## Werk

**Titel:** Inhomogene Minima von Sternkörpern.

**Autor:** Hlawka, Edmund

**Jahr:** 1954

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0058|log32


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

# Inhomogene Minima von Sternkörpern.

Von

**Edmund Hlawka,** Wien.

*(Eingelangt am 25. August 1954.)*

## § 1.

Ist $S$ ein Sternkörper mit Mittelpunkt $o$ im $R_n$, $f(p)$ seine Indikatrix, $\mathfrak{G}$ ein $n$-dimensionales Vektorgitter mit der Determinante $m(\mathfrak{G})$, dann sei für jeden Punkt $p \in R_n$, $E(p) = E(p, S, \mathfrak{G}) = \inf f(p')$ erstreckt über alle $p'$, welche aus $p$ durch eine Gittertranslation aus $\mathfrak{G}$ hervorgehen. ($p' \equiv p \pmod{\mathfrak{G}}$). Wir nennen $E(S, \mathfrak{G}) = \sup E(p)$ die Exzentrizität oder inhomogenes Minimum. Weiter sei $\varepsilon(S) = \inf E(S, \mathfrak{G})$ erstreckt über alle Gitter $\mathfrak{G}$ mit $m(\mathfrak{G}) = 1$. Es ist $\varepsilon^{-n}(S) = \Theta(S) = \sup m(\mathfrak{G})$ erstreckt über alle Gitter $\mathfrak{G}$, welche Überdeckungsgitter zu $S$ sind, d. h. für welche die Vereinigungsmenge aller Figuren, welche aus $S$ durch Gittertranslationen hervorgehen, den $R_n$ lückenlos überdecken. Wenn $S$ beschränkt und meßbar mit Maß $m(S)$ ist, so sieht man leicht, daß $\Theta(S) \leqq m(S)$ ist. Für konvexe Körper ist wohlbekannt, daß

$$\mu_n(S, \mathfrak{G}) \leqq 2\,E(S, \mathfrak{G}) \leqq n\,\mu_n(S, \mathfrak{G}) \tag{A}$$

ist, wo $\mu_n$ das $n$-te Minimum des Punktgitters, mit Vektorgitter $\mathfrak{G}$ ist, welches den Mittelpunkt $o$ enthält. Führt man mit *K. Mahler*[1], neben $S$ den polaren Körper $T$, der wieder konvex ist, mit der Indikatrix $H$ ein, so ist

$$1 \leqq \mu_n(S, \mathfrak{G})\,\tau_1(T, \mathfrak{H}) \leqq (n!)^2 \tag{B}$$

wo $\tau_1$ das erste Minimum von $T$ in Bezug auf das Punktgitter mit dem reziproken Vektorgitter $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{G}$ ist, welches $o$ enthält; also wird

$$1/\tau_1(T, \mathfrak{H}) \leqq 2\,E(S, \mathfrak{G}) \leqq n\,(n!)^2/\tau_1(T, \mathfrak{H}) \tag{C}$$

Ganz anders liegt der Sachverhalt, wenn $S$ nicht mehr konvex ist und vor allem nicht mehr beschränkt ist. Alle Sternkörper, die man bisher betrachtet hat, waren solche mit Automorphismen. Es sollen hier nicht

[1] Časopis Mat. a. Fys. 68 (1939) 93—102.

allgemeine Sternkörper ins Auge gefaßt werden, sondern nur folgender spezielle Typus betrachtet werden. Es seien $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ zwei lineare, aufeinander senkrechte Räume durch $o$, von den Dimensionen $n_1$, $n_2$ mit $n_1 + n_2 = n$. In $\Sigma_1$ bzw. $\Sigma_2$ seien zwei beschränkte Sternkörper $S_1$, $S_2$ mit Mittelpunkt $o$ und der Dimension $n_1$, $n_2$ gegeben mit den Indikatrizen $f_1$, $f_2$. Dann stellt $f = \mathrm{Max}\,(f_1, f_2) \leqq 1$ allgemein $f_\lambda = \mathrm{Max}\,(\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) \leqq 1$ mit $\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}=1$ ($\lambda_1$, $\lambda_2$ reell $>0$) die Indikatrix eines $n$-dimensionalen beschränkten Sternkörpers $S(\lambda_1, \lambda_2)$ dar.

Was wir nun aber untersuchen wollen, ist die Exzentrizität des Sternkörpers $S = S(f_1, f_2) : f_1^{n_1} f_2^{n_2} \leqq 1$. Einen einfachen Spezialfall erhalten wir, wenn $S_1$, $S_2$ Intervalle sind. Wir kommen dabei auf das Problem des Produktes von zwei Linearformen oder der inhomogenen Minima von binären indefiniten quadratischen Formen. Aus (A) folgt sofort, wenn $S_1$, $S_2$ konvex, da ja für jedes $\lambda_1$, $\lambda_2$ mit $\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} = 1$, stets $S(\lambda_1, \lambda_2)$ in $S$ enthalten ist:

$$E(S, \mathfrak{G}) \leqq \frac{n}{2}\,\mu_n(S(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$$

also

$$E(S, \mathfrak{G}) \leqq \frac{n}{2}\,\inf \mu_n(S(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G}) \tag{D}$$

wo das inf erstreckt über alle $\lambda_1$, $\lambda_2$ mit $\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} = 1$ ist. Wir können den polaren Körper $T(\lambda_1, \lambda_2)$ zu $S(\lambda_1, \lambda_2)$ einführen und erhalten

$$E(S, \mathfrak{G}) \leqq \frac{n(n!)^2}{2} \Big/ \sup \tau_1(T(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{H}) \tag{E}$$

Dies ist alles ganz trivial. Wir fragen jetzt nach Abschätzungen von $E(S, \mathfrak{G})$ nach unten und ob sie von der gleichen Gestalt wie bei (A) und (C) sind. Es gilt nun, wie gezeigt werden wird,

*Satz 1*: *Sind $S_1$, $S_2$ konvex, dann ist*

$$E(S, \mathfrak{G}) \geqq c_n^{-1}\,\inf \mu_n(S(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G}) \tag{$D_1$}$$

*wo* $c_n = 128\, n^{7/2}\,(n!)^5$ ist.

