

Werk

Titel: Über 4- und 5-chrome Graphen.

Autor: Zeidl, Bernhardine

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0062|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über 4- und 5-chrome Graphen

Von

Bernhardine Zeidl, Wien

(Eingegangen am 16. Oktober 1957)

Im folgenden wird eine Verschärfung eines Satzes von *G. A. Dirac* [1] über 4-chrome Graphen bewiesen. Ferner werden 4- und 5-chrome punktkritische Graphen beliebig hohen Geschlechtes konstruiert. Die hier betrachteten Graphen sind eigentliche Graphen, d. h. zwei Punkte sind höchstens durch eine Kante verbunden, und kein Punkt ist mit sich selbst durch eine Schlinge verbunden. Zunächst einige Definitionen und bekannte Sätze:

Definition 1: Ein Graph heißt k -chrom, wenn seine Punkte so in k elementfremde Klassen eingeteilt werden können, daß nie zwei Punkte derselben Klasse durch eine Kante verbunden sind, und k die kleinste Zahl dieser Eigenschaft ist.

Definition 2: Ein k -chromer Graph heißt punktkritisch, wenn kein Punkt (und alle mit diesem inzidenten Kanten) gestrichen werden kann, ohne seine Chromzahl zu reduzieren. Ein k -chromer Graph heißt kritisch, wenn kein Punkt und keine Kante gestrichen werden kann, ohne seine Chromzahl zu reduzieren.

Definition 3: Ein Weg aus einem Graphen Γ , der mit einem gegebenen Kreis $\mathfrak{K}$ aus Γ seine Endpunkte, aber keinen anderen Punkt und auch keine Kante gemein hat, heiße Sehne von $\mathfrak{K}$.

$$\mathfrak{K} = P_1 P_2 \dots P_r \dots P_s \dots P_n = P_1^1$$

1. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}$ aus Γ), der keine Artikulation ist und einen Grad ≥ 3 hat, geht mindestens eine Sehne von $\mathfrak{K}$.

Beweis für einen etwas engeren Begriff von „Sehne“ siehe [1].

Verstehen wir unter einem ungeraden Kreis einen Kreis ungerader Länge, so gilt:

¹ Zur Bezeichnungsweise: Ein Weg $\mathfrak{W}$ wird auch durch die Folge seiner Punkte $P_1 P_2 \dots P_l$ charakterisiert. Durch das Zeichen „+“ symbolisieren wir das Bilden der Vereinigungsmenge aus den Kanten-, sowie Punktmengen zweier Graphen.

2. Ist Γ ein zusammenhängender Graph ohne Artikulation und enthält Γ einen ungeraden Kreis $\mathfrak{R}$, so gibt es durch jeden Punkt Q aus Γ einen ungeraden Kreis.

Beweis siehe [2].

Definition 4: Ein eigentlicher Graph der Ordnung 4, in dem je zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind, heißt vollständiger 4-Graph. Zum vollständigen 4-Graphen homöomorphe Graphen wollen wir kurz V -Graphen nennen, und ihre Punkte vom Grade 3 Verzweigungspunkte.

Definition 5: Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten eines zusammenhängenden Graphen Γ heißt Isthmoid von Γ , wenn Γ durch Streichen aller Punkte aus $\mathfrak{M}$ und aller mit diesen inzidenten Kanten in $q \geq 2$ zueinander fremde, zusammenhängende Graphen zerfällt; und für jede echte Unter-
menge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$, Γ durch Streichen aller Punkte aus $\mathfrak{M}'$ und aller mit diesen inzidenten Kanten in $q' < q$ Graphen zerfällt.

Vergleiche [3].

G. A. Dirac bewies: Jeder 4-chrome Graph enthält einen zum vollständigen 4-Graphen homöomorphen Teilgraphen [1].

Hier wird bewiesen:

Satz 1: Jeder 4-chrome kritische Graph Γ enthält zu jedem seiner Punkte P einen V -Graphen mit P als Verzweigungspunkt, welcher einen ungeraden Kreis enthält.

