darstellung von Zahlen als Summe von vier Quadraten, die *Eulersche* Summenformel, sowie die Auseinandersetzung der „*Hardy-Littlewood-Methode*“ für das vorliegende Problem. Zur Abschätzung von $P_4(x)$ nach oben werden die Methoden verwendet, welche von *Weyl*, *Hardy-Littlewood*, *v. d. Corput*, *Vinogradov*, *Hua* für die Abschätzung trigonometrischer Summen entwickelt wurden; als bestes Resultat ergibt sich $P_4(x) = O(x(\log x)^{3/4}(\log \log x)^{1/4})$. Im dritten Kapitel folgen verschiedene Resultate über die Folge $P_k(t)/t^{k/2-1}$, $k > 4$ (für $t \rightarrow \infty$), welche vor allem von *Jarník* untersucht wurde. Sätze von *Petersson*, welche vor allem eine asymptotische Formel für $P_k(n)$ geben und auch Schlüsse über das Vorzeichen von $P_k(n)$ gestatten, sowie eine bekannte *Hardysche* Identität über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von 5, 6, 7, 8 Quadraten enthält Kapitel 4. Darauf folgen verschiedene weitere asymptotische Formeln vom Verfasser und von *Lursmanaschwili*. Kapitel 6 und Kapitel 7 sind der Untersuchung der Häufigkeitsgrenzen von $P_k(t)/t^{k/2-1}$ gewidmet und enthalten einige komplizierte Rechnungen. Darauf folgen in zwei weiteren Kapiteln verschiedene Resultate über die Mittelwerte von $P^{42}(t)$ und $P_k^2(t)$. Das Schlußkapitel behandelt die Verallgemeinerung der berühmten *Hardyschen* Entwicklung für $P_2(t)$ (genauer $P_2(t+0) + P_2(t-0)$) in eine Reihe nach *Bessel*-funktionen.

Leider müssen wir uns mit dieser fragmentarischen Inhaltsübersicht begnügen. Besonders hervorzuheben sind noch die klare und gleichmäßig gut verständliche Art der Darstellung, sowie sehr gründliche Quellenangaben (in einem eigenen Anhang) und ein Ausblick auf verwandte Probleme, die im Buch nicht behandelt wurden.

Wer das schöne und bedeutende Werk durchstudiert, wird einen guten Teil der Methoden der analytischen Zahlentheorie kennen lernen, aber wohl nur eine schwache untere Abschätzung dafür erhalten, wie viel Mühe der Verfasser für seine dankenswerte Arbeit aufgewendet hat.

K. Prachar, Wien

Calculus. Von *E. S. Smith*, *M. Salkover*, *H. K. Justice*. Zweite Auflage. XIII, 520 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1958. \$ 6.50.

An unseren Universitäten wird die Vorlesung über Differential- und Integralrechnung möglichst exakt gehalten. Ziel ist vor allem, die Hörer zu logisch einwandfreiem Denken zu erziehen und ihnen eine solide Grundlage für das weitere Studium der Mathematik zu geben. In den USA ist es anders. Dort wird im ersten Hochschuljahr ein erster Kurs über Differential- und Integralrechnung („*Calculus*“ genannt) gehalten, der auch von Hörern besucht wird, die Mathematik nur als Hilfswissenschaft brauchen. Das vorliegende Buch ist ein Lehrbuch für einen solchen ersten Kurs. Ziel ist, die Hochschüler mit dem Kalkül gründlich vertraut zu machen. Auf eine solide Erklärung auch grundlegender Begriffe (z. B. Integralbegriff) wird verzichtet. Manche auch wichtige Sätze werden nur angeführt, manche (z. B. Kettenregel) mit unzureichenden Mitteln begründet. Anschauliche Überlegungen und zahlreiche durchgerechnete Beispiele sollen zum Verständnis beitragen. Dazu kommen mehr als 5000 Aufgaben mit über 2500 Lösungen. Die Aufgaben sind z. T. aus den Anwendungen entnommen,

so daß der Studierende die Bedeutung der Differential- und Integralrechnung für die Anwendungen erkennt. Zwei Kapitel bringen das Einfachste aus der Analytischen Geometrie des Raumes und über Differentialgleichungen. Studenten, die das Buch durcharbeiten, lernen gründlich differenzieren und integrieren. Die theoretische Ausbildung in der Differential- und Integralrechnung erfolgt erst im zweiten Hochschuljahr. — Die erste Auflage wurde vielfach umgearbeitet, aber der Aufbau im wesentlichen nicht geändert. *N. Hofreiter, Wien*

Höhere Mathematik für den Praktiker. Von *G. Joos* und *Th. Kaluza*. Neunte, verbesserte Auflage. Mit 97 Textabb., XII, 399 S. Leipzig: J. A. Barth. 1958. DM 21.60, geb. DM 23.10.

Die neunte Auflage bringt keine wesentlichen Änderungen gegenüber der erst vor zwei Jahren erschienenen achten Auflage. Ich verweise auf die letzten Rezensionen in dieser Zeitschrift, *Mh. Math.* **58**, 128 (1954) und **60**, 341 (1956).

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Vektorrechnung für Naturwissenschaftler und Chemiker. Von *H. Sirk*. Mit 60 Abb. in 69 Einzeldarstellungen, XII, 124 S. Darmstadt: Verlag von Dr. D. Steinkopff. 1958. Geb. DM 16.—.

Der Verfasser hielt durch lange Jahre hindurch an der Universität Wien Einführungsvorlesungen aus Mathematik, die in erster Linie für Hörer naturwissenschaftlicher Richtung bestimmt waren. Aus dieser Vorlesungstätigkeit ging die „Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker“ hervor, die soeben in achter Auflage erschienen ist. Der Erfolg dieses Werkes ist darin begründet, daß es dem Verfasser besonders gut gelungen ist, sich der naturwissenschaftlichen Denkweise eng anzupassen. In dem genannten Werk wird die Vektorrechnung nicht behandelt. Da aber die Methode der Vektorrechnung in immer stärkerem Maße in Gebiete eindringt, die sich bisher dieses Kalküls nur in geringem Maße oder gar nicht bedient haben, erscheint nun als Ergänzung zu dem genannten Werk eine Einführung in dieses Gebiet, die sich gleichfalls auf eine lange Lehrerfahrung des Verfassers stützen kann.

Der behandelte Stoff umfaßt sowohl Vektoralgebra, als auch Vektoranalysis. Die einzelnen Grundbegriffe werden jeweils anhand von Beispielen aus den verschiedensten Anwendungsgebieten eingeführt. Besonders bemerkenswert ist, daß nicht nur die traditionellen Anwendungsgebiete Berücksichtigung finden, sondern auch solche, in denen die Vektorrechnung noch nicht Allgemeingut geworden ist, wie Chemie, Kristallographie und Meteorologie. Interessant ist es, daß die Vektorrechnung auch in einem neuen und aussichtsreichen Gebiet der Medizin, nämlich in der Elektro- und Vektorkardiographie, Anwendung gefunden hat. Wenn, wie in diesem Fall, auf die Anwendungsmöglichkeiten nur hingewiesen wird, dann findet der Leser zumindest Literaturhinweise, die ihm das weitere Studium wesentlich erleichtern. Die Darstellung ist überaus anschaulich, verzichtet jedoch, vor allem in der Vektoranalysis auf exakte Beweise, sondern begnügt sich damit, den Sachverhalt plausibel zu machen. Auf diesen Umstand sollte der Leser zweckmäßiger Weise aufmerksam gemacht werden, da er selbst bei seinem Ausbildungsstand vielleicht noch nicht genügend Beurteilungsfähigkeit besitzt, um das zu erkennen.