Wenn man von dem Wert von $c_n$, welcher vom wahren Wert sehr entfernt ist, absieht, so zeigt ($D_1$), daß die triviale Abschätzung (D) doch das Richtige trifft. Man kann fragen, ob es auch ein Analoges zu (E) gibt. Dies ist der Fall. Zunächst ist zu bemerken, daß für jeden beschränkten Sternkörper $S$ (sagen wir im $R_n$) in Bezug auf $o$ der polare Körper $T$ gebildet werden kann, mit einer Indikatrix $H = \mathrm{Max}\,|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,|$

($f(\mathfrak{x}) \leqq 1$), wenn wir die Punkte $x$, $y$ durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ von $o$ beschreiben. Es ist, wie $S$, $T$ wieder ein beschränkter Sternkörper mit Mittelpunkt in $o$, denn zunächst ist er wie $S$, abgeschlossen. Er ist beschränkt, da wenn $c_1$, $c_2$ zwei positive Konstante mit $c_2 \mid \mathfrak{x} \mid \leqq f(\mathfrak{x}) \leqq c_1 \mid \mathfrak{x} \mid$ sind, (welche sicher existieren, da $S$ beschränkt und $f(\mathfrak{x})$ stetig), $H(\mathfrak{y}) \geqq$ $\geqq c_1^{-1} \mid \mathfrak{y} \mid$ ist). Man nehme $\mathfrak{x} = c_1^{-1} \mid \mathfrak{y} \mid^{-1} \mathfrak{y}$ für $\mathfrak{y} \neq 0$). Weiter ist $H(\mathfrak{y})$ stetig, denn es ist

$$H(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \text{Max} \mid \mathfrak{x}\,(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) \mid \leqq H(\mathfrak{y}) + \mid \mathfrak{z} \mid / c_2$$

also allgemein $\mid H(\mathfrak{y}_2) - H(\mathfrak{y}_1) \mid \leqq c_2^{-1} \mid \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1 \mid$. Damit sind die Behauptungen über $T$ nachgeprüft.

Wir werden statt Satz 1 den viel allgemeineren Satz zeigen.

*Hauptsatz*: *Ist $S_1$ konvex, dann ist*

$$E(S, \mathfrak{G}) \geqq K_n^{-1}\, \tau^{-1} \tag{H}$$

*wo $\tau = \sup \tau_1(U(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{H})$ und $U(\lambda_1, \lambda_2)$ der Sternkörper $Max(\lambda_1 H_1, \lambda_2 H_2) \leqq 1$ ist. Dabei sind $H_1 \leqq 1$ bzw. $H_2 \leqq 1$ die polaren Körper zu $S_1$, $S_2$ in $\Sigma_1$ bzw. $\Sigma_2$, $K_n = 16\,(8 n_1{}^{1/4}\,(n_1!)^3)^{n_1/n}$. Es gibt eine nichtabzählbare Menge von Punkten $p$, so daß $E(p, S, \mathfrak{G}) \geqq K_n^{-1}\, \tau^{-1}$ ist.*

(H) ist allgemeiner, da von $S_2$ nichtvorausgesetzt wird, konvex zu sein. Selbstverständlich können die Rollen von $S_1$, $S_2$ vertauscht werden.

Genau genommen, ist (H) nicht das Gegenstück zu (E), denn der polare Körper zu $\text{Max}(\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) \leqq 1$, ist $T(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1^{-1} H_1 + \lambda_2^{-1} H_2 \leqq 1$. Aber man sieht sofort, daß (H) richtig bleibt, wenn $U$ durch $T$ ersetzt wird. Satz 1 ist eine Folge von (H), da, wenn auch $S_2$ konvex ist, dies auch für $S(\lambda_1, \lambda_2)$ gilt und auf diesem Körper (B) angewendet werden kann. Ist $S_2$ konvex, so können wir $\tau_1$ nach dem Minkowskischen Fundamentalsatz abschätzen durch $J_1 \tau^n{}_1 \leqq 2^n m(\mathfrak{H})$, wo $J_1$ das Volumen von $H_1 + H_2 \leqq 1$ ist und man erhält, da $J J_1 \geqq 4^n \mid (n!)^2$, ($J$ Volumen von Max. $(f_1, f_2) \leqq 1$)

$$E^n(S, \mathfrak{G}) \geqq c_n^{-n}\, 2^n\, (n!)^2\, J^{-1}\, m(\mathfrak{G}) \tag{H'}$$

also

$$\Theta(S) \leqq c_n^n\, (n!)^2\, 2^{-n}\, J$$

Wir finden daher eine weitgehende Ähnlichkeit mit dem Sachverhalt bei konvexen Körpern. Dies gilt aber nicht für alle Sternkörper.

So ist für $S : \mid x_1^2 + \ldots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2) \mid \leqq 1 \quad (2 \leqq r < n)$ (indefinite quadratische Formen) für $n \geqq 2$

$$E(S, \mathfrak{G}) < \nu_1 + 2.2^{n/2}\ \ \nu_1^{(n-2)/2(n-1)}\, m(\mathfrak{G}) < 3.2^{n/2}\, \nu_1^{(n-2)/2(n-1)}\, m(\mathfrak{G}) \tag{F}$$

wo $\nu_1(S_1, \mathfrak{G})$ das erste Minimum von $S_1: 0 < x_1^2 + \ldots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2) < 1$ ist.

Nun gibt es aber Gitter mit $m(\mathfrak{G}) = 1$ und beliebig kleinen $\nu_1$, z. B. das Gitter, definiert durch die Linearform $e\,n: x_i = z_i N^{-1/n}$ $(1 \leqq i < n)$ $x_n = N^{1-1/n} z_n$ ($N$ natürliche Zahl), denn es ist $\nu_1 = N^{-1/n}$.

Es ist also für $n \geqq 3$, $\varepsilon(S) = 0$, $\Theta(S) = \dot{\infty}$.

Für $n = 2$ gilt dies natürlich nicht, es ist ja in (H′) enthalten. Es folgt (F) sehr leicht aus den Untersuchungen von *H. Blaney*[2]. Mit den dortigen Bezeichnungen folgt für $k_n$:

$$k_n \leqq 2^{n-1} + 2^{n/2}\sqrt{k_{n-1}}, \text{ also da } k_2 < 3,\ k_n < 2^{n+1}$$

und die Überlegungen auf S. 158 der Arbeit geben sofort das Gewünschte. (Die Abschätzungen lassen sich natürlich verschärfen.) Für $n = 3$ hat zuerst *H. Davenport*[3] auf eine (schärfere) Abschätzung der Gestalt (F) aufmerksam gemacht, der auch (H′) zuerst[4] (in unserer Sprechweise) für $S_1$ = Intervall, $S_2$ = Intervall; $S_1$ = Intervall, $S_2$ = Kreis, $S_1$ = = Kreis, $S_2$ = Kreis bewiesen hat. Seine Resultate wurden von *J. K. S. Cassels*[5] erneut in einfacherer Form hergeleitet. Der Beweis von (H) wird sich der Methode von *Cassels*[6] bedienen.