Beweis: Bekanntlich ist ein kritischer 4-chromer Graph endlich, zusammenhängend, enthält keine Artikulation, und alle seine Punkte haben einen Grad ≥ 3 . Siehe [1], [4] und [5]. Auch enthält Γ als 4-chromer Graph einen ungeraden Kreis [6]. Γ erfüllt also die Bedingungen von 2, und es gibt daher durch jeden Punkt P von Γ einen ungeraden Kreis $\mathfrak{R}$. Da jeder Punkt von Γ von einem Grade ≥ 3 ist, gibt es nach 1 durch P eine Sehne $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$, deren anderen Endpunkt wir mit P_s bezeichnen. P und P_s teilen nun $\mathfrak{R}$ in zwei Bögen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Nun sind folgende Fälle denkbar:

- a) Es gibt einen inneren Punkt P_k' von $\mathfrak{B}_1$ und einen inneren Punkt P_l' von $\mathfrak{B}_2$, so daß in Γ ein Weg von P_k' nach P_l' führt, welcher weder P noch P_s enthält.
- b) Es gibt einen Weg, der weder P noch P_s enthält, und einen inneren Punkt P_k'' von $\mathfrak{B}_1$ mit einem inneren Punkt P_l'' von $\mathfrak{S}$ verbindet.
- c) Es gibt einen Weg, der weder P noch P_s enthält, und einen inneren Punkt P_k''' von $\mathfrak{B}_2$ mit einem Punkt P_l''' von $\mathfrak{S}$ verbindet.
- d) Oder aber es trifft weder a) noch b), noch c) zu.

Zu a): P' sei der letzte Punkt auf dem Wege $P_k' \dots P_l'$, der $\mathfrak{B}_1$ angehört, und Q' der erste Punkt auf diesem Wege, der nach P' auftritt und entweder auf $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{B}_2$ liegt; dann hat der Weg $P' \dots Q'$ mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ außer seinen Endpunkten keinen Punkt und auch keine Kante gemein und bildet daher mit dem ungeraden Kreis $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zusammen einen V -Graphen $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{R} + \mathfrak{S} + P' \dots Q'$.

Zu b): P'' sei der letzte Punkt auf dem Wege $P_k'' \dots P_l''$, der $\mathfrak{B}_1$ angehört, und Q'' der erste Punkt auf diesem Wege, der nach P'' auftritt und entweder auf $\mathfrak{B}_2$ oder $\mathfrak{S}$ liegt; dann ist $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + P'' \dots Q''$ ein V -Graph mit $\mathfrak{R}$ als ungeradem Kreis.

Zu c): P''' sei der letzte Punkt auf dem Wege $P_k''' \dots P_l'''$, der $\mathfrak{B}_2$ angehört, und Q''' der erste Punkt auf diesem Wege, der nach P''' auftritt und entweder auf $\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{S}$ liegt; so erhalten wir den V -Graphen $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + P''' \dots Q'''$.

Zu d): Wir zeigen nun, daß dieser Fall nicht eintreten kann. Würde d) zutreffen, so müßten P und P_s ein Isthmoid bilden: 1. Als artikulationsloser Graph kann Γ nicht bei Streichung nur eines Punktes und aller mit ihm inzidenten Kanten zerfallen. 2. Da keine Doppelkanten zugelassen wurden, kann höchstens einer der Wege $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{S}$ aus nur einer einzigen Kante bestehen. Nach Streichung von P und P_s und der mit P und P_s inzidenten Kanten zerfiele Γ nach d) in mindestens zwei zusammenhängende Teilgraphen $\mathfrak{G}_i$ ($i=1, 2, \dots, r$). Wir bilden nun die Graphen $\mathfrak{G}_i'$, indem wir zu den $\mathfrak{G}_i$ jeweils P und P_s und die Kanten aus Γ , die einen Punkt von $\mathfrak{G}_i$ mit P oder P_s verbinden, hinzufügen. Ist P mit P_s in Γ durch eine Kante verbunden, so bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{G}_0' (\Gamma = \mathfrak{G}_0' + \mathfrak{G}_1' + \dots + \mathfrak{G}_r')$. Die $\mathfrak{G}_j'$ ($j=0, 1, \dots, r$) haben paarweise genau die Punkte P, P_s gemein; und da sowohl den Bögen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ als auch der Sehne $\mathfrak{S}$ jeweils ein $\mathfrak{G}_j'$ entspricht, gibt es mindestens drei voneinander verschiedene Graphen $\mathfrak{G}_j'$.