Es ist eine Erfahrungstatsache, daß der Naturwissenschaftler, falls er nicht an sich mathematisch besonders interessiert ist, nur solche Stoffgebiete der Mathematik mit Interesse zu erlernen versucht, bei denen er sofort Anwendungs-

möglichkeiten sieht. Auf diese Forderung nimmt der Verfasser in besonders glücklicher Weise Rücksicht, so daß das Buch sicher dazu beitragen wird, der Vektorrechnung neue Freunde zu verschaffen. *E. Bukovics, Wien*

Vektoren und Matrizen. Von *S. Valentiner*. Achte, erweiterte Auflage der „Vektoranalysis“. Mit einem Anhang „Aufgaben zur Vektorrechnung“ von *H. König*. (Sammlung Götschen: Band 354/354a.) Mit 35 Textabb., 202 S. Berlin: W. d. Gruyter & Co. 1958. DM 4.80.

Von der 1950 unter dem Titel „Vektoranalysis“ erschienenen siebenten Auflage des Buches (man vergleiche die Besprechung in *Mh. Math.* **54**, 358) unterscheidet sich die vorliegende Auflage vor allem im dritten Teil, der wesentlich erweitert wurde. Insbesondere wurden neu aufgenommen die Elemente der Matrizenrechnung, und diese wird dann auch bei der Untersuchung der linearen Vektorfunktionen verwendet; auch der *Gaußsche* Algorithmus zur Auflösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems und seine Anwendung in der Ausgleichsrechnung werden nun behandelt. Ein ebenfalls neu hinzugekommener Anhang enthält 42 Aufgaben zur Vektorrechnung mit sehr ausführlichen Anleitungen zu ihrer Lösung.

Wegen der großen Wichtigkeit der Vektor- und der Matrizenrechnung für die Physik und die Technik wird das bewährte Bändchen den Studenten dieser Fächer in der neuen, modernisierten Fassung erst recht sehr von Nutzen sein.

W. Nöbauer, Wien

Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln. Tables of Series, Products, and Integrals. Von *I. M. Ryschik* und *I. S. Gradshteyn*. XXIII, 438 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 56.—.

Dieses Werk erlebte in der Sowjetunion bereits mehrere Auflagen und kommt nun in deutscher und englischer Übersetzung heraus. Es enthält zunächst Sätze und Formeln über Reihen und Produkte (20 Seiten). Dann folgen umfangreiche Tafeln für unbestimmte Integrale (80 Seiten) und für bestimmte Integrale (120 Seiten). Besonders ausführlich werden die bestimmten Integrale spezieller Funktionen behandelt. Die Integraltransformationen (*Fourier, Laplace, Hankel*) machen 20 Seiten und die speziellen Funktionen 140 Seiten aus. Dazu gehören: elliptische Integrale und Funktionen, Exponentialintegral, Eulersche Integrale, Zylinderfunktionen, Mathieusche Funktionen, Kugelfunktionen, orthogonale Polynome, hypergeometrische Funktionen und die *Riemannsche* Zetafunktion. Mit Rücksicht auf die ausführliche Behandlung der speziellen Funktionen kann das Buch als Nachschlagewerk benutzt werden. Nach vielen Formeln werden Quellenangaben gemacht. Die Anordnung ist übersichtlich und der Druck auch der komplizierten Formeln sehr gut. Das Werk ist für angewandte Mathematiker ob seines reichen und verlässlichen Inhalts besonders wertvoll.

N. Hofreiter, Wien

Funkcje Rzeczywiste. Band I. Von *R. Sikorski*. (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne: Band 35.) 534 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958.

Es ist für den Studierenden schwierig, ein einziges Buch zu finden, welches ihm einen Überblick über das gesamte Gebiet der reellen Funktionen vermittelt. Das vorliegende Buch erscheint für diesen Zweck besonders geeignet. Es beginnt

mit einem Kapitel über Funktionen, Mengen und Klassen von Mengen. Dann folgen metrische Räume und ein Kapitel über stetige Funktionen. Kapitel 4 ist mit „Gleichmäßige Konvergenz“ überschrieben. Es enthält z. B. den *Bernsteinschen* Beweis des *Weierstrassschen* Approximationssatzes. Das darauffolgende Kapitel beschäftigt sich mit den *Baireschen* Funktionen, und in zwei weiteren Kapiteln werden die Maßtheorie und das *Lebesguesche* Integral, in Kapitel 8 die Maßtheorie in Produkträumen und der Satz von *Fubini* behandelt. Dann folgen Funktionen beschränkter Schwankung und ein Kapitel über die Differenzierbarkeit von Funktionen, in dem unter anderem auch die Theorie der Distributionen auseinandergesetzt wird. Ein Schlußkapitel beschäftigt sich mit dem Begriff des *Stieltjes*-Integrale. Die Darstellung berücksichtigt überall die modernsten Ergebnisse. Besonders zu erwähnen sind die sehr zahlreichen Aufgaben, die nach jedem einzelnen Paragraph in den Text eingefügt sind und zu dessen Verständnis wesentlich beitragen. Stets wird Wert darauf gelegt, nicht bei den abstrakten Sätzen stehen zu bleiben, sondern die Theorie bis zu ihrer praktischen Anwendbarkeit zu entwickeln. Bei dieser gründlichen Darstellung bleibt hoffentlich auch noch für den zweiten Band für den Verfasser genug Arbeit zu tun übrig. Aber schon dieser erste wird bald ein unentbehrliches Hilfsmittel für jeden sein, der die moderne Entwicklung der Theorie der reellen Funktionen kennen lernen will.

K. Prachar, Wien

Geometrische Funktionentheorie. Von *G. M. Golusin*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 31.) VIII, 438 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. Geb. DM 39,60.

Dieses reichhaltige, vorzüglich der konformen Abbildung gewidmete Werk bringt zunächst die Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, wobei die Extremalprobleme der schlichten Funktionen (Variation der schlichten Funktionen nach *Schiffer* und *Spencer* sowie *Golusin*) eine wesentliche Rolle spielen, sodann wird die schlichte Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Schlitzgebiete behandelt. Es folgt nach der Kontinuitätsmethode die Abbildung auf Kreisgebiete und endlich die konforme Abbildung auf die Kreisscheibe. Transfiniten Durchmesser, Kapazität und das *Nevanlinnasche* harmonische Maß bilden den Gegenstand eines weiteren Kapitels. Majorantenprinzip nach dem *Schwarzschen* Lemma und dem *Lindelöfschen* Prinzip, Anwendungen auf Zielwerte von ganzen Funktionen, Bedeckungssätze. Die letzten Kapitel sind dem Randverhalten der analytischen Funktionen gewidmet. — Das ausgezeichnete Buch setzt die Kenntnis der Elemente der Funktionentheorie voraus.

H. Hornich, Wien

An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. Von *M. J. Lighthill*. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Mit 6 Textabb., VIII, 79 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 17s. 6d.

