Über eine Klasseneinteilung der Sternkörper

Von

Johann Hejtmanek, Wien

(Eingelangt am 27. Juni 1955)

§ 1

Im R_2 sei ein kartesisches Koordinatensystem gegeben.

Definition: Eine Punktmenge, die 1. symmetrisch bezüglich 0, 2. beschränkt ist, 3. 0 als inneren Punkt hat, 4. abgeschlossen ist und 5. die Eigenschaft hat, daß jede Halbgerade von 0 den Rand in einem Punkt schneidet, heißt Sternkörper K.

$\{\Gamma\}$ sei die Menge der K-zulässigen Gitter. Das $\inf\limits_{\{\Gamma\}} d(\Gamma\} = \Delta(K)$ heißt Determinante des Sternkörpers. Wie *Mahler* gezeigt hat, gibt es wenigstens ein kritisches Gitter, d. h. ein zulässiges Gitter Γ mit $d(\Gamma) = \Delta(K)$.

$\{\Lambda\}$ sei die Menge der kritischen Gitter eines Sternkörpers; sie ist nicht leer. Jedes Λ hat eine bestimmte Anzahl $k \geq 2$ Gitterpunkte am Rand.

Definition: $\max\limits_{\{\Gamma\}} k = n$ heiße die Klassenzahl des Sternkörpers. Auf diese Weise ist eine Klasseneinteilung aller Sternkörper gegeben, indem man alle Sternkörper mit derselben Klassenzahl in eine Klasse gibt. Die Klasse bezeichne ich mit $\langle k \rangle$.

$\langle o \rangle$ und $\langle 1 \rangle$ sind natürlich leer.

$\langle 2 \rangle$ besteht aus allen Sternkörpern mit nur singulär kritischem Gitter. Diese Klasse ist nicht leer, *Mahler* hat einen solchen Sternkörper angegeben:

$$K = R_1 \cup R_2 \qquad \begin{array}{lll} R_1 : & -\vartheta \leq x \leq +\vartheta & -\tfrac{1}{2} \leq y \leq +\tfrac{1}{2} \\ R_2 : & -\tfrac{1}{2} \leq x \leq +\tfrac{1}{2} & -\vartheta \leq y \leq +\vartheta \\ & {}^3/_4 < \vartheta < 1. & \end{array}$$

$\langle 3 \rangle$ ist nicht leer, sie enthält den Kreis.

Satz 1: Zu jedem $k \geq 2$ gibt es einen Sternkörper, der genau ein k-kritisches Gitter hat und sonst kein kritisches Gitter mehr.

Definition: Unter einem k-kritischen Gitter verstehe ich ein kritisches Gitter, das k Gitterpunktpaare am Rand des Sternkörpers hat. (Unter k-kritischem Gitter wird in der Literatur gewöhnlich etwas anderes verstanden: ein k-kritisches Gitter Λ ist ein k-zulässiges Gitter mit $d(\Lambda) = \Delta^k(K)$. k-zulässig heißt ein Gitter Λ mit weniger als k Gitterpunktpaaren im Inneren von K, $\inf_{\{\Lambda\}} d(\Lambda) = \Delta^k(K)$).

Beweis: Für $k = 2$ gibt es den von *Mahler* angegebenen Sternkörper. Vorausgesetzt wird, daß der Satz richtig ist für $k = n$, d. h. es gibt einen Sternkörper K, der genau ein n-kritisches Gitter hat und sonst kein kritisches Gitter. Man konstruiert einen Sternkörper $K' \supset K$, der genau ein $n + 1$ kritisches Gitter hat und sonst keines.