## § 2.

Wir zeigen zunächst den

*Hilfssatz 1*: Ist eine Folge $\{\mathfrak{a}_l\}$ von Vektoren mit $|\mathfrak{a}_{l+1}| \geqq 8r\,|\mathfrak{a}_l| > 0$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ in einem $r$-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{V}_r$ gegeben, ist jedem $\mathfrak{a}_l$ dieser Folge in beliebiger Weise eine reelle Zahl $\mu_l$ und ein $\varepsilon_l = \pm 1$ zugeordnet, so gibt es einen Vektor $\mathfrak{u}$ im $\mathfrak{V}_r$, so daß für alle Glieder $\mathfrak{a}_l$ der Folge und alle ganzen Zahlen $s$

$$|\mathfrak{a}_l \mathfrak{u} - \mu_l - s| \geqq 1/8 \tag{1}$$

---

[2] Journ. London **23** (1948) 153—160.

[3] Journ. London **23** (1948) 189—202.

[4] Proc. Lond. math. Soc. (2) **53** (1951), 65—82; Quart. J. Math. (2) **1** (1950). 54—62; Acta math. **84** (1950) 159—79; Trans. Amer. math. Soc. **68** (1950), 508—32.

[5] Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952) 72—86.

[6] Zur Methode vgl. auch *C. Chabauty* und *E. Lutz*, C. R. Acad. Sci. Paris **231** (1950) 887—8, 938—9. Der Grundgedanke wurde von *A. Chincin* in einer Reihe von Arbeiten zur Theorie der diophantischen Approximationen entwickelt zuerst in der grundlegenden Arbeit Rend. di Palermo **50** (1926) 170—195. Vgl. auch Izwestija Akad. Nauk. SSSR Ser. Math. **12**, 249—259 (1948).

und

$$^1/_2 - (\mathfrak{a}_l \mathfrak{u} - \mu_l - [\mathfrak{a}_l \mathfrak{u} - \mu_l] = \varepsilon_l \tag{2}$$

ist.* Ist die Folge $\{\mathfrak{a}_l\}$ endlich, so besitzt die Menge der $\mathfrak{u}$ mit (1), (2) innere Punkte.

Beweis: Da alle $\mathfrak{a}_l \neq 0$ sind, so können wir mit $a_l = |\mathfrak{a}_l|$, $\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}_l \mathfrak{n}_{1l}$ setzen und ergänzen $\mathfrak{n}_{1l}$ zu einem vollständigen normierten Orthogonalsystem $\mathfrak{n}_{1l}, \mathfrak{n}_{2l}, \ldots, \mathfrak{n}_{rl}$ im $\mathfrak{V}_r$, setzen weiter für $j = 1, \ldots r$, $\mu_{jl} = \mu_l$, $\gamma_{jl} = {}^1/_4$ wenn $\varepsilon_l = +1$ und ${}^3/_4$, wenn $\varepsilon_l = -1$ ist. Wir definieren weiter für $j = 1, \ldots r$ ganze Zahlen $m_{jl}$ rekursiv so: $m_{j1} = 0$ und es seien, wenn schon die $m_{jl}$ definiert sind, die $m_{j,l+1}$ so gewählt, daß

$$\mathfrak{x}_l = a_l^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\gamma_{jl} + \mu_{jl} + m_{jl}) \mathfrak{n}_{jl} = a_{l+1}^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\sigma + \mu_{j,l+1} + m_{j,l+1}) \mathfrak{n}_{j,l+1} \tag{3}$$

mit $0 \leqq \sigma_j < 1$ ist. Das geht, denn $\mathfrak{x}_l$ läßt sich stets in folgender Weise schreiben: $a_{l+1}^{-1} \Sigma (\nu_j + \mu_{j,l+1}) \mathfrak{n}_{j,l+1}$.

Wir wählen dann $m_{j,l+1}$ so, daß $0 \leqq \nu_j - m_{j,l+1} = \sigma_j < 1$, für $j = 1, \ldots r$ ist.

Wir betrachten nun die Würfel $W_l$: $a_l^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j + \gamma_{jl} + \mu_{jl} + m_{jl}) \mathfrak{n}_{jl}$ mit $|\lambda_j| \leqq {}^1/_8$. Es ist nun stets $W_{l+1} \subset W_l$. Denn ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt aus $W_{l+1}$, welchen wir nach (3) schreiben können:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_l + \mathfrak{y} \text{ mit } \mathfrak{y} = a_{l+1}^{-1} \Sigma (\varrho_j + \gamma_{j,l+1} - \sigma_j) \mathfrak{n}_{j,l+1}$$

so ist

$$\mathfrak{y} = a_l^{-1} \Sigma \lambda_j \mathfrak{n}_{jl}, \text{ wo } (k = 1, \ldots r)$$

$$\lambda_k = a_l a_{l+1}^{-1} \sum_j (\varrho_j + \gamma_{j,l+1} - \sigma_j) o_{jk} \tag{4}$$

gilt. Dabei sind die $o_{jk}$ durch $\mathfrak{n}_{j,l+1} = \sum_{k=1}^{r} o_{jk} \mathfrak{n}_{kl}$ definiert. Es ist nun $|\varrho_j + \gamma_{j,l+1} - \sigma_j| \leqq 1$, $|o_{ik}| \leqq 1$, also $|\lambda_k| \leqq (8r)^{-1} r = 1/8$, d. h. $\mathfrak{x}$ liegt in $W_l$.

Ist $D$ der nicht leere Durchschnitt aller $W_l$, der, wenn die Folge endlich ist, selbst ein Würfel ist, also innere Punkte besitzt, dann erfüllt jedes $\mathfrak{u}$ aus $D$ die Behauptung. Um (1) und (2) für ein $l$ und alle ganzen $s$ einzusehen, beachten wir, daß $\mathfrak{u}$ in $W_l$ liegt, also die Gestalt

$$a_l^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j + \gamma_{jl} + \mu_{jl} + m_{jl}) \mathfrak{n}_{jl}$$

---

* $[x]$ nächst kleinere ganze Zahl an $x$.

besitzt. Es ist daher $\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{u} - \mu_l - s = \gamma_l + \lambda_1 + h$, wo $h = m_{1l} - s$ ganz ist. Dabei wurde benützt, daß $\mathfrak{a}_l$ orthogonal auf $\mathfrak{n}_j$ für $j \geqq 2$ ist.