G. Temple hat vor kurzem die Distributionen als Klassen von Folgen unendlich oft differenzierbarer Funktionen eingeführt, die schwach gegen ein stetiges Funktional konvergieren und dabei einen von *Mikusinski* stammenden Grundgedanken verwendet. Desselben Konzepts bedient sich auch das vorliegende Buch, welches mit Erfolg bemüht ist, wichtige Ergebnisse und Anwendungen aus der Theorie der Distributionen vor allen Dingen für die Physiker darzustellen. Jedoch wird auf mathematische Strenge größter Wert gelegt. Ein Büchlein mit

verwandter Tendenz und direkt auf den Ideen von *L. Schwartz* beruhend ist bekanntlich vor einiger Zeit von *Halperin* verfaßt worden. Das Kapitel über asymptotische Entwicklung von Fouriertransformierten im vorliegenden Buch verdient besonders hervorgehoben zu werden. Die hier gegebenen Sätze und Methoden beruhen im wesentlichen auf einer geschickten Ausnützung des Riemann-Lebesgueschen Lemmas. Meiner Meinung nach ist das ansprechende und klar geschriebene Buch für jeden geeignet, der sich über die Anfangsgründe der Distributionstheorie orientieren will.

L. Schmetterer, Hamburg

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Band I. Von *L. Robin*. (Collection technique et scientifique du Centre National d'Études des Télécommunications.) Mit 7 Textabb., XXXV, 201 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. Ffr. 4300.

Es ist an sich schon erfreulich, wenn eine Forschungsstelle für Fernmelde-technik ein Buch über Kugelfunktionen herausgibt; noch mehr erfreut aber wird der Leser sein, wenn er bemerkt, daß es sich dabei um ein sehr gründliches und doch leicht verständliches Werk über diesen Gegenstand handelt. Der vorliegende erste Band (es soll ein dreibändiges Werk werden) bringt in drei Kapiteln die Legendreschen Polynome und die Funktionen zweiter Art mit nicht negativem ganzzahligem Index, die zugeordneten Legendreschen Funktionen, die Kugelflächenfunktionen ganzzahliger Ordnung. In einem Anhang werden aus jeder Funktionenklasse die einfachsten Funktionen in einer Tabelle explizit angegeben. Wenn auch der vorliegende Band vor allem die klassischen Dinge über Kugelfunktionen enthält, so ist er doch sehr faßlich geschrieben, enthält viel konkretes Material und wird daher z. B. für den Ingenieur besonders brauchbar sein (insbesondere wird auf manche kleine Irrtümer in anderen Werken verwiesen und diese werden richtiggestellt). Man kann auf das Erscheinen der beiden anderen Bände sehr gespannt sein, von denen eine Inhaltsübersicht bereits in der Einleitung zum vorliegenden Band gegeben wird und welche sehr viele Dinge enthalten werden, die in ähnlichen Werken bisher nicht zu finden waren.

K. Prachar, Wien

Operatorenrechnung. Von *J. Mikusiński*. (Mathematik für Naturwissenschaft und Technik: Band I.) Mit 177 Textabb., XII, 360 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 37.20.

Es wurde bereits bei der Besprechung der polnischen Ausgabe dieses Buches (Monatshefte 58 (1954), 218) darauf hingewiesen, daß es sich dabei um eine originelle (von der Laplace Transformation unabhängige) Einführung in die Operatorenrechnung handelt. Das Werk ist leicht und faßlich geschrieben und bringt eine Menge von interessanten Anwendungen vor allem aus der Elektrotechnik, sowie Übungsaufgaben mit Lösungen. Es ist erfreulich, daß nun eine deutsche Übersetzung nach der zweiten, erweiterten Auflage des polnischen Originals vorliegt, welche dieses schöne Buch unseren Mathematikern, Physikern und Technikern zugänglich macht.

K. Prachar, Wien

Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus. Von *W. A. Bizadse*. (Mathematische Forschungsberichte: Band V.) Mit 5 Textabb., 58 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: 1957. DM 13.20.

Die zuerst von *Tricomi* behandelten partiellen Differentialgleichungen vom gemischten Typus, die seither zu immer größer werdenden Bedeutung gelangten,

werden hier in der von *M. A. Lawrentieff* gegebenen einfachen Gestalt behandelt. Es werden einige Randwertaufgaben gelöst, wobei ein vom Verfasser formuliertes Extremalprinzip eine Rolle spielt. *H. Hornich, Wien*

Differential Equations: Geometric Theory. Von *S. Lefschetz*. (Pure and Applied Mathematics: Band VI.) Mit 73 Textabb., X, 364 S. New York—London: Interscience Publishers. 1957. \$ 9.50.

Dieses Buch ist aus der Monografie *Lectures on Differential Equations* (Princeton University Press, 1948) des Autors hervorgegangen. Wie jene behandelt es im wesentlichen Fragen des qualitativen Verhaltens von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dieses Gebiet der Differentialgleichungstheorie, das neuerlich mehr und mehr Beachtung findet, ist in den letzten fünfzehn Jahren durch den Verfasser weitgehend gefördert worden. Das vorliegende Buch ist ein weiterer und äußerst willkommener Schritt in seinem fortlaufenden Bestreben, in einem größeren Kreis Interesse für diese qualitative Theorie anzuregen und insbesondere die oft nur wenigen Spezialisten bekannten Arbeiten der sowjetischen Schule der Nachfolger *Lyapunov's* leichter allgemein zugänglich zu machen. Noch mehr als in den *Lectures* stehen geometrische Behandlungsmethoden durchwegs im Vordergrund. Die ersten drei Kapitel, die die topologischen Grundlagen, die Standardexistenz und Eindeutigkeitssätze und die bekannten Tatsachen über die linearen Systeme bringen, sind nur wenig geändert. Die nächsten vier Kapitel beschäftigen sich fast ausschließlich mit der Stabilität im Sinne von *Lyapunov* der trivialen Lösung des allgemeinen n -dimensionalen Systems $x' = P(t)x + q(x, t)$, $q(0, t) \equiv 0$. Hier ist der Großteil des Stoffes gegenüber früher neu, im besonderen sind es die hinreichenden Stabilitätsbedingungen der zweiten Methode *Lyapunov's*, die sich auf Betrachtungen der sogenannten *Lyapunov-Funktionen* stützen, die Kriterien von *Persidskii*, und die Ergebnisse von *Malkin* über den Zusammenhang der verschiedenen Bedingungen von *Lyapunov*, *Perron* und *Persidskii*. Die neuesten Resultate bezüglich der Umkehrbarkeit der Sätze in *Lyapunov's* zweiter Methode sind nicht eingeschlossen. Das achte Kapitel behandelt periodische Systeme und die Stabilität periodischer Lösungen. Die restlichen Kapitel sind den zweidimensionalen Systemen gewidmet; und zwar das neunte und zehnte (75 Seiten) den allgemeinen Systemen $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$ wo P, Q im Ursprung verschwinden und in einer Umgebung desselben analytisch sind. Die klassischen Resultate von *Poincaré* und *Bendixson* und die Untersuchungen des Verfassers und seiner Schule über den Index der kritischen Stelle, die Geometrie der Charakteristiken, ihr Verhalten im Unendlichen, und die Existenz von Grenzyklen stehen hier im Mittelpunkt der Betrachtungen. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz spielt dabei eine vorwiegende Rolle. Kurz werden auch Fragen der Struktur-Stabilität besprochen, deren Begriff auf *Andronov* und *Pontrjagin* zurückgeht und die neuerlich von *De Baggis* eingehend studiert worden ist. Die letzten zwei Kapitel schließlich beschäftigen sich mit Gleichungen zweiter Ordnung, speziell mit der *Liénardschen* Gleichung und den Gleichungen vom *Cartwright-Littlewood* Typ, den Näherungsmethoden von *Poincaré* und von *Krylov* und *Bogolyubov*. Die wichtigen Sätze von *Levinson* und *Smith* über die Existenz von Relaxationsschwingungen und die von *Cartwright* und *Littlewood*, *Reuter*, und dem Verfasser über die Beschränktheit der Lösungen und die Existenz von erzwungenen periodischen Lösungen sind teils in ihrer Originalform, teils neu, aber stets auf geometrische Betrachtungen gestützt, bewiesen. Das Kapitel über die Methoden der angenäherten Lösung bringt zuerst die Grundlagen betreffs Gleichungen