Man wählt einen primitiven Gitterpunkt, der nicht am Rand des Sternkörpers liegt, aus. Diesen bezeichnet man mit $\mathfrak{g}_{n+1}$. Auf K setzt man die Spitze S auf, daß $K \cup S = K'$ noch Sternkörper und S keinen Gitterpunkt außer $\mathfrak{g}_{n+1}$ enthält. Es wird gezeigt, daß Λ kritisches Gitter von K' ist. Angenommen, es gäbe ein K'-zulässiges Gitter Λ^* mit $d(\Lambda^*) < d(\Lambda)$. Weil $K' \supset K$ ist, wäre Λ^* auch K-zulässiges Gitter mit $d(\Lambda^*) < \Delta(K)$, was nicht sein kann. Nun wird noch gezeigt, daß nur Λ kritisches Gitter von K' ist. Angenommen, es gäbe ein anderes zu K' kritisches Gitter Λ^{**}, $d(\Lambda^{**}) = \Delta(K) = \Delta(K')$, $\Lambda^{**} \neq \Lambda$, Λ^* ist zu K kritisches Gitter. Dies kann nicht sein, weil K nur ein kritisches Gitter hat. Schließlich ist klar, daß Λ $n + 1$-kritisches Gitter bezüglich K' ist.

§ 2

Im § 1 beschränkten sich unsere Betrachtungen auf den R_2 und auf beschränkte Sternkörper. Unter K werde im folgenden ein (im allgemeinen unbeschränkter) Sternkörper im R_n verstanden. Es sei K von endlichen Typus ($\Delta(K) < +\infty$), d. h. es gibt mindestens ein K-zulässiges Gitter. Nach einem Satz von *Mahler* folgt, daß es zu K kritische Gitter gibt. $A_K = \{\Gamma\}$ (Γ kritisches Gitter von K), A_K ist die Menge der zu K kritischen Gitter. $\dim K \cap \Gamma \{\Gamma \in A_K\} = l$ sei Anzahl der Gitterpunktpaare von Γ am Rand von K. $\max l \{\Gamma \in A_K\} = k$ werde die Klassenzahl $\langle k \rangle$ des Sternkörpers K genannt. Wie *Mahler* gezeigt hat, ist für beschränkte K $k \geq n$ (n Dimensionszahl), ein n-kritisches Gitter (d. h. ein kritisches Gitter mit n Gitterpunktpaaren am Rand) heißt bekanntlich singulär kritisches Gitter.

In dieser Verallgemeinerung muß $l = +\infty$ und $k = +\infty$ zugelassen werden. Wie *Davenport* und *Rogers* gezeigt haben, gibt es einen Sternkörper mit einem kritischen Gitter mit unendlich vielen Gitterpunkten am Rand. Es werde an einige Begriffe erinnert: Ein Sternkörper heißt automorph, wenn jeder seiner Punkte durch einen geeignet gewählten Automorphismus in eine beschränkte Punktmenge transformiert werden kann. K heißt vollautomorph, wenn dazu jeder Punkt durch eine geeignete Transformation aus der Automorphismengruppe beliebig weit weg transformiert werden kann. K heißt beschränkt oder finit reduzibel (boundedly reducibel), wenn es einen beschränkten Teilsternkörper H mit $\Delta(H) = \Delta(K)$ gibt. Selbstverständlich ist $A_K \subset A_H$, wenn dazu $A_K = H_H$, heißt K voll reduzibel. Wenn K ein voll automorpher und voll reduzibler Sternkörper ist, dann hat jedes kritische Gitter unendlich viele Gitterpunkte am Rand. Diese Sternkörper gehören zu der Klasse $\langle\infty\rangle$.

Mahler konnte zeigen, daß jeder automorphe Sternkörper K wenigstens ein kritisches Gitter mit wenigstens einem Gitterpunktpaar am Rand von K hat. Diese Klasse der Sternkörper hat Klassenzahl $k \geq 1$. *Cassels* hat von einem automorphen Sternkörper ein kritisches Gitter mit keinem Gitterpunkt in FrK angegeben.

§ 3

Satz 2: Es sei K voll automorpher und voll reduzibler Sternkörper in R_n. Dann gibt es im R_n ein $k_0(n) \geq n$, daß keine Klasse $\langle k\rangle$ $k \geq k_0(n)$ leer ist.