Ist nun $\varepsilon_l = +1$, dann ist für $h \geqq 0, \gamma_l + \lambda_1 + h \geqq 1/8$ und $\leqq -5/8$, wenn $h \leqq -1$. Dabei wurde benützt, daß $|\lambda_1| \leqq 1/8$ und $\gamma_l = 1/4$ ist. Analog schließt man für $\varepsilon_l = -1$ und erhält damit (1). Weiter ist $\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{u} - \mu_l - [\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{u} - \mu_l] = \gamma_l + \lambda_1 - [\gamma_l + \lambda_1]$ und man sieht sofort, daß auch (2) zutrifft.

*Hilfssatz 2*: Es sei im euklidischen $r$-dimensionalen Raum $R_r$ durch $F(x)$ die Distanzfunktion eines konvexen Körpers mit Mittelpunkt $o$ gegeben. ($\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines Punktes $x$ in Bezug auf $o$). Es gibt dann ein affines Koordinatensystem $u_1\,\mathfrak{m}_1 + \ldots + u_r\,\mathfrak{m}_r$ mit Ursprung $o$, so daß mit passendem $\mu > o$,

$$u\,\mu\,(r\,c_r)^{-1} \leqq F(x) \leqq r^{1/2}\,\mu\,u \tag{5}$$

gilt, wo $u = (u_1^2 + \ldots + u_r^2)^{1/2}$ und $c_r = r\,(r!)^3$ ist.

Beweis: Wir können, da $o$ fest ist, die Punkte $x$, auch durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ von $o$ beschreiben. Wir betrachten nun ein maximales Gitter $\Gamma$ von $F$ mit der Determinante $m(\Gamma) = 1$. Ihre $r$ sukzessiven Minima $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sind einander gleich $= \mu$. Ist $\mu_i = F(\mathfrak{m}_i)$, dann läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ schreiben $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{r} u_i\,\mathfrak{m}_i$, und es ist $1 \leqq |\text{Det.}\,(m_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)| \leqq r!$ Es sei nun $H(\mathfrak{y})$ die polare Distanzfunktion und ihre Minima seien $\tau_i = H(\mathfrak{t}_i)$ mit $1 \leqq |\text{Det.}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r)| \leqq r!$. Da stets $F(\mathfrak{x})\,H(\mathfrak{y}) \geqq |\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}|$ ist, so folgt

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{t}_i| = |\sum_j u_j\,\mathfrak{m}_j\,\mathfrak{t}_i| \leqq \tau_j\,F(\mathfrak{x}) \qquad (i = 1, \ldots r).$$

Nach den $u_j$ aufgelöst, gilt, da die Gleichungsdeterminante $\geqq 1$ ist,

$$|u_l| \leqq F(\mathfrak{x}) \sum_{m=1}^{r} \tau_m\,A_{lm},$$

wo $A_{lm}$ die $r-1$ zeilige Unterdeterminante ist, welche aus der Gleichungsdeterminante durch Streichen der $l$-ten Spalte und der $m$-ten Zeile entsteht.

Da $|\mathfrak{m}_j\,\mathfrak{t}_i| \leqq \mu_j\,\tau_i$, so ist $A_{lm} \leqq (r-l)!\prod_{j \neq l} \mu_j \prod_{i \neq m} \tau_i \leqq (r!)^3\,(r\,\mu_l\,\tau_m)^{-1}$

also $|u_l| \leqq (r!)^3\,F(\mathfrak{x})\,\mu^{-1}$, da $\prod_{i=1}^{r} \mu_i\,\tau_i \leqq (r!)^2$ und $\mu_i = \mu$ ist.

Weiters ist $F(\mathfrak{x}) \leqq \Sigma\,|u_i|\,F(\mathfrak{m}_i) \leqq \mu\sqrt{r}\,u$ und damit ist alles gezeigt.

*Hilfssatz 3*: Es erfülle $F(\mathfrak{x})$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. Es sei weiter eine Folge $\{\mathfrak{b}_l\}$ von Vektoren mit $F(\mathfrak{b}_{l+1}) \geqq 8\, r^{r/2}\, (r!)^3\, F(\mathfrak{b}_l) > 0$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ gegeben und jedem $\mathfrak{b}_l$ dieser Folge sei in beliebiger Weise eine reelle Zahl $\mu_l$ und ein $\varepsilon_l = \pm 1$ zugeordnet. Es gibt dann einen Vektor $\mathfrak{v}$, so daß für alle $\mathfrak{b}_l$ der Folge und alle ganzen Zahlen $s$

$$\left| \mathfrak{b}_l \mathfrak{v} - \mu_l - s \right| \geqq 1/8 \tag{6}$$

und

$$1/2 - (\mathfrak{b}_l \mathfrak{v} - \mu_l - [\mathfrak{b}_l \mathfrak{v} - \mu_l]) = \varepsilon_l \tag{7}$$

gilt. Ist die Folge $\{\mathfrak{b}_l\}$ endlich, so besitzt die Menge der $\mathfrak{v}$ mit (6), (7) innere Punkte.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 gibt es ein Koordinatensystem $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{r} u_i\, \mathfrak{m}_i$ mit (5). Das $r$-Tupel $(u_l, \ldots u_r) = \mathfrak{u}$ der Koordinaten von $\mathfrak{b}_l$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_l = (u_{1l}, \ldots, u_{rl})$, $\left| \mathfrak{a}_l \right| = (u_{1l}^2 + \ldots + u_{rl}^2)^{1/2}$.

Es ist nun

$$\left| \mathfrak{a}_{l+1} \right| \geqq (\mu \sqrt{r})^{-1} F(\mathfrak{b}_{l+1}) \geqq 8\, \mu^{-1} r^3 (r!)^3 F(\mathfrak{b}_l) \geqq 8\, r \left| \mathfrak{a}_l \right| > 0$$

Es sind daher die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt und es gibt also $\mathfrak{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, welche (1), (2) erfüllen. Ist nun $\mathfrak{v} = \mathfrak{M}^{*-1}\, \mathfrak{u}$, wo $\mathfrak{M}$ die Matrix $(\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)$ ist, ($\mathfrak{M}^*$ transponierte Matrix), so ist das skalare Produkt $\mathfrak{a}\, \mathfrak{u}$ in Matrixschreibweise, da $\mathfrak{b}_l = \mathfrak{M}\, \mathfrak{a}_l$, gleich $(\mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{b}_l)^*\, \mathfrak{M}^*\, \mathfrak{v} = \mathfrak{b}_l{}^*\, \mathfrak{v}$ und es ist damit alles gezeigt, da ja durch diese Transformation, innere Punkte in innere Punkte übergehen.