zweiter Ordnung, die einen kleinen Parameter enthalten, und dann als Illustration Anwendungen auf die Gleichung von *van der Pol* und die *Mathieusche* Gleichung. Das Buch schließt mit einem Anhang (über die *Jordan* Normalform von Matrizen und über topologische Details des Index in der Ebene und auf einer Fläche) und mit einer kurzen Liste von Problemen, die den Leser zum weiteren Eindringen in dieses interessante Gebiet der Differentialgleichungstheorie anregen sollen.

H. A. Antosiewicz, Providence

Kürzeste Linien. Von L. A. Lusternik. Mit 102 Textabb., 108 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 7.60.

Oft diskutiert man die Frage — kann, darf und soll man Fragen aus einem mathematischen Wissensgebiet, dessen Beherrschung streng logischer Schlüsse und eines hoch entwickelten mathematischen Formalismus bedarf, gemein verständlich darstellen? Es ist recht beachtenswert, daß ein so bedeutender Mathematiker, wie es der Autor dieses kleinen Büchleins ist, alle drei Fragen mit einem kräftigen „ja“ beantwortet. Und noch beachtenswerter ist es, wie er dies tut. Er will nicht streng mathematisch dozieren, er will nur Hilfsmittel aus der Elementarmathematik heranziehen. Über sein Ziel spricht er sich in der Einleitung folgendermaßen aus:

„Die Analysis hat mächtige Hilfsmittel ausgearbeitet, die viele schwierige Aufgaben manchmal automatisch zu lösen gestatten. Jedoch ist es bei jedem Stand des mathematischen Wissens außerordentlich wichtig, die einfache geometrische oder physikalische Bedeutung eines Problems zu erfassen. Man muß auch, wie die Mathematiker sagen, Aufgaben „über den Daumen“ zu lösen verstehen, d. h. eine vielleicht nicht strenge, aber einfache und anschauliche Begründung finden können.“

Im Beginn des Buches, wo es sich nur um kürzeste Linien auf Polyeder, Kugel und Kegel handelt, wird nur die geometrische Vorstellung ausgenützt. In den späteren Kapiteln aber auch physikalische Betrachtungen (potentielle Energie gespannter Fäden, Fermatsches Prinzip).

Trotz des völlig elementaren Charakters der analytischen Hilfsmittel werden dem Leser Einblicke in interessante Probleme vermittelt. Es kommen u. a. zur Sprache: Das isoperimetrische Problem und zwar nicht nur in der Ebene, sondern auch auf gekrümmten Flächen, das Problem der Brachistochrone, Kettenlinie und das Problem der kleinsten Rotationsfläche, das *Poincaré*-Modell für die Lobatschewskische Geometrie der Ebene. Das Schlußkapitel behandelt den von *Hamilton* entwickelten Zusammenhang zwischen Mechanik und Optik.

P. Funk, Wien

Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Band II. Von N. M. Günter und R. O. Kusmin. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 33.) Mit 24 Textabb., VI, 289 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 19.60.

Der vorliegende zweite Band enthält 1600 Aufgaben zu folgenden Sachgebieten: Partielle Differentialgleichungen (1. Ordnung). Reihen. Näherungsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Gleichungen der mathematischen Physik. Variationsrechnung. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Schon aus diesen Überschriften wird klar, wie ungemein nützlich auch dieser letzte Band des Werkes für den Studierenden sein wird. Ein Blick auf die einzelnen Aufgaben zeigt dies noch deutlicher. In welcher anderen Aufgabensammlung hätte z. B. der Leser Gelegenheit, Probleme über die Lösung *Fredholmscher* Integralgleichungen, Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen, Nullstellen ganzer

Funktionen, usw. zusammen mit Aufgaben über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Auswertung statistischer Beobachtungen zu finden. Hinweise für die Lösung sind bei allen schwierigeren Aufgaben am Ende des Bandes zusammengestellt. Schon bei der Besprechung des ersten Bandes wurde darauf hingewiesen, daß hier leichte und schwierigere Aufgaben in glücklicher Weise gleichzeitig dargeboten werden — mit einem Wort: *Die Aufgabensammlung*, die jeder braucht, der höhere Mathematik betreiben will.

K. Prachar, Wien

Toeplitz Forms and their Applications. Von U. Grenander und G. Szegö. (California Monographs in Mathematical Sciences.) VII, 245 S. Berkeley und Los Angeles: University of California Press. 1958. \$ 6.—.

Die *Toeplitz*-schen Formen sind ein wichtiges Hilfsmittel in der Analysis, und wie man in letzter Zeit erkannt hat, auch von Wichtigkeit für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Diese Formen sind *Hermite*-sche Formen, deren Koeffizienten nur von der Differenz der Indizes abhängen. Im Mittelpunkt stehen die Formen, welche mit den von Szegö eingeführten orthogonalen Funktionen auf dem Einheitskreis mit beliebigen Gewichtsfunktionen zusammenhängen. Die berühmten und schon bereits klassischen Sätze, welche von Szegö herrühren, beschäftigen sich mit dem asymptotischen Verhalten der Minima und der Eigenwerte solcher Formen. Der ganze Fragenkreis hängt mit dem trigonometrischen Momenten-Problem zusammen. Vertiefungen und Verallgemeinerungen dieser Sätze bilden den Inhalt des ersten Teiles. Der zweite Teil bringt Anwendungen auf die Theorie der analytischen Funktionen und auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Es handelt sich vor allem um stationäre stochastische Prozesse, und die Sätze von Kolmogoroff und Wiener finden eine einfache Darstellung.

Die Darstellung zeigt den klaren und durchsichtigen Stil, der alle Arbeiten und Bücher von Szegö auszeichnet. Diese Monografie über *Toeplitz*-sche Formen ist sehr zu begrüßen, da sie auch einem dringenden Bedürfnis entspricht und sie wird sicher dem Gegenstand neue Freunde zuführen. Das Buch ist leicht lesbar und erfordert wenig Vorkenntnisse.

E. Hlawka, Wien

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von B. W. Gnedenko. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. I. Abteilung. Mathematische Lehrbücher: Band IX. (Mit 20 Textabb., XI, 387 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. Geb. DM 29.50.