Beweis: Weil K voll reduzibel ist, gibt es einen beschränkten Teilsternkörper $H \subset K$ mit $\Delta(H) = \Delta(K)$, die kritischen Gitter beider stimmen genau überein. $k_0(n)$ ist die Klassenzahl von H, sie ist endlich, weil H beschränkt ist. $A_{H\,\max}$ ist Menge aller H kritischen Gitter mit $k_0(n)$-Gitterpunktpaaren am Rand von H. $A_{H\,\max}$ ist nicht leer, es sei $\Gamma \in A_{H\,\max}$, $FrH \cap \Gamma = \{P_1, \ldots P_{k_0(n)}\}$ mit $P_i \neq 0$. Nach dem Satz von *Davenport* und *Rogers* hat aber jedes kritische Gitter unendlich viele Gitterpunkte am Rand von K. $P_{k_0(n)+1}$ ist Punkt 1. aus Γ und 2. aus FrK, selbstverständlich ist $P_{k_0(n)+1}$ nicht aus FrH. Mit $P_{k_0(n)+1}$ werde eine Spitze S konstruiert, darunter versteht man eine Punktmenge $\lambda P_{k_0(n)+1}$ mit $|\lambda| \leq 1$, die Punkte mit $|\lambda| < 1$ seien innere Punkte, S sei abgeschlossen und enthalte keinen Punkt irgend eines K kritischen Gitters außer $P_{k_0(n)+1}$ und sei in K enthalten. $H \cup S$ hat genau dieselben kritischen Gitter wie K, die Klassenzahl von $H \cup S$ ist $k_0(n) + 1$, denn es enthält sicher ein $k_0(n) + 1$ kritisches Gitter, aber kein $k_0(n) + 2$ kritisches. Ein solches (es werde mit Γ^* bezeichnet) kann auf dem Rand von H nur $k_0(n)$ Gitterpunkte haben, auf der Spitze S höchstens einen nach Konstruktion, also zusammen höchstens $k_0(n) + 1$, was gegen die Annahme ist.

Durch Induktion kommt man zur Klasse $\langle k \rangle$ $k = k_0(n) + r$ $r = 1, 2, \ldots$, wobei wesentlich eingeht, daß jedes $\Gamma \in A_K$ unendlich viele Gitterpunkte am Rand hat.

Bemerkung: Durch Satz 2 werden aus jeder $\langle k \rangle$ $k = k_0(n) + r$ beschränkte Sternkörper angegeben. Jede Klasse $\langle k \rangle$ enthält aber auch nicht beschränkte Sternkörper, die auf folgende Weise konstruiert werden: K_0 sei nicht beschränkt, $K_0 \subset K, FrK \cap K_0 =$ leere Menge. $f(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}|}$ sei Distanzfunktion von K, $f_0(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}_0|}$ Distanzfunktion von K_0, es sei $|\mathfrak{r}_0| + \delta = |\mathfrak{r}|$. $f_0(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}| - \delta} = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}|} \frac{|\mathfrak{r}|}{|\mathfrak{r}| - \delta} = f(\mathfrak{x}) \frac{|\mathfrak{r}|}{|\mathfrak{r}| - \delta}$. K_0 ist ein solcher Sternkörper. K_0 hat nun die Eigenschaft, daß $K_0 \cap A_K$ leer ist. Das H aus obigem Beweis kann ohne Schwierigkeit durch $H \cup K_0$ ersetzt werden.

Anwendungen von Satz 2: Im R_2 ist $|x_1 x_2| \leq 1$ voll automorpher und voll reduzibler Sternkörper. Aber bereits aus § 1 weiß man, daß ein $k_0(2) = 2$ angegeben werden kann. Auch $-1 \leq x_1 x_2 \leq k$ ist Sternkörper mit dieser Eigenschaft.

Im R_3 kennt man folgende Sternkörper: $|x_1 x_2 x_3| \leq 1$, $|x_1(x_2^2 + x_3^2)| \leq 1$ und $|x_1^2 + x_2^2 - x_3^2| \leq 1$. Der Beweis von *Davenport* und *C. A. Rogers*, daß diese Sternkörper voll reduzibel sind, ist eine Verallgemeinerung des Satzes, daß sie beschränkt reduzibler sind. Der Beweis sei kurz angedeutet: Ein kritisches Gitter Λ heißt voll kritisch (fully critical), wenn es einen beschränkten Teilsternkörper H gibt, so daß für jedes H zulässige und genügend nahe an Λ gelegene Gitter Λ' gilt: entweder $d(\Lambda') > d(\Lambda)$ oder, wenn $d(\Lambda') = d(\Lambda)$, dann ist Λ' kritisch. Nun wird ein Hilfssatz bewiesen: Wenn jedes kritische Gitter von K vollkritisch ist, dann ist K voll reduzibel. Weil aber, wie dort gezeigt wird, jedes kritische Gitter der oben genannten Sternkörper voll kritisch ist, so ist jeder von ihnen voll reduzibel. Über den beschränkten Teilsternkörper von Satz 1 wird keine Aussage gemacht. Um $k_0(3)$ anzugeben, müßte er bekannt sein.