## § 3.

Wir gehen jetzt zum Beweis des Hauptsatzes (H) über. Da der Punkt $o$ ein ausgezeichneter Punkt ist, können wir die Punkte $x$ des $R_n$ durch die Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ in Bezug auf $o$ festlegen. Die Projektion von $\mathfrak{x}$ auf die Räume $\Sigma_1$ bzw. $\Sigma_2$ von den Dimensionen $n_1$, $n_2$ bezeichnen wir mit $P_1\, \mathfrak{x}$ bzw. $P_2\, \mathfrak{x}$. Es ist stets $\mathfrak{x}\, \mathfrak{y} = P_1\, \mathfrak{x}\, P_1\, \mathfrak{y} + P_2\, \mathfrak{x}\, P_2\, \mathfrak{y}$. Die Indikatrizes $f_1(\mathfrak{x})$, $f_2(\mathfrak{x})$ der beschränkten Sternkörper $S_1$, $S_2$ hängen nur von $P_1\, \mathfrak{x}$ bzw. $P_2\, \mathfrak{x}$ ab. $H(\mathfrak{x}) = \mathrm{Max}\,(H_1(\mathfrak{x}), H_2(\mathfrak{x}))$ ist die polare Indikatrix zu $f = f_1 + f_2$. $\mathfrak{H}$ sei das reziproke Gitter zu $\mathfrak{G}$, wo o. B. d. A. $m(\mathfrak{G}) = m(\mathfrak{H}) = 1$ ist. Die Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$, also $\mathfrak{g}\, \mathfrak{h}$ stets ganz. $\tau$ war $\sup \tau_1(U(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$, wo $\tau_1(U(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$ das erste Minimum von

$$U : \mathrm{Max}\,(\lambda_1 H_1, \lambda_2 H_2) \leqq 1,\ \lambda_1^{n_1}\, \lambda_2^{n_2} = 1,\ \text{für } \mathfrak{H}.$$

Für $8\, n_1^{n_1}\,(n_1!)^3$ setzen wir kurz $C$.

Es sei $F(\mathfrak{G})$ ein beschränkter Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}$.

Der Beweis des Satzes wird in mehreren Schritten geführt.

*Hilfssatz 4*: $(H)$ ist für $\mathfrak{G}$ richtig, wenn es in $\mathfrak{H}$ eine Folge $S = S(I)$ von Gittervektoren $\mathfrak{h}_j \neq 0$ $(-\infty < j < \infty)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$\begin{aligned}
&1.\ H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_j)\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_j) \leqq \tau^n \\
&2.\ C\, H_1(\mathfrak{h}_j) \leqq H_1(\mathfrak{h}_{j-1}) \\
&3.\ H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_{j-1})\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_j) \leqq C^{n_1}\tau^n \qquad \text{(I)} \\
&4.\ H_1(\mathfrak{h}_j) > 0 \text{ für alle } j \\
&5.\ H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq H_2(\mathfrak{h}_{j-1})
\end{aligned}$$

Man beachte bei Bedingung (4), daß $H_1(\mathfrak{h})$ bzw. $H_2(\mathfrak{h})$ nur von $P_1\,\mathfrak{h}$ bzw. $P_2\,\mathfrak{h}$ abhängen, daß also z. B. $H_1(\mathfrak{h}) = 0$ genau dann 0, wenn $P_1\,\mathfrak{h} = 0$ ist.

Beweis: Es ist

$$\lim_{j\to\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = o, \quad \lim_{j\to-\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = \infty \tag{8}$$

denn aus der Eigenschaft 2. folgt $H_1(\mathfrak{h}_j) \leqq H_1(\mathfrak{h}_0)\, C^{-j}$ $(j \geqq o)$

$$H_1(\mathfrak{h}_j) \geqq C^{-j}\, H_1(\mathfrak{h}_0) \quad (j \leqq -1).$$

Weiter ist

$$\lim_{j\to\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = \infty, \quad \lim_{j\to-\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = o \tag{9}$$

Die zweite Relation in (9) folgt aus 1. und der zweiten Relation in (8). Wäre die erste Relation (9) nicht richtig, dann gäbe es ein $K > 0$ und ein $j_0 > o$, so daß für alle $j > j_0$, $H(\mathfrak{h}_j) = \mathrm{Max}\,(H_1(\mathfrak{h}_j), H_2(\mathfrak{h}_j)) < K$ (es geht ja nach (8) $H_1(\mathfrak{h}_j) \to o$, für $j \to \infty$). In dem beschränkten Körper $H(\mathfrak{h}) < K$ können nur endlich viele verschiedene $\mathfrak{h}$ liegen; es gäbe also eine unendliche Teilfolge $(j_n)$, so daß stets $\mathfrak{h}_{j_k} = \mathfrak{h} \neq 0$ und es wäre nach (8) $H_1(\mathfrak{h}) = 0$, im Widerspruch zu 4.

Wir zeigen jetzt weiter: Ist $\{\varepsilon_j\}$ eine beliebig vorgegebene Folge mit $\varepsilon_j = \pm 1$, dann gibt es ein t, so daß für alle $j$ und alle ganzen $s$

$$\left|\, \mathfrak{h}_j\, t - s \,\right| \geqq 1/8 \tag{10}$$

$$1/2 - (\mathfrak{h}_j\, t - [\mathfrak{h}_j\, t]) = \varepsilon_j \tag{11}$$

gilt. Ist nämlich $m$ eine beliebige natürliche Zahl, dann wenden wir auf die Folge der Vektoren $\mathfrak{b}_i = P_1\,\mathfrak{h}_{m-i}$ $(i = o, 1, 2 \ldots 2m+1)$ im Vektorraum $\mathfrak{P}\,r$ von $\Sigma_1$, $(r = n_1)$, $F = H_1$, den Hilfssatz 3 mit $\mu_i = o$ an, denn es ist nach 2.