Dies ist eine deutsche Übersetzung nach der letzten (zweiten) Auflage (1954) des russischen Werkes, welche von dem Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften, Berlin, besorgt wurde. Der Verfasser schrieb (1957) auch ein Vorwort zur deutschen Ausgabe, in dem einige ergänzende Literaturhinweise enthalten sind.

Bei dem Mangel an deutschsprachigen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist jedes neue Buch an sich willkommen, und dies gilt in umso höherem Maße für ein so ausgezeichnetes Werk wie es von dem Verfasser geschaffen wurde. Das Buch ist einerseits leicht lesbar, macht andererseits keine Konzession hinsichtlich der Strenge und bringt doch die wesentlichsten Tatsachen aus allen Gebieten der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inhalt: 1. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit. 2. Eine Folge unabhängiger Versuche. 3. *Markows*-che Ketten. 4. Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen. 5. Zahlenmäßige Charakterisierung

der Zufallsgrößen. 6. Das Gesetz der großen Zahlen. 7. Charakteristische Funktionen. 8. Klassische Grenzwertsätze. 9. Die Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. 10. Die Theorie der stochastischen Prozesse. 11. Elemente der Statistik. Im Anhang finden sich historische Hinweise, Tabellen und Literatur.

Wie man sieht, war es vor allem die Absicht des Verfassers, dem Leser möglichst viele konkrete Kenntnisse zu vermitteln und dies bei möglichst geringen Voraussetzungen. Deswegen ist z. B. dem axiomatischen Aufbau ein verhältnismäßig geringer Raum gewidmet und sind im Text zahlreiche Beispiele ausführlich durchgerechnet. Die benötigten Eigenschaften des *Stieltjes*-Integrals (welches erst am Ende des 4. Kapitels eingeführt wird, um die Darstellung möglichst elementar zu halten) werden ohne ausführliche Beweise angegeben. An Speziellem wollen wir nur noch erwähnen: Die Resultate von *Kolmogorov* über die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen; die Sätze von *Helly* über die Grenzwerte von monotonen Funktionen; das ausführliche Eingehen auf die Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze, sowie das schöne Kapitel über stochastische Prozesse, in dem außer den *Kolmogorov*-schen Grundgleichungen auch Dinge wie die Spektralzerlegung der stationären Prozesse und der Ergodensatz behandelt werden. Auch das — vielleicht etwas fragmentarische — letzte Kapitel über Statistik gibt eine gute Vorstellung von den Grundideen dieses Wissensgebietes. Hervorzuheben ist ferner noch die Bezeichnungsweise. Zahlreiche Übungsaufgaben, denen oft eine Anleitung zur Lösung beigelegt ist, sind am Ende jedes Kapitels beigegeben.

K. Prachar, Wien

Arbeiten zur Informationstheorie I. Von A. J. Chintschin, D. K. Faddejew, A. N. Kolmogoroff, A. Rényi und J. Balatoni. (Mathematische Forschungsberichte: Band IV.) Mit 2 Textabb., 134 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 18.40.

In diesem Band sind die Arbeiten der Mathematiker *Chintschin*, *Faddejew*, *Kolmogoroff*, *Rényi* und *Balatoni* zur Informationstheorie enthalten. Es ist sehr zu begrüßen, daß diese Arbeiten nun auch in deutscher Sprache zugänglich werden. Besonders hinweisen möchte ich auf die beiden Arbeiten von *Chintschin*, die wohl die beste Darstellung dieses Gebietes sind. Vor allem zeichnen sie sich in gewohnter Weise durch mathematische Präzision und ausführliche Beweise aus. Man kann auf den zweiten Teil gespannt sein.

E. Hlawka, Wien

Darstellende Geometrie. Band I. Die wichtigsten Darstellungsmethoden, Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper. Von W. Haack. Zweite durchgesehene und ergänzte Auflage. (Sammlung Götschen: Band 142.) Mit 120 Textabb., 113 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM 2.40.

Dieses vornehmlich für Techniker geschriebene, nun schon in zweiter Auflage vorliegende 1. Bändchen (1. Auflage besprochen in Mh. 58, 316) der dreibändigen Götschenausgabe (2. Bd. besprochen in Mh. 58, 316, 3. Bd. in Mh. 61, 260) über Darstellende Geometrie ist seit seiner Erstauflage aus dem Jahre 1954 schon eine beliebte und vielgelesene Einführung geworden. Neben einzelnen sprachlichen Verbesserungen unterscheidet sich diese Neuauflage nur an wenigen Stellen von der Erstauflage und zwar hauptsächlich im Kapitel über Affinitäten. Hier ist eine Behandlung der Längenverzerrung einer Affinität dazugekommen und die Untersuchung der affinen Figur zu einem Kreis wurde erweitert.

H. Brauner, Wien

Analytische Geometrie. Von *K. P. Grottemeyer*. (Sammlung Götschen; Band 65/65a.) Mit 73 Textabb., 202 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM 4.80.

Die klare und präzise Darstellung bietet in übersichtlicher und doch knapper Weise jenen Stoff, der in einer Universitätsvorlesung über analytische Geometrie üblicherweise zu finden ist. Die notwendige lineare Algebra, Matrizenrechnung und Transformationstheorie der symmetrischen Matrizen wird dabei im Rahmen der geometrischen Problematik behandelt und nur das Notwendigste besprochen. Besonderer Wert wird auf geometrische Veranschaulichung gelegt, die durch die vielen Textfiguren sehr erleichtert wird.

Nach einer Einführung in die Vektoralgebra werden bei Zugrundelegung kartesischer Koordinaten die üblichen Aufgaben über Geraden und Ebenen besprochen (im Zusammenhang mit der Hesseschen Normalform hätte der Begriff der orientierten Ebenen vielleicht mehr betont werden sollen). Ein kurzer Abschnitt ist den Kugeln gewidmet. Nach einer Einführung in das Matrizenkalkül werden die affinen Transformationen, die Bewegungen und Ähnlichkeiten behandelt, ihre wichtigsten Invarianten sowie ihre Klassifikation nach dem Rang der Transformationsmatrix. Daran schließt sich eine metrische Klassifikation der Quadriken, Besprechung ihrer wesentlichsten geometrischen Eigenschaften. Die letzten Abschnitte sind der projektiven Geometrie des Raumes gewidmet (jedoch unter starker Stoffbeschränkung). Nach den homogenen kartesischen Koordinaten werden Kollineationen, Korrelationen und projektive Koordinaten eingeführt und die Quadriken im Rahmen der projektiven Geometrie untersucht (Erzeugung nach *Staudt*, *Steiner*, *Seydewitz* und Klassifikation).

Jedem Studierenden, der eine leicht lesbare, gut gegliederte erste Einführung in die analytische Geometrie des Raumes sucht, kann dieses Büchlein wärmstens empfohlen werden.

H. Brauner, Wien

Differentialgeometrie. Von *E. Kreyszig*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe A: Band 25.) Mit 105 Textabb., XI, 421 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1957. Geb. DM 36.—.

Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die vor allem durch die exakten Formulierungen, das richtige Maß an Ausführlichkeit und den methodisch meisterhaften Aufbau besticht. Obwohl das behandelte Sachgebiet bereits in einer Unzahl von Büchern verarbeitet wurde, ist trotzdem stets die persönliche Note des Autors zu spüren. In der Flächentheorie wird von der Tensoranalysis Gebrauch gemacht, wodurch das Verständnis für die Riemannsche Geometrie der Räume beliebiger Dimension weitgehend vorbereitet wird. Man mag die Frage nach dem der Flächentheorie adäquaten Kalkül beantworten wie man will; ist einmal die Wahl auf das Tensorkalkül gefallen, so wird kaum eine bessere Darstellung als die hier gebotene möglich sein. Die große Zahl der durchwegs erstklassigen Textfiguren beweist, daß bei aller Eleganz der Methode und dem hohen Maß an mathematischer Strenge doch stets Wert auf geometrische Anschaulichkeit gelegt wurde. Eine große Zahl von Aufgaben, deren Lösungen am Schluß des Buches ausführlich mitgeteilt werden und die vor allem der Einübung und Vertiefung des Stoffes dienen und kaum zusätzliche prinzipielle Erkenntnisse vermitteln, sowie eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln, Begriffe und Definitionen erhöhen die Lesbarkeit des Buches außerordentlich und tragen dazu bei, dieses Buch in die allererste Reihe der Lehrbücher über Differentialgeometrie zu rücken.

Ein kurzer Inhaltsüberblick: Einführung in die Vektorrechnung, Kurventheorie (im üblichen Umfang), 1. Grundform der Flächentheorie, Tensorbegriff, Krümmungstheorie, innere Geometrie, Abbildung von Flächen aufeinander (u. a. Auffindung einer konform invarianten Metrik der komplexen Ebene mittels der Bergmannschen Kernfunktion), Kartenentwürfe, absolute Differentiation und Parallelverschiebung, spezielle Flächen (Minimalflächen, Betragsflächen analytischer Funktionen, Torsen, Flächen konstanter Gaußscher Krümmung und ihre innere Geometrie). Es werden kaum Querverbindungen zur Variationsrechnung behandelt, noch Fragen der Differentialgeometrie im großen (Satz von Gauß-Bonnet abgesehen), dafür aber in stärkerem Umfang als sonst üblich Zusammenhänge zur klassischen Funktionentheorie. *H. Brauner, Wien*

Differentialgeometrie. Teil II. Von *A. P. Norden*. Mit 60 Textabb., VIII, 124 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 7.40.

Bezüglich der allgemeinen Charakterisierung der von *R. Sulanke* aus dem Russischen übersetzten *Nordenschen* Differentialgeometrie sei auf die Besprechung des 1. Bandes (Mh. 61, 373) verwiesen. Der vorliegende zweite Teil behandelt die Flächentheorie unter Verwendung der Gaußschen quadratischen Differentialformen in vektorieller Schreibweise. Nur an einzelnen Stellen wird das begleitende Dreiein einer Fläche eingeführt, so etwa zu einer sehr eleganten Herleitung des Theorema egregium. Besonders durch die zahlreichen in den Text eingestreuten Aufgaben, die mit Lösungsanleitungen versehen sind, wird eine Fülle echter Geometrie unter weitgehendster Beschränkung des formalen Apparates gewonnen. Das anschauliche Moment, noch betont durch die Textfiguren, steht in Darstellung und Stoffauswahl stark im Vordergrund, so daß vor allem für eine erste Bekanntschaft mit der Differentialgeometrie das *Nordensche* Werk einen idealen Führer darstellt. Die Kapitelüberschriften: Krummlinige Koordinaten, Krümmung einer Kurve auf einer Fläche, besondere Linien und Netze auf einer Fläche, innere Geometrie der Flächen, Parallelübertragung. *H. Brauner, Wien*

Kontinuierliche Geometrien. Von *F. Maeda*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 95.) Mit 12 Textabb., X, 244 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 36.—, geb. DM 39.—.

Der Zusammenhang zwischen projektiver Geometrie und Verbandstheorie wurde im Jahre 1935 von *Birkhoff* und *Menger* entdeckt: Die Gesamtheit der linearen Teilräume eines projektiven Raumes mit der Enthaltenseinsbeziehung als Ordnung bildet einen atomaren, nach oben stetigen komplementären modularen Verband, und umgekehrt ist die Gesamtheit der Atome jedes solchen Verbandes ein projektiver Raum. Man kann also eine projektive Geometrie stets als derartigen Verband auffassen. Bei geeigneter Wahl der Dimensionsdefinition haben alle Elemente dieses Verbandes als Dimension eine der Zahlen $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Wie nun *J. v. Neumann* 1936 bewiesen hat, gibt es irreduzible stetige komplementäre modulare Verbände, in denen als Werte der Dimension alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 auftreten, wo es also Elemente beliebig kleiner Dimension gibt, so daß geometrisch gesprochen die Begriffe „Punkt“ und „Gerade“ ihren Sinn verlieren. Man bezeichnet diese Verbände deshalb als kontinuierliche Geometrien. *V. Neumann* zeigte weiter, daß ein komplementärer modularer Verband der Ordnung $n \geq 4$ stets isomorph ist zum Hauptrechtsidealverband eines Matrizenringes über einen gewissen Ring und

begründete damit auch eine „Darstellungstheorie“ der kontinuierlichen Geometrien. An der Weiterentwicklung und Verallgemeinerung der Ergebnisse *v. Neumanns* war neben anderen japanischen Mathematikern *F. Maeda*, der Verfasser dieses Werkes, maßgeblich beteiligt.

Das Buch — eine Übersetzung aus dem Japanischen; die Originalausgabe ist 1952 erschienen — stellt die Theorie der kontinuierlichen Geometrien in klarer, übersichtlicher Form von Grund auf dar, beginnend mit den Elementen der Verbandstheorie. Sein Studium erfordert daher kaum Vorkenntnisse und ermöglicht es dem Leser, dieses interessante Gebiet gründlich kennenzulernen. Man muß den Übersetzern und dem Verlag dankbar sein dafür, daß sie dieses bedeutende Werk der gesamten mathematischen Welt zugänglich gemacht haben.

W. Nöbauer, Wien

Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Von *H. Hadwiger*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 93.) Mit 34 Textabb., XIII, 312 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 46.20, geb. DM 49.80.

In der Mathematik gibt es zahlreiche alte Probleme, für die schon lange schöne Lösungen gefunden wurden, die aber trotzdem neue und interessante Lösungen gezeitigt haben. Dazu gehören auch die Probleme über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. So kann man als Untertitel dieses Buches wählen: alte Probleme, aber neue Lösungen. Der Autor war wie kein zweiter berufen, das interessante Buch zu schreiben. Er konnte im Literaturverzeichnis auf 73 seiner Arbeiten hinweisen.