Im R_4 sind als voll reduzibel die Sternkörper $|x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2| \leq 1$ und $|x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2| \leq 1$ bekannt.

§ 4

K_0 sei vollautomorpher und voll reduzibler Sternkörper. Nach einem Satz von *Davenport* und *C. A. Rogers* gibt es zu jedem Gitter Λ mit $d(\Lambda) \leq \Delta(K_0)$ unendlich viele Gitterpunkte im Inneren von K_0, außer Λ ist kritisch, dann liegen unendlich viele Gitterpunkte am Rand von K_0.

Es gibt nun einen Sternkörper K mit folgenden Eigenschaften: 1. $K \subset K_0$, 2. $FrK_0 \cap K =$ leere Menge und 3. $\Delta(K) = \Delta(K_0)$. K wird auf folgende Weise konstruiert: Indikatrix von K_0 ist $f_0(\mathfrak{x})$. $K_\delta = (1-\delta) K_0$ mit $0 < \delta < 1$ mit Distanzfunktion $f_\delta(\mathfrak{x}) = \frac{1}{1-\delta} f_0(\mathfrak{x})$.

K_δ ist ebenfalls voll automorph und voll reduzibel, $\Delta(K_\delta) = (1-\delta)^n \Delta(K_0)$. K wird angegeben durch seine Distanzfunktion

$$f(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}|}\ i\ |\mathfrak{r}| = |\mathfrak{r}_0|\,(1-h(|\mathfrak{r}_0|)),\ f(\mathfrak{x}) = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{r}_0|}\,\frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0|)} = \frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0|)}\, f_0(\mathfrak{x})\,.\ h(|\mathfrak{r}|)$$

ist Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $h(r) > 0$ definiert für alle $r \geq \min |\mathfrak{r}_0|$, $\mathfrak{r}_0$ durchläuft alle Punkte von FrK_0.

2. $h(r) \leq \varrho < 1$.

3. $h(r)$ ist monoton abnehmend im engeren Sinn und $\lim\limits_{r \to +\infty} h(r) = 0$.

Aus der Konstruktion von K und den Eigenschaften der Funktion $h(r)$ folgt unmittelbar, daß 1. und 2. der Eigenschaften von K gilt. Denn aus $f(\mathfrak{x}) > f_0(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ folgt, daß $K \subset K_0$ als echte Teilmenge enthält und $FrK_0 \cap K =$ leere Menge. Es bleibt noch Eigenschaft 3. zu beweisen, daß $\Delta(K) = \Delta(K_0)$. Trivial gilt, daß $\Delta(K) \leq \Delta(K_0)$. Es sei $\mathfrak{r}$ beliebig aus FrK, also $f(\mathfrak{r}) = 1$. Dazu gibt es umkehrbar eindeutig ein $\mathfrak{r}_0 = \lambda\mathfrak{r}$, so daß $f_0(\mathfrak{r}_0) = 1$, also $\mathfrak{r}_0$ am Rand von K_0 liegt. Dies folgt aus der Konstruktion. Es gibt genau ein δ mit $0 < \delta < 1$, so daß $\mathfrak{r}$ am Rand von K_δ liegt und $f_0(\mathfrak{r}_0)\,\frac{1}{1-\delta} = f_0(\mathfrak{r}_0)\,\frac{1}{1-h(|r_0|)}$. Daraus folgt $\delta = h(|\mathfrak{r}_0|)$.