$$H_1(\mathfrak{h}_{i+1}) = H_1(\mathfrak{h}_{m-i}) \geqq C\, H_1(\mathfrak{h}_{m-i+1}) = C\, H_1(\mathfrak{h}_i).$$

Es gibt also ein $\mathfrak{v}_m$ mit $P_1\, \mathfrak{v}_m = \mathfrak{v}_m$ (da ja $\mathfrak{v}_m$ in $\Sigma_1$), so daß für alle ganzen $s$

$$| \mathfrak{h}_j\, \mathfrak{v}_m - s | \geqq 1/8 \tag{10'}$$

$$1/2 - (\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{v}_m - [\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{v}_m]) = \varepsilon_j \tag{11'}$$

für alle $j$ mit $-(m+1) \leqq j \leqq m$ gilt. Ist $\mathfrak{g}_m$ aus $\mathfrak{G}$ so gewählt, daß $\mathfrak{v}_m + \mathfrak{g}_m = \mathfrak{w}_m$ in $F(\mathfrak{G})$, dann gilt auch für $\mathfrak{w}_m$

$$| \mathfrak{h}_j\, \mathfrak{w}_m - s | \geqq 1/8,\ 1/2 - (\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{w}_m - [\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{w}_m]) = \varepsilon_j \tag{12}$$

$(-(m+1) \leqq j \leqq m)$, da ja $\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{g}_m$ ganz und $s$ beliebig ist.

Jeder Häufungspunkt $t$ der beschränkten Folge $\{\mathfrak{w}_m\}$ erfüllt nun (10), wie aus der ersten Relation in (12) sofort folgt, da ja die linke Seite bei festem $\mathfrak{h}_j$ und $s$ stetig in $t$ ist. Daraus folgt, daß für alle $j$ nie $\mathfrak{h}_i\, t$ eine ganze Zahl ist, da man ja sonst für $s$ einfach $\mathfrak{h}_j\, t$ nehmen kann, um einen Widerspruch zu erhalten. Für solche $t$ ist aber bei festem $\mathfrak{h}_j$ und $s$ auch die linke Seite von (11) in $t$ stetig, daher folgt durch direkten Grenzübergang aus (12) auch (11).

Aus (10), (11) folgern wir, da die Menge sämtlicher Folgen $\{\varepsilon_j\}$ nicht abzählbar ist, daß auch die Menge der Vektoren $t$, welche (10) allein erfüllen, ebenfalls nicht abzählbar ist. Denn die $t$, welche zu verschiedenen Folgen $\{\varepsilon_j\}$ gehören, sind ebenfalls voneinander verschieden. Ist $t$ ein beliebiger Vektor mit (10), so folgt mit $s = \mathfrak{g}\, \mathfrak{h}_j$, für alle $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ und alle $j$

$$f_1(\mathfrak{g}-t)\, H_1(\mathfrak{h}_j) + f_2(\mathfrak{g}-t)\, H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq | P_1\, (\mathfrak{g}-t)\, P_1\, \mathfrak{h}_j | + | P_2\, (\mathfrak{g}-t)\, P_2\, \mathfrak{h}_j | \geqq$$
$$\geqq | t\, \mathfrak{h}_j - s | \geqq 1/8. \tag{13}$$

Daraus folgt $f_1(\mathfrak{g}-t) \neq o$, $f_2(\mathfrak{g}-t) \neq o$, denn ist z. B. $f_1(\mathfrak{g}-t) = o$, dann folgt aus (13) und (9) für $j \to -\infty$ : $0 \geqq 1/8$. Analog widerlegt man mittels (8) für $j \to \infty$ die Annahme $f_2(\mathfrak{g}-t) = 0$,

Da nach (5.) und (9), $H_2(\mathfrak{h}_j)$ von $o$ nach $\infty$ monoton zunimmt, so gibt es ein $j$, so daß

$$H_2(\mathfrak{h}_{j-1}) \leqq C^{n_1/n}\, \tau\, (f_1\, f_2^{-1})^{n_1/n} \leqq H_2(\mathfrak{h}_j) \tag{14}$$

ist, wo in $f_1$, $f_2$ das Argument $\mathfrak{g}-t$ unterdrückt ist. Aus (3.) und (14) folgt unmittelbar

$$H_1(\mathfrak{h}_{j-1}) \leqq C^{n_1/n}\, \tau\, (f_1^{-1}\, f_2)^{n_2/n}. \tag{15}$$

Daher folgt aus (13) und (15) mit $j-1$ statt $j$, sofort

$$(f_1^{n_1} f_2^{n_2})^{1/n} \geqq (16\,\tau\, C^{n_1/n})^{-1}$$

was die Behauptung ist.

*Hilfssatz 5*: Ist in $\mathfrak{H}$ für alle $\mathfrak{h} \neq 0$ sowohl $H_1(\mathfrak{h})$ wie $H_2(\mathfrak{h})$ von 0 verschieden, dann gibt es in $\mathfrak{H}$ eine Folge $S$ (I). Es ist dann nach Hilfssatz 4, der Satz richtig.

Beweis: Es sei $M > 1$ beliebig, dann gibt es ein $\mathfrak{h}_{0M}{}^* = \mathfrak{h}_0{}^* \neq 0$, so daß

$$1.\quad H_1(\mathfrak{h}_0{}^*) \geqq M,\quad H_2(\mathfrak{h}_0{}^*) \leqq M^{-1}.$$

Denn nach Definition von $\tau$ gibt es zu jedem $v \geqq 1$ ein $\mathfrak{h}_v \neq 0$, so daß

$$H_1(\mathfrak{h}_v) \leqq (\tau\, M\, v)^{n_2/n_1},\quad H_2(\mathfrak{h}_v) \leqq (M\, v)^{-1} \tag{16}$$

gilt. Wir nennen die $\mathfrak{h}_v$ von (16), für die $H_2(\mathfrak{h}_v)$ am kleinsten ist. Wäre nun für alle $v$ stets $H_1(\mathfrak{h}_v) \leqq M$, so würden alle $\mathfrak{h}_v$ in dem beschränkten Körper $H(\mathfrak{h}) \leqq M$ liegen. Daher folgt nach einer schon früher verwendeten Schlußweise, daß es dann ein $\mathfrak{h} \neq o$ geben müßte, mit $H_2(\mathfrak{h}) = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