Die $\mathfrak{G}_j'$ sind höchstens 3-chrom, da Γ kritisch 4-chrom ist. Es muß aber ein $\mathfrak{G}_k'$ geben, derart, daß P und P_s bei jeder Färbung von $\mathfrak{G}_k'$ mit drei Farben gleiche Farbe tragen müssen; und es muß auch ein $\mathfrak{G}_l'$ geben, derart, daß P und P_s bei jeder Färbung von $\mathfrak{G}_l'$ mit drei Farben verschiedene Farbe tragen müssen. Ansonsten könnte man durch geeignete Wahl der Farben stets erreichen, daß die Färbungen der $\mathfrak{G}_j'$ in P und P_s übereinstimmen, also Γ 3-chrom wäre. Dann ist aber schon der Graph $\mathfrak{G}_k' + \mathfrak{G}_l'$ 4-chrom, kann also kein echter Teilgraph des kritisch 4-chromen Graphen Γ sein. Weil Γ nach obigem mindestens drei ver-

schiedene $\mathcal{G}_j'$ enthält, müßte $\mathcal{G}_k' + \mathcal{G}_l'$ im Widerspruch dazu echt in Γ enthalten sein.

Für die Diskussion des Falles d) vergleiche [3], Satz 3.

Es ist noch zu bemerken, daß Satz 1 auch für jeden punktkritischen Graphen gilt, da jeder punktkritische Graph einen kritischen Graphen mit denselben Punkten enthält.

G. A. Dirac bewies: Gegeben sei ein $k \geq 6$ und ein $n \geq 6 \cdot 2^{[(k-6)/3]} + 2$ von derselben Parität wie k . Dann gibt es einen kritischen k -chromen Graphen der Ordnung n , welcher mehr als

$$\frac{1}{4} n^2 \sum_{i=0}^{[(k-6)/3]} \left(\frac{1}{4}\right)^i + A_k n$$

Kanten enthält. A_k ist eine allein von k abhängige Konstante und $[(k-6)/3]$ ist die größte ganze Zahl, die $(k-6)/3$ nicht übersteigt. Siehe [1].

Hier wird gezeigt:

Satz 2: Für alle $m \geq 1$ gibt es 4-chrome punktkritische Graphen der Ordnung $n = 6m + 4$, welche mehr als $(n^2 + 5n)/6$ Kanten besitzen.

Beweis durch Konstruktion: Γ sei ein Graph, bestehend aus zwei zueinander fremden Kreisen der Länge $3m + 2$:

$$\mathbb{R}_1 = P_1 P_2 \dots P_{3m+2} P_{3m+3} = P_1 \quad (P_{3m+2+i} = P_i)$$

$$\mathbb{R}_2 = Q_1 Q_2 \dots Q_{3m+2} Q_{3m+3} = Q_1 \quad (Q_{3m+2+i} = Q_i)$$

und den Kanten $P_i Q_i$ und $P_{i+1} Q_i$ ($i = 1, 2, \dots, 3m + 2$).

Behauptung: Γ ist punktkritisch 4-chrom.

Beweis: Beginnen wir die Färbung von Γ bei einem beliebigen Punkt P_i (die Überlegungen für einen beliebigen Ausgangspunkt Q_i sind analog), indem wir P_i die Farbe I und P_{i+1} die Farbe II erteilen. Q_i erhält dann, wollten wir mit drei Farben auskommen, notwendig die Farbe III, Q_{i+1} die Farbe I, P_{i+2} die Farbe III usf. Allgemein erhalten alle Punkte

$$P_{t+3i} \text{ und } Q_{t+1+3j} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, m-1 \end{matrix} \right) \text{ die Farbe I}$$

$$(T) \quad P_{t+1+3i} \text{ und } Q_{t+2+3j} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, m-1 \end{matrix} \right) \text{ die Farbe II}$$

$$P_{t+2+3i} \text{ und } Q_{t+3j} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, m-1 \\ j = 0, 1, \dots, m \end{matrix} \right) \text{ die Farbe III}$$