Weil $h(r)$ monoton abnehmend im engeren Sinne ist, ist $h(|\mathfrak{x}|) < \delta$ für alle $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|$. Daraus ergibt sich folgende wichtige Ungleichung

$$f_\delta(\mathfrak{x}) = \frac{1}{1-\delta} f_0(\mathfrak{x}) > \frac{1}{1-h(|\mathfrak{r}_0^*|)} f_0(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}),\ \text{für } |\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|.$$

Daraus ergibt sich $K_\delta \cap E\mathfrak{x}\{\,|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|\,\}$ besteht aus lauteren inneren Punkten der Menge $K \cap E\mathfrak{x}\{\,|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|\,\}$.

Wenn aber $\Delta(K) < \Delta(K_0)$ ist, gibt es ein zu K kritisches Gitter Γ mit $d(\Gamma) = \Delta(K) < \Delta(K_0)$.

1. Es gibt sicher ein δ mit $0 < \delta < 1$, so daß $d(\Gamma) < (1-\delta)^n\,\Delta(K_0) = \Delta(K_\delta)$.

2. Nach obiger Überlegung gibt es zu diesem δ ein $|\mathfrak{r}_0|$, weil die Funktion $h(|\mathfrak{r}_0|)$ monoton ist und deshalb die Umkehrfunktion existiert. $K_\delta \cap E\mathfrak{x}\{\,|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|\,\}$ besteht dann aus lauter inneren Punkten von $K \cap E\mathfrak{x}\{\,|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|\,\}$. Nun ist aber K_δ voll automorph und voll reduzibel, so hat Γ nach dem Satz von *Davenport* und *C. A. Rogers* unendlich viele Gitterpunkte in K_δ, weil $d(\Gamma) < \Delta(K_\delta)$. In $K \cap E\mathfrak{x}\{\,|\mathfrak{x}| \leq |\mathfrak{r}_0|\,\}$ können aber nur endlich viele sein, also müssen in $K_\delta \cap E\mathfrak{x}\{\,|\mathfrak{x}| > |\mathfrak{r}_0|\,\}$ unendlich viele sein, diese sind aber innere Punkte von K. Dies gibt den gewünschten Widerspruch, weil Γ als K-kritisches Gitter keine Gitterpunkte im Inneren von K haben kann.

Der Sternkörper K hat unendlich viele kritische Gitter, die keinen Gitterpunkt am Rand von K haben. $A_K = \{\Gamma\}$ ist Menge der K-kritischen Gitter, A_{K_0} Menge der K_0 kritischen Gitter. $A_{K_0} \subset A_K$, weil 1. $\Delta(K_0) = \Delta(K)$ und 2. $K \subset K_0$. Alle kritischen Gitter von K_0 sind auch K-kritisch und haben nach Konstruktion keinen Gitterpunkt am Rand von K.

Weil K_0 voll automorph ist, gibt es unendlich viele kritische Gitter (denn mit Λ_0 ist auch $\Omega\,\Lambda_0$ kritisches Gitter. Die Ordnung der Gruppe Ω ist unendlich).

Dagegen ist es denkbar, daß A_{K_0} echte Teilmenge von A_K, d. h. es gibt ein K_0-kritisches Gitter, welches nicht K-kritisch ist. Es kann auch vorkommen, daß Λ auf FrK_0 einen Gitterpunkt hat.