Für $\mathfrak{h}_0{}^*$ gelte (16) mit $v = v_0$ und man beachte, daß $H_2(\mathfrak{h}_{v_0}) = H_2(\mathfrak{h}_0{}^*)$, minimal sein soll. Dann definieren wir rekursiv eine Kette $S'$ von Vektoren $\mathfrak{h}_l{}^* = \mathfrak{h}_{lM}{}^*$ $(l = 1, 2, \ldots)$ rekursiv durch

$$H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq C^{-1} H_1(\mathfrak{h}_{l-1}^*),\quad H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq \tau^{n/n_2} (C\, H_1{}^{-1}(\mathfrak{h}_{l-1}^*))^{n_1/n_2} \tag{17 $l$}$$

für $l \geqq 1$, was geht, da ja stets $H_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ ist. Dabei wurde nun $\mathfrak{h}_l{}^*$ so gewählt, daß $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*)$ minimal ist. Dann ist stets $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) \geqq H_2(\mathfrak{h}_l{}^*)$. Wäre für $l = 1$, $H_2(\mathfrak{h}_1{}^*) < H_2(\mathfrak{h}_0{}^*)$, dann wäre nach (17): $H_1(\mathfrak{h}_1{}^*) < H_1(\mathfrak{h}_0{}^*)$ also $\mathfrak{h}_1{}^*$ Lösung von (16) mit kleinerem $H_2$. Ist $l \geqq 2$ und $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) < H_2(\mathfrak{h}_{l-1}^*)$, dann wäre nach (17), da $H_1(\mathfrak{h}_i{}^*) < H_1(\mathfrak{h}_{l-i})$, $\mathfrak{h}_i{}^*$ Lösung der Gleichung (17 $(l-1)$) mit kleineren $H_2$ als $\mathfrak{h}_{l-i}$, was der Wahl von $\mathfrak{h}_{l-1}^*$ widerspricht.

Es gibt sicher ein $L$, so daß $H_1(\mathfrak{h}_L{}^*) \leqq M^{-1}$, $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) \geqq M$, denn aus (17 $l$) folgt, daß $\lim\limits_{l\to\infty} H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) = 0$; es gibt also ein $L_0$, so daß für alle $L > L_0$ sicher $H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq M^{-1}$ ist. Wäre nun für alle $\mathfrak{h}_l{}^*$ $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) < M$ $(l \geqq L_0)$, so folgt wieder in üblicher Weise, daß es dann ein $\mathfrak{h} \neq 0$ geben müßte, so daß $H_1(\mathfrak{h}) = 0$ ist, was nicht sein soll.

Damit ist jetzt aus $S'$ eine endliche Folge $S_M$ $(0 \leqq l \leqq L)$ herausgegriffen, mit folgenden Eigenschaften (man benütze noch 17 $l$):

$$1.\quad H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_l{}^*)\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq \tau^n$$
$$2.\quad C\, H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq H_1(\mathfrak{h}_{l-1}{}^*)$$
$$3.\quad H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_{l-1}{}^*)\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq C^{n_1}\tau^n$$

$$\begin{aligned} &4.\ H_1(\mathfrak{h}_0^*) \geqq M > 1,\ H_2(\mathfrak{h}_0^*) \leqq M^{-1} \\ &5.\ H_1(\mathfrak{h}_L^*) \leqq M^{-1} < 1,\ H_2(\mathfrak{h}_L^*) \geqq M \\ &6.\ H_2(\mathfrak{h}_l^*) \geqq H_2(\mathfrak{h}_{l-1}^*). \end{aligned} \tag{II}$$

Bevor wir den Beweis von Hilfssatz 5 zu Ende führen, schalten wir folgenden Hilfssatz ein:

*Hilfssatz 6*: Es sei $K > 0$ und $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ seien irgendwelche Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit:

$$\text{a) } H_1^{n_1}(\mathfrak{h}'')\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}'') \leqq \tau^n, \quad \text{b) } H_1^{n}(\mathfrak{h}'')\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}') \leqq \tau^n\, C^{n_1},$$

$$\text{c) } H_1(\mathfrak{h}') \leqq K \leqq H_1(\mathfrak{h}''). \tag{18}$$

Behauptung: Es gibt bei festem $K$, nur endlich viele $\mathfrak{h}'$, zu welchen mindestens ein $\mathfrak{h}''$ mit (18) gehört. Zu jedem $\mathfrak{h}'$ mit $H_2(\mathfrak{h}') \neq 0$ gibt es nur endlich viele $\mathfrak{h}''$ mit (18).

Bemerkung: Es ist nicht vorausgesetzt, daß stets $H_1(\mathfrak{h})$ bzw. $H_2(\mathfrak{h})$ von Null verschieden ist.

Beweis: Es ist nach b) c) $H_1(\mathfrak{h}') \leqq K$, $H_2^{n_2}(\mathfrak{h}') \leqq \tau^n (C K^{-1})^{n_1}$. Es gibt also nur endlich viele $\mathfrak{h}'$. Ist $H_2(\mathfrak{h}') \neq 0$, dann ist $H_1^{n_2}(\mathfrak{h}'') \leqq$ $\leqq \tau^n C^{n_1} H_2^{-n_2}(\mathfrak{h}')$ und aus a), c) folgt $H_2^{n_2}(\mathfrak{h}'') \leqq \tau^n K^{-n_1}$. Daher ist bei festem $K$ und $\mathfrak{h}'$ die Anzahl der $\mathfrak{h}''$ beschränkt.

Jetzt kann der Beweis von Hilfssatz 5 zu Ende geführt werden. Nach 2. ist in jedem $S_M$, $H_1(\mathfrak{h}_l^*)$ in $l$ monoton abnehmend wegen 4., 5. gibt es ein eindeutig bestimmtes $N(M)$, so daß

$$H_1(\mathfrak{h}_N^*) \leqq 1 < H_1(\mathfrak{h}_{N-1}^*) \tag{18'}$$

gilt und wir setzen $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_{j+N}^*$ $(-N \leqq j \leqq L - N = R)$. Dann gelten für die $\mathfrak{h}_j$ (deutlicher $\mathfrak{h}_{jM}$) die Eigenschaften 1., 2., 3., 6. Die Eigenschaften 4., 5. schreiben sich jetzt so:

$$H_1(\mathfrak{h}_{-N,M}) \geqq M, H_2(\mathfrak{h}_{-N,M}) \leqq M^{-1} \text{ bzw. } H_1(\mathfrak{h}_{R,M}) \leqq M^{-1}, H_2(\mathfrak{h}_{R,M}) \geqq M$$

Daher ist $\lim H_1(\mathfrak{h}_{-N,M}) = \lim H_2(\mathfrak{h}_{R,M}) = \infty$ für $M \to \infty$.