Q_{t+1+3m} ist demnach durch eine Kante mit Punkten aller drei Farben

verbunden, muß also notwendig mit der Farbe IV gefärbt werden. Die so definierte Färbung wollen wir F_t nennen, die Färbung, die aus F_t entsteht, indem man die Farben von Q_{t+1+3m} und P_{t+1+3m} miteinander vertauscht, mit F'_t bezeichnen. Γ ist sogar punktkritisch 4-chrom, denn es gibt zu jedem Punkt aus Γ eine Färbung von Γ mit vier Farben, bei der er als einziger die Farbe IV trägt. Für jedes Q_s ist dies F_{s-1-3m} und für P_s die Färbung F'_{s-1-3m} .

Gibt es nun in Γ Punktepaare P_r, P_s , bzw. Q_r, Q_s oder P_r, Q_s , die nicht durch eine Kante verbunden sind, derart, daß bei jeder Färbung F_t und F'_t P_r und P_s (bzw. Q_r und Q_s oder P_r und Q_s) verschiedene Farbe tragen, so kann man die Kanten, die die Punkte dieser Paare verbinden, zu Γ hinzufügen ohne die Eigenschaft „punktkritisch 4-chrom“ zu zerstören. Tun wir dies, so erhalten wir einen Graphen Γ' der Ordnung n . Für diesen berechnen wir die Anzahl der Kanten: P_r, P_s seien zwei beliebige, nicht benachbarte Punkte des Kreises $\mathfrak{R}_1$. Sie teilen $\mathfrak{R}_1$ in zwei Bögen $\mathfrak{B}_1$, mit der Länge $|r-s|$, und $\mathfrak{B}_2$ mit der Länge $3m+2-|r-s|$. P_r und P_s tragen bei der Färbung F_t wie auch F'_t nur dann gleiche Farbe, wenn die Länge des Bogens, auf dem die Kante $P_{t-1}P_t$ nicht liegt, durch 3 teilbar ist. Da die Kante $P_{t-1}P_t$ sowohl auf $\mathfrak{B}_1$, als auch auf $\mathfrak{B}_2$ liegen kann, kommen für jeden Punkt P_r nur solche Punkte P_s in Frage, für die weder $|r-s|$ noch $3m+2-|r-s|$ durch 3 teilbar ist. Dies ist der Fall für alle s , für die $|r-s| \equiv 1 \pmod{3}$ ist; also, da die Kanten P_rP_s für benachbarte Punkte bereits in Γ liegt, $m-1$ mal. Dies für jeden Punkt von $\mathfrak{R}_1$ ausgeführt, ergibt einen Kantenzuwachs von $\frac{(3m+2) \cdot (m-1)}{2}$ Kanten (denn jede Kante gehört zu zwei Punkten P_r und P_s). Ersetzt man in obiger Überlegung „ P_r, P_s “ durch „ Q_r, Q_s “, sowie „ $P_{t-1}P_t$ “ durch „ $Q_{t-2}Q_{t-1}$ “, so erhält man auch für $\mathfrak{R}_2$ einen Zuwachs von $\frac{(3m+2) \cdot (m-1)}{2}$ Kanten.

Um festzustellen, welche der Kanten Q_rP_s hinzugefügt werden können, betrachten wir den Kreis $\mathfrak{R} = P_rQ_rP_{r+1}P_{r+2} \dots P_{r-1}P_r$ der Länge $3m+3$. Man verifiziere mit Hilfe der Tabelle (T), daß für alle F_t und F'_t ($t \neq r+1$) Q_r und P_s in F_t und F'_t nur dann gleich gefärbt sind, wenn die Länge des Bogens $Q_r \dots P_s$ von $\mathfrak{R}$, der die Kante $P_{t-1}P_t$ nicht enthält, $\equiv 2 \pmod{3}$ ist. Für den Sonderfall $t = r+1$, bei dem die Kante $P_{t-1}P_t$ von vornherein nicht in $\mathfrak{R}$ enthalten ist, trägt $Q_r = Q_{t-1}$ bei der Färbung F_t die Farbe IV, die selbstverständlich von allen