§ 5

Satz 3: ***Die Klasse* $\langle 0\rangle$ *ist nicht leer.***

Beweis: Es wird ein Sternkörper konstruiert aus dem vorhin mit K bezeichneten Sternkörper. Es kann $A_{K_0} = A_K$ sein, dann ist K bereits aus der Klasse $\langle 0\rangle$. Oder $A_{K_0} \subset A_K$ als echte Teilmenge, aber A_K besteht nur aus Gittern $K \cap \Gamma = \mathfrak{o}$ für alle $\Gamma \in A_K$, auch dann gehört K zur Klasse $\langle 0\rangle$. Es ist aber denkbar, daß es ein $\Gamma \in A_K$ gibt mit $K \cap \Gamma \neq \mathfrak{o}$. Mit $A_K{}^*$ werde bezeichnet die Menge aller K-kritischen Gitter, die wenigstens einen Gitterpunkt am Rand von K haben. Es werde vorausgesetzt, daß A_K nicht die leere Menge sei. Wenn $\Lambda^* \in A_K{}^*$ angenommen wird, gibt es einen Gitterpunkt, $\mathfrak{g}^* \in \Lambda^*$, der am Rand von K liegt. $A_K{}^*(R)$ sei die Menge der K zulässigen Gitter, die einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ am Rand von K haben, so daß $|\,\mathfrak{g}\,| \leq R = |\,\mathfrak{g}^*\,|$. Es ist $A_K{}^*(R) \subset A_K{}^*$, und $A_K{}^*(R)$ ist nicht leer (es gehört Λ^* zu $A_K{}^*(R)$). Nach dem Satz von *Davenport* und *Rogers* hat jedes Gitter $\Lambda \in A_K{}^*(R)$, noch mehr jedes Gitter aus $A_K{}^*$, unendlich viele Gitterpunkte im Inneren von K_0. (Es können auch Gitterpunkte auf FrK_0 liegen). Diese Gitterpunkte liegen alle in der Differenzenmenge $K_0 - K$, weil alle diese Gitter K zulässig sind.

Aus jedem $\Lambda \in A_K{}^*(R)$ werde ein Gitterpunkt $\mathfrak{g}(\Lambda)$ mit folgenden Eigenschaften gewählt: $\mathfrak{g}(\Lambda)$ entweder auf FrK, oder im Inneren von K_0. Zu jedem dieser Gitterpunkte $\mathfrak{g}(\Lambda)$ werde eine Spitze $S(\Lambda)$ konstruiert, so daß 1. $S(\Lambda)$ im Inneren von K_0 liegt, 2. $S(\Lambda)$ enthält $\mathfrak{g}(\Lambda)$ als inneren Punkt. Dann wird der Sternkörper $K \cup U\, S(\Lambda) = K(R)$ über alle $\Lambda \in A_K{}^*(R)$ konstruiert. Dieser Sternkörper $K(R)$ hat nach Konstruktion kein zulässiges Gitter aus $A_K{}^*(R)$, denn jedes Gitter $\Lambda \in A_K{}^*(R)$ hat einen Gitterpunkt im Inneren von $K(R)$. Weil $K(R) \subset K_0$, $FrK_0 \cap K(R) =$ leere Menge, $K \subset K(R)$, so gilt $A_{K_0} \subset A_{K(R)}$. $K(R)$ hat kein kritisches Gitter Λ, das einen Gitterpunkt auf FrK mit $|\,\mathfrak{x}\,| \leq R$ hat: $FrK(R) \cap E\mathfrak{x}\,\{|\,\mathfrak{x}\,| \leq R\} =$ leere Menge.

Auf den Sternkörper $K(R)$ wird dasselbe Schlußverfahren angewendet; es ist leicht einzusehen, daß die Menge A_K durch die Menge $A_{K(R)} = A_K - A_K{}^*{}_{(R)}$ zu ersetzen ist. $A^*{}_{K(R)}$ ist Menge aller $K(R)$ kritischen Gitter mit mindestens einem Gitterpunkt am Rand. Entweder ist sie leer, dann gehört bereits $K(R)$ zur Klasse $\langle 0 \rangle$. Ist sie nicht leer, gibt es ein $\Lambda \in A^*{}_{K(R)}$ mit $\mathfrak{g}$ auf $FrK(R)$. $|\,\mathfrak{g}\,|$ werde mit R_1 bezeichnet. Dann werde wie oben der Sternkörper $K(R_1)$ konstruiert. Im allgemeinen Fall wird man eine Folge $R_i \to \infty$ erhalten. Diese Folge kann auch abbrechen. Nach Konstruktion ist der Sternkörper $\lim\limits_{i \to \infty} K(R_i) = \overline{K}$ 1. $\overline{K} \subset K$, 2. $FrK \cap \overline{K} =$ leere Menge (oder $\overline{K}$ besteht aus lauter inneren Punkten von K), 3. $\Delta(\overline{K}) = \Delta(K)$. Daß $A_K \subset A_{\overline{K}}$ enthalten ist, ist klar. Die Menge $A_{\overline{K}}$ hat folgende Eigenschaft: $\overline{K} \cap \Gamma = 0$ für alle $\Gamma \in A_{\overline{K}}$. Der Sternkörper $\overline{K}$ gehört also zu Klasse $\langle 0 \rangle$.