In dem Buch werden verschiedene Gebiete zu einem einheitlichen Ganzen zusammengefügt. Bevorzugt wird die Mengengeometrie und die Maßtheorie, während die analytischen Methoden weitgehend ausgeschaltet werden konnten. Dadurch werden Differentierbarkeitseigenschaften kaum benötigt, die in der Differentialgeometrie stets vorausgesetzt werden. Die direkte mengengeometrische Betrachtungsweise faßt die Körper als Gesamtheit der ihr angehörnden Punkte auf. Die direkten Schlüsse der Mengengeometrie sind i. a. einfacher und allgemeiner als die analytischen Methoden. Die im 1. Kapitel entwickelte Polyedergeometrie dient als Grundlage für den Aufbau der elementaren Inhaltslehre. Mit Hilfe der Zerlegungstheorie der Polyeder werden Polyederinhalt ohne Grenzbetrachtungen begründet. Die translationsinvariante Inhaltstheorie wird axiomatisch aufgebaut. Wenige Postulate definieren implizit das allgemeine Inhaltssystem, das den Polyederinhalt, den Jordanschen Inhalt und den Tarskischen Inhalt als Spezialfälle enthält. Eine wichtige Rolle spielen in dem Buch die Minkowskischen Operationen der Addition und Subtraktion, seine Theorie der Oberfläche und der konvexen Körper. Erwähnt sei auch die Brunn-Minkowskische Ungleichung. Im Rahmen der Mengengeometrie und der Maßtheorie werden die Untersuchungen über Isoperimetrie geführt. Das Buch bringt eine Herleitung der allgemeinsten im euklidischen Raum gültigen isoperimetrischen Ungleichung. Das Schlußkapitel ist der Theorie der konvexen Körper mit ihren fundamentalen Maßzahlen und der Integralgeometrie gewidmet. Erst in diesem Kapitel werden Integrale verwendet. Zusammenfassend kann gesagt werden: Das Buch gibt eine vorzügliche Synthese von alten und neuen Ergebnissen, die der Mengengeometrie, der Inhaltslehre, der Theorie der konvexen Körper und der Integralgeometrie angehören. Die Erwähnung vieler ungelöster Probleme gibt viel Anreiz zu weiteren Untersuchungen.

N. Hofreiter, Wien

Convexity. Von *H. G. Eggleston*. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; Nr. 47.) Mit 15 Textabb., VIII, 136 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 21s.

Das vorliegende Buch bringt eine Einführung in die Theorie der konvexen Mengen, wobei gleichzeitig Allgemeinheit und Einfachheit angestrebt wird. Dementsprechend wird mit Ausnahme der zwei letzten Kapitel der n -dimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt. Die Arbeitsmethode ist die der Mengen-geometrie, die nur die Grundlagen der Punktmengenlehre, der reellen Analysis und der Geometrie voraussetzt.

Das 1. Kapitel bringt die grundlegenden Eigenschaften konvexer Mengen, die im 2. Kapitel auf den Problemenkreis des *Helly*-schen Satzes angewendet werden. Nun erklärt Verf. die wichtigen Begriffe der konvexen Funktion, Richtungsableitung, Stützfunktion u. ä. und beweist darüber die im 5. Kapitel benötigten Tatsachen. Im Mittelpunkt des 4. Kapitels steht der Auswahlssatz von *Blaschke*, auf dem fast alle geometrischen Extremaltheoreme beruhen. Dann wird die Minkowskische Theorie bis zum Brunn-Minkowskischen Satz geführt, für den zwei Beweise erbracht werden. Die beiden letzten Kapitel gelten speziellen Problemen: isoperimetrische Ungleichung und einige neuere Resultate u. a. von *Besicovitch* und dem Verf.

In dem engen Rahmen konnte natürlich nur eine Auswahl aus dem Gebiet gebracht werden. Die Darstellung ist durchwegs sehr klar, die Beweise sind vollständig durchgeführt, wobei auch auf die Methode großes Gewicht gelegt wird. Hervorzuheben ist, daß jedem Abschnitt Übungsbeispiele angeschlossen sind. Der Verf. versäumt es auch nicht, auf offene Fragen hinzuweisen. Ein Verzeichnis der Quellen und der weiterführenden Literatur beschließt diese ausgezeichnete Einführung in ein Gebiet, das u. a. die Grundlage für die Geometrie der Zahlen bildet.

A. Florian, Graz

Problems in Euclidean Space: Application of Convexity. Von *H. G. Eggleston*. (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics: Band 5.) Mit 31 Textabb., VIII, 165 S. London-New York-Paris-Los Angeles: Pergamon-Press. 1957. 40s.

Bei der Formulierung und bei der Lösung zahlreicher mathematischer Probleme spielt der Begriff der Konvexität eine wichtige Rolle. Die vorliegende Monographie bringt eine Auswahl von zehn solchen Problemen, die sich auf den zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum beziehen. Zu ihrer Lösung erbrachte der Verfasser selbst sehr bedeutende Beiträge. Die Probleme sind so angeordnet, daß der Begriff der Konvexität dabei immer mehr in den Mittelpunkt rückt. Im 1. Abschnitt, der drei Fragestellungen umfaßt, bilden gewisse Eigenschaften von konvexen Mengen den Ausgangspunkt für allgemeinere mengentheoretische Untersuchungen oder es wird die Konvexität als Hilfsmittel verwendet. Der 2. Abschnitt enthält den sehr interessanten, allgemeinen Beweis des Verfassers für die Borsuksche Vermutung im dreidimensionalen Raum, die im n -dimensionalen Raum so lautet: Jede Punktmenge mit dem Durchmesser d läßt sich in $n + 1$ Teilmengen zerlegen, die Durchmesser kleiner als d haben. Im R_n wurde diese Vermutung unter einer gewissen Einschränkung bekanntlich von *H. Hadwiger* bewiesen. Im 3. Abschnitt werden gewisse von *L. Fejes Tóth* aufgeworfene Fragen im Zusammenhang mit der Annäherung von konvexen Kurven durch Polygone beantwortet. Die Ergebnisse stellen Analoga zu den *Dowker*-schen Sätzen dar. Solche Approximationen sind für Lagerungs- und Überdeckungsprobleme in der Geometrie der Zahlen von Bedeutung. Daran schließen sich Theoreme, die die Dreiecke als Extremalkurven unter den kon-

vexen Kurven auszeichnen. Der letzte Abschnitt behandelt Mengen konstanter Breite, sowie ein Extremalproblem für Dreiecke und ein Packungsproblem.

Obwohl die Behandlung solcher Probleme in der Regel keine höheren Vorkenntnisse erfordert, bieten die Beweise der oft bestechend einfachen Aussagen manchmal sehr große Schwierigkeiten und sind teilweise auch sehr langwierig. Der Verfasser macht auch auf zahlreiche noch ungelöste Probleme aufmerksam. Die Darstellung ist sehr klar und lückenlos, die Gliederung ausgezeichnet. Das Buch wird jedem Mathematiker, der sich mit Fragen der Konvexität befaßt, wertvolle Anregungen bringen.

A. Florian, Graz

Was ist eine Kurve? Von A. S. Parchomenko. Mit 23 Textabb., 140 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 8.20.

Dieses Buch ist sowohl für Lehrer an den Mittelschulen als auch zur Ergänzung der Vorlesungen für Studenten gedacht. Es enthält eine elementare und (bei den russischen Büchern bereits gewohnte) klare Darstellung der mengentheoretischen Begriffsbildungen, die für eine einwandfreie Kurven-Definition notwendig sind. Kapitelüberschriften: 1. Die Entwicklung des Kurvenbegriffes. 2. Einige Tatsachen aus der Theorie der Punktmengen. 3. Cantorsche Kurven. 4. Allgemeine Kurvendefinition. Anhang: Über den Dimensionsbegriff. Es sei nur erwähnt, daß man im 4. Kapitel u. a. auch eine Beschreibung der Mengerschen „universalen“ Kurve des dreidimensionalen Raumes findet, welche zu jeder Kurve des n -dimensionalen Raumes ein topologisches Bild als Teil enthält. Der Leser wird außer zahlreichen konkreten Einzelresultaten auch ein gutes Stück der allgemeinen Topologie kennen lernen, wenn er das Buch studiert.