Farben der P_i verschieden ist. Bei der Färbung F'_t haben laut Tabelle (T) $Q_r = Q_{t-1}$ und $P_{t+1+3i} = P_s$ die gleiche Farbe II. ($|r - s| \equiv 2 \pmod{3}$). Da t wiederum alle Zahlen von 1 bis $3m + 2$ durchläuft, muß sowohl $|r - s| \not\equiv 2 \pmod{3}$ sein, wie auch $3m + 3 - |r - s| \equiv \equiv -|r - s| \not\equiv 2 \pmod{3}$. Dies ist der Fall für alle s , für die $|r - s| \equiv 0 \pmod{3}$ ist. Für jeden Punkt Q_r von $\mathfrak{R}_2$ erhalten wir also einen Kantenzuwachs von m Kanten, also insgesamt $(3m + 2) \cdot m$ Kanten. Es gilt also:

Die Anzahl der Kanten von $I' = 2n + (3m + 2) \cdot [(m - 1) + m] = \frac{1}{6}n^2 + \frac{5}{6}n$.

Satz 3: Für alle $m \geq 1$ gibt es 5-chrome punktkritische Graphen der Ordnung $n = 6m + 5$, für die die Anzahl der Kanten $\frac{1}{6}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{5}{3}$ beträgt.

Beweis: Aus einem beliebigen punktkritischen Graphen I' des Satzes 2 bilden wir einen punktkritischen 5-chromen Graphen I'^* , indem wir zu I' einen weiteren Punkt Q hinzufügen, und mit diesem alle Punkte von I' verbinden. I'^* enthält dann $\frac{1}{6}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{5}{3}$ Kanten.

Ist p die minimale Zahl von der Beschaffenheit, daß sich ein Graph auf die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht p zeichnen läßt, so daß sich die Kanten nicht überschneiden, so sagt man, der Graph habe das Geschlecht p [6].

Bedeutet n die Anzahl der Punkte und e die Anzahl der Kanten eines Graphen Δ und h die Zusammenhangszahl einer Fläche, auf welcher sich Δ ohne Überschneiden von Kanten zeichnen läßt, so gilt:

$$\frac{2e}{n} \leq 6 \left(1 + \frac{h-3}{n} \right)$$

vergleiche [4].

Wegen Satz 2 und der für geschlossene orientierbare Flächen gültigen Formel $h = 2p + 1$ folgt aus dieser Beziehung, daß es zu jedem $A \geq 0$ ein $p > A$ gibt, derart, daß 4-chrome punktkritische Graphen des Geschlechtes p existieren.

Aus Satz 3 folgt Analoges für 5-chrome punktkritische Graphen. Bedenkt man ferner, daß die Graphen I im Beweis des Satzes 2 punktkritische 4-chrome Graphen des Geschlechtes 0 waren; sowie, daß man durch Weglassen einer Kante das Geschlecht um höchstens 1 herabsetzen kann, so folgt, daß es zu jedem p punktkritische 4-chrome Graphen des Geschlechtes p gibt.

Die Graphen Γ^* , die wir aus den Graphen Γ bilden können, indem wir zu einem Γ einen Punkt Q hinzufügen und diesen mit allen Punkten von Γ verbinden, sind punktkritisch 5-chrom und haben das Geschlecht 1. Also gibt es zu jedem $p(p \neq 0)$ punktkritische 5-chrome Graphen des Geschlechtes p .

Es bleibt jedoch weiterhin unentschieden, ob es kritische 4- und 5-chrome Graphen beliebig hohen Geschlechtes gibt.

Literatur

- [1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", The Journal of the London Mathematical Society **27** (1952), Seite 85—92.
- [2] *G. A. Dirac*, "Note on the colouring of graphs", Mathematische Zeitschrift **54** (1951), Seite 353 (13).
- [3] *G. A. Dirac*, "The structure of k -chromatic graphs", Fundamenta Mathematica **40** (1953), Seite 47, 50 und 51.
- [4] *G. A. Dirac*, "The colouring of maps", The Journal of the London Mathematical Society **28** (1953), Seite 477 und 478.
- [5] *N. G. de Bruijn und P. Erdős*, "A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations", Proc. Konig. Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam, Ser. A **54** (1952), Seite 69.
- [6] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“, Leipzig 1936, Seite 170, Satz 12.