Der vorhin mit 2 bezeichnete Satz kann nun zum Satz 2a verallgemeinert werden.

Satz 2a: *Kennt man im R_n einen voll automorphen und voll reduziblen Sternkörper K; dies ist der Fall für R_n $n = 2, 3, 4$; so ist keine Klasse $\langle k \rangle$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ leer, d. h. es gibt bei vorgegebenem k einen Sternkörper,* *der ein kritisches Gitter mit Maximalanzahl k von primitiven Gitterpunkten am Rand von K hat. Dagegen hat der Sternkörper kein $k + h$ kritisches Gitter mehr, wenn h natürliche Zahl und beliebig ist.*

Beweis: Aus Satz 3 folgt, daß die Klasse $\langle 0 \rangle$ nicht leer ist. K sei Sternkörper aus der Klasse $\langle 0 \rangle$. $A_K = \{\Gamma\}$ sei Menge der kritischen Gitter von K, diese Menge ist in der Mahler'schen Topologie kompakt. Von dieser Menge kann ohne weiteres angenommen werden, daß sie unendliche viele Elemente hat, ein solcher Sternkörper wurde konstruiert. Bei beliebigem R, muß folgendes gelten: $\delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma)$ Γ beliebig aus A_K, $\delta \geq \delta(R) > 0$.

Denn wäre $\delta = 0$, gäbe es eine Gitterfolge aus $A_K\ \{\Gamma_i\}$ mit

$$\delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma_i) = \delta_i \quad \lim_{i \to \infty} \delta_i = 0.$$

Nach dem Mahler'schen Auswahlsatz gibt es eine konvergente Teilfolge $\{\Gamma_i'\}$ $\lim\limits_{i \to \infty} \Gamma_i' = \Gamma$. $\Gamma \in A_K$, weil A_K eine kompakte Menge ist. $\delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma) = 0$. Es hat Γ sicher einen Gitterpunkt am Rand von K, was natürlich nicht sein kann, weil K aus der Klasse $\langle 0 \rangle$.

Aus dieser Überlegung läßt sich ein Sternkörper K aus jeder Klasse konstruieren. Γ sei beliebig aus A_K. Man wählt R so groß, daß k Gitterpunktpaare in $E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}$ liegen mit folgender Eigenschaft:

$$\overline{K\mathfrak{g}_1} = \min \delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma) \quad \Gamma \in A_K \text{ fest}$$
$$\overline{K\mathfrak{g}_2} = \min_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_1} \delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma)$$
$$\overline{K\mathfrak{g}_k} = \min_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{k-1}} \delta(K \cap E\mathfrak{x}\{|\mathfrak{x}| \leq R\}, \Gamma)$$

Nun werden Spitzen mit diesen Gitterpunkten konstruiert. Das Gitter Γ wird so zu einem k-kritischen Gitter. Es ist denkbar, daß es zu diesem Sternkörper noch weitere kritische Gitter aus A_K gibt, mit Gitterpunkten am Rande. Es wird gezeigt, daß sie nur weniger als k Gitterpunkte am Rande dieses neuen Sternkörpers haben können. Wenn man R hinreichend groß wählt, werden die Abstände genügend klein gegenüber der Diskriminante des Sternkörpers. Auch die Spitzen werden schmal gegenüber $\Delta(K)$ gewählt. Angenommen ein anderes Gitter $\Lambda \in A_K$ habe als k Gitterpunkte am Rand von $K \cup S$. Diese Gitterpunkte können nur auf den Spitzen liegen, nicht auf FrK. Denn K war aus Klasse $\langle 0 \rangle$. Es müßten 2 Gitterpunkte auf einer Spitze liegen, die Gitterpunkte liegen sehr nahe, also liegt ein anderer im Inneren von K, was zum Widerspruch führt.