K. Prachar, Wien

Geometry of Einsteins Unified Field Theory. Von V. Hlavaty. XXXII, 341 S. Groningen: P. Noordhoff. 1958. \$ 9.—, geb. \$ 9.75.

Die Idee einer einheitlichen Feldtheorie ist 40 Jahre alt. Bereits 1918 versuchte H. Weyl durch Erweiterung der geometrischen Grundlagen neben A. Einsteins weltgeometrischer Deutung der Gravitation als Krümmungseigenschaft des raumzeitlichen Kontinuums auch noch das elektromagnetische Feld weltgeometrisch zu interpretieren. Da es jedoch nicht gelang, die von der Wellenmechanik geforderte Existenz scharfer Spektrallinien durch die neue Theorie in Evidenz zu setzen, sah sich Weyl gezwungen, seine (mathematisch überaus bestechende) Theorie wieder aufzugeben. Ähnlich erging es zahlreichen anderen Versuchen. Stets waren es die Forderungen der Physik, insbesondere die der Quantentheorie, welche sich nicht in den jeweils gewählten weltgeometrischen Rahmen einfügen wollten. Auch wurde das Problem immer komplizierter, je mehr neue physikalische Felder (Mesonenfelder) als physikalische Realitäten entdeckt wurden. Sollten auch diese weltgeometrisch erfaßbar sein? Schließlich konnte man dreierlei Tendenzen zum Aufbau einheitlicher Feldtheorien unterscheiden: (1) einheitliche Feldtheorie von Gravitation und elektromagnetischem Feld (im Sinne von A. Einstein), (2) einheitliche Feldtheorie von Gravitation, elektromagnetischem Feld und Mesonenfeld (im Sinne von E. Schrödinger), (3) einheitliche Feldtheorie der verschiedenen quantentheoretischen Wellenfelder (im Sinne von W. Heisenberg). Für die Beschreibung des Gravitationsfeldes hatte sich in der Einsteinschen Theorie der zehnkomponentige symmetrische Tensor $h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda}$ bewährt, für die (Maxwellsche) Theorie des elektromagnetischen Feldes der sechskomponentige schiefsymmetrische Tensor $k_{\lambda\mu} = -k_{\mu\lambda}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$). Beschränkt man sich also auf eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus, so wird man als deren einheitliches Tensorfeld ein sechzehnkomponentiges

Tensorfeld erwarten. Nach zahlreichen physikalisch fehlgeschlagenen Versuchen entschloß sich *A. Einstein* in dem Jahre 1950, den formal einfachsten Weg zu gehen und den gravito-elektromagnetischen Feldtensor einfach als Summe von $h_{\mu\lambda}$ und $k_{\mu\lambda}$ anzusetzen. Dieser Weg wurde von mathematischer Seite zunächst als ungerechtfertigte Kombination zweier völlig verschiedener Tensoren angesehen, da die Tensorfelder $h_{\lambda\mu}$ und $k_{\lambda\mu}$ als irreduzible Bestandteile des reduzierbaren Tensorfeldes $g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu}$ erscheinen. Demgegenüber verweist *A. Einstein* auf die Bedeutung der Determinante $|g_{\lambda\mu}|$, deren Nichtverschwinden und relativer Invariantencharakter die Zuordnung von kontra- zu kovarianten Tensoren jetzt auch im asymmetrischen Falle ermöglicht, wodurch eine höchst bemerkenswerte Verallgemeinerung und Bereicherung für geometrische Entwicklungsmöglichkeiten geschaffen wurde. Der Aufbau und Ausbau einer solchen „asymmetrischen Weltgeometrie“ wurde vor 10 Jahren das Arbeitsgebiet des Verfassers. Das Ergebnis seiner zähen und bewundernswert gründlichen Untersuchungen ist das vorliegende Buch.

Drei geometrische Postulate werden an die Spitze der Theorie gestellt: (A) die einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus wird durch sechzehn Potentiale bestimmt; (B) diese Potentiale bestimmen Krümmung und Torsion des vierdimensionalen raumzeitlichen Kontinuums; (C) Die sechzehn Potentiale erscheinen als Lösung eines Systems differentieller Feldgleichungen, welchen Krümmung und Torsion des raumzeitlichen Kontinuums gewisse Bedingungen auferlegen. Die Identifikation von Schwere- bzw. elektromagnetischen Feldern ergibt sich aus den Feldgleichungen. Leider erlaubt es der Platzmangel nicht, darauf näher einzugehen.

Das Buch enthält sechs Kapitel. Deren erstes behandelt in 15 Abschnitten die Algebra des einheitlichen Tensorfeldes $g_{\lambda\mu}$. Kapitel II behandelt (zunächst allgemein, später für die Dimensionszahl $n = 4$) in 21 Abschnitten die Übertragung $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$. Kapitel III ist speziellen Problemen und singulären Fällen gewidmet (10 Abschnitte). Kapitel IV ist „Geometrie der Feldgleichungen“ betitelt und enthält in 11 Abschnitten die geometrische Theorie des hier als Problem (1) angeführten Sachverhalts. Die ausführliche Behandlung der hier als Probleme (2) und (3) angeführten Fragen bringt Kapitel V, „Physikalische Deutung der Feldgleichungen“. Das letzte Kapitel VI enthält drei Anhänge: (I) „Lichtgeometrie“, (II) Vierkomponentige Spinor-algebra und -analysis des einheitlichen Feldes $g_{\lambda\mu}$, (III) Liniengeometrie im dreidimensionalen projektiven Raum. Die „Lichtgeometrie“ diskutiert vornehmlich das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in der einheitlichen Feldtheorie in Hinblick auf den *Michelson-Versuch* einerseits und den sogenannten *Müller-Effekt* andererseits. Die Behandlung des Spinorkalküls in Anhang II verwendet in erheblichem Maße die Grundbegriffe der algebraischen Liniengeometrie. Banausen der Liniengeometrie finden alles Nötige zum Verständnis im letzten Anhang.

Druck und Ausstattung sind vorzüglich, wie man von dem verdienten Verlag nicht anders erwarten konnte. Das Erscheinen dieses sehr bedeutsamen Werkes fällt zeitlich zusammen mit Aufsehen erregenden Nachrichten über neue Erfolge einer von *W. Heisenberg* gefundenen quantentheoretischen einheitlichen Feldtheorie. Man möchte der Hoffnung Ausdruck geben, daß uns die Zukunft auch noch einen Brückenschlag vom einheitlichen Tensorfeld (im Sinne von *Einstein-Hlavaty*) zum einheitlichen Spinorfeld (im Sinne von *Heisenberg-Pauli*) bescheren mag, um so mehr, als aufgrund neuer empirischer Tatsachen der sogenannten „Parität“ auch *M. v. Laues* Wunsch nach Verstärkung der empirischen Fundamente der Theorie berücksichtigt erscheint. *M. Pinl, Köln*