Die oben genannten Resultate in Satz 2a können auch etwas anders formuliert werden: $f(\mathfrak{x})$ sei reelle, stetige Funktion mit den Eigenschaften $f(\mathfrak{x}) \geq 0$ und $f(t\mathfrak{x}) = |t|\, f(\mathfrak{x})$. Faßt man $\mathfrak{x}$ als n-Tupel von Linearformen $(L_1, \ldots L_n)$ mit $det = 1$ auf, so läßt sich die Menge dieser Funktionen in Klassen einteilen. Man betrachtet alle Systemen von Linearformen $(L_1, \ldots L_n$ mit $f(\mathfrak{x}) \geq M(f)$. Es gibt nun Funktionen mit diesen Eigenschaften, daß $f(\mathfrak{x}) = M(f)$ maximal für k (k natürliche Zahl, 0 oder ∞) n-Tupel ganzer Zahlen erfüllt ist. Es gibt aber kein System von Linearformen, das $k + h$ (h natürliche Zahl) Lösungen für $f(\mathfrak{x}) = M(f)$ wäre.

§ 6

1. Wenn S eine quadrierbare Punktmenge im R_n bedeutet, so ist, wie *E. Hlawka* gezeigt hat $Q(S) = \dfrac{V(S)}{\Delta(S)} \geq 1$. Ist aber S aus der Klasse der Sternbereiche, so gilt mehr $Q(S) \geq \zeta(n)$[1] ($\zeta(n)$ Riemannsche ζ-Funktion). Sicher gilt für S aus der Klasse der Sternkörper also $V(S) \geq$ $\geq 2\,\zeta(n)\,\Delta(S)$. Dies kann folgendermaßen gedeutet werden: Für alle Sternkörper S mit $\Delta(S) = \Delta$ vorgegeben, ist das Volumen von S nach unten beschränkt. $V(S)$ ist selbstverständlich nach oben nicht beschränkt für alle S mit $\Delta(S) = \Delta$.

2. Das Funktional $\Delta(S)$ hat folgende Eigenschaft: Es sei $\{S_i\}$ eine monotone Folge mit Grenzwert $S_i \subset S_{i+1}$, $\lim\limits_{i \to \infty} S_i = S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$, dann ist $\lim\limits_{i \to \infty} \Delta(S_i) = \Delta(S)$. Dies gilt auch dann, wenn S vom unendlichen Typus ist.

Satz 4: *K sei nicht beschränkter Sternkörper im R_n mit Volumen $V(K) =$ $= V > 0$. Dann ist K vom endlichen Typus, d. h. es existiert ein zulässiges Gitter, weiter existiert $\Delta(K)$ und ist endlich.*

Beweis: $K_T = K \cap Q_T$ ist das abgeschlossene Intervall

$$-T \leq x_i \leq +T \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Angenommen K sei vom unendlichen Typus $\Delta(K) = +\infty$. Dann ist $\lim\limits_{T \to \infty} \Delta(K_T) = +\infty$, d. h. zu jedem $M > 0$ gibt es ein $T_0(M)$, so daß für $T > T_0$ (1) $\Delta(K_T) > M \geq V \geq V(K_T)$.

Selbstverständlich gilt $V(K_T) \leq V$. Andererseits gilt (2)

$$\Delta(K_T) \leq \frac{1}{2\,\zeta(n)}\, V(K_T)$$

[1] Diese Schranke wurde bereits von *W. Schmidt* verbessert.

für alle $T > 0$. Daraus folgt:

$$\Delta(K_T) > M \quad (M \text{ bel) z. B. } M = c_n V \qquad c_n = \frac{1}{2}\zeta(n)$$

$$\Delta(K_T) \leq c_n V.$$

Man erhält einen Widerspruch.

Dieser Satz liefert also eine hinreichende Bedingung dafür, ob ein Sternkörper vom endlichen Typus ist.

Literatur

K. Mahler: Proc. Lond. Math. Soc. **49** (1942)
H. Davenport und *C. A. Rogers*: Phil. Trans., Ser. A, Vol. **242** ,1950
E. Hlawka: Jahresbericht d. DMV, Bd. **57** (1954)