In der neuen Schreibweise ist jetzt (18')

$$H_1(\mathfrak{h}_{0M}) \leqq 1 < H_1(\mathfrak{h}_{-1,M}) \tag{18''}$$

Nach Hilfssatz 6 mit K = 1 gibt es nur endlich viele verschiedene Vektoren $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{-1}$ mit $H_1(\mathfrak{h}_0) \leqq 1 < H_1(\mathfrak{h}_{-1})$. Wenn also $M$ alle ganze Zahlen $> 1$ durchläuft, so folgt, daß es eine unendliche Teilfolge $\{M_{l1}\}$ gibt, für welche $\mathfrak{h}_{0M}$ bzw. $\mathfrak{h}_{-1,M}$ gleiche Werte $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{-1}$ annehmen. Wir betrachten nur mehr solche Systeme $S_{M_{l1}}$ $(l = 1, 2, \ldots)$, welche $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{-1}$ enthalten. Wenn $M$ die Teilfolge $\{M_{l1}\}$ durchläuft, so kann es wieder nach Hilfssatz 6 mit $K = H_1(\mathfrak{h}_0)$ nur endlich viele verschiedene

$\mathfrak{h}_{1\,M}$ (da $H_1(\mathfrak{h}_{1M}) \leqq H_1(\mathfrak{h}_0) < H_1(\mathfrak{h}_{-1})$) und analog nur endlich viele verschiedene $\mathfrak{h}_{-2\,M}$ (da $H_1(\mathfrak{h}_0) < H_1(\mathfrak{h}_{-1}) < H_1(\mathfrak{h}_{-2\,M})$) geben. Es sei $\{M_{l2}\}$ die Teilfolge von $\{M_{l1}\}$, welche die gleichen $\mathfrak{h}_{-2,\,M} = \mathfrak{h}_{-2}$ und $\mathfrak{h}_{1\,M} = \mathfrak{h}_1$ besitzen. Dieser Prozeß liefert im $j$-ten Schritt eine Teilfolge $\{M_{lj}\}$, welche alle die gleichen Vektoren $\mathfrak{h}_{-(j+1)}, \mathfrak{h}_{-j}, \ldots \mathfrak{h}_j$ enthalten und erhalten auf diese Weise eine unendliche Folge $\{\mathfrak{h}_j\}$ $(-\infty < j < \infty)$. Diese Folge erfüllt nach Konstruktion die Eigenschaften, welche an eine $S$ (I) Folge gestellt werden und damit ist der Hilfssatz bewiesen. Die ganze Überlegung bleibt richtig, wenn es für eine unendliche Folge von $M$-Werten zugehörige $S_M$-Ketten gibt.

Es werde nun stets vorausgesetzt, daß in $\mathfrak{H}$ keine $S$ (I) Folge liegt.

*Hilfssatz 7*: Gibt es in $\mathfrak{H}$ eine Folge $S = S(\mathrm{II})$ $(-\infty < j \leqq L)$ von Vektoren $\neq o$ aus $\mathfrak{H}$ $(L \geqq 1)$, so daß 1., 2., 3., 5. von (I) erfüllt sind, gilt 4') (statt 4): $H_1(\mathfrak{h}_j) > 0$ für $j < L$, $H_1(\mathfrak{h}_L) = 0$, dann gilt der Satz $(H)$.

Beweis: Man schließt wie in Hilfssatz 4), daß

$$\lim_{j \to -\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = \infty, \quad \lim_{j \to -\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = 0. \tag{19}$$

Es gibt nun eine nicht abzählbare Menge von Vektoren $\mathfrak{t}_2$ mit $P_2\,\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2$, so daß für alle ganzzahligen $s$

$$|\,\mathfrak{h}_L\,\mathfrak{t}_2 - s\,| \geqq 1/8 \tag{20}$$

gilt. Jedes $\mathfrak{t}_2$ von der Gestalt $v^{-1}((\lambda_1+1/2)\,\mathfrak{n}_1+\lambda_2\mathfrak{n}_2+\ldots+\lambda_s\,\mathfrak{n}_s)$, wo $\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_s$ $(s = n_2)$ ein normiertes orthogonales System von Einheitsvektoren im Raum $\Sigma_2$ mit $v = |\,\mathfrak{h}_L\,| > 0$ ist. (Es ist ja $\mathfrak{h}_1$ in $\Sigma_2$), $\mathfrak{h}_L = v\,\mathfrak{n}_1$, $|\,\lambda_1\,| \leqq 3/8$ leistet das Gewünschte, denn es ist $\mathfrak{h}_L\,\mathfrak{t}_2 - s = \lambda_1 + 1/2 - s$, für $s \leqq 0$ stets $\geqq 1/8$ und für $s \geqq 1$ stets $\leqq -1/8$. Wendet man auf die Vektoren $\mathfrak{b}_i = P_1\,\mathfrak{h}_{L-i}$ $(1 \leqq i < \infty)$ Hilfssatz 3 mit $\mu_i = \mathfrak{b}_i\,\mathfrak{t}_2$, an (die $\varepsilon_i$ seien irgendwie fest gewählt), so erhalten wir, daß es für $-\infty < j < L$ und alle ganzen $s$ einen Vektor $\mathfrak{t}_1$ gibt, so daß $(\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2)$

$$|\,\mathfrak{h}_j\,\mathfrak{t} - s\,| = |\,\mathfrak{h}_j\,\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{h}_j\,\mathfrak{t}_2 - s\,| \geqq 1/8. \tag{21}$$

Daraus folgt, für alle $j$ mit $-\infty < j \leqq L$, für alle $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$

$$f_1(\mathfrak{g} - \mathfrak{t})\,H_1(\mathfrak{h}_j) + f_2(\mathfrak{g} - \mathfrak{t})\,H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq 1/8. \tag{22}$$

Dies ist für die $j < L$ richtig, wie man bei (13) sieht. Ist aber $j = L$, so wird die linke Seite von (22): $f_2(\mathfrak{g} - \mathfrak{t})\;H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq |\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{h}_L - \mathfrak{g}\,\mathfrak{h}_L\,|$, also nach (20) ebenfalls $\geqq 1/8$; denn es ist $\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{h}_L = 0$, da $\mathfrak{t}_1$ in $\Sigma_1$, $\mathfrak{h}_L$ im dazu senkrechten Raum $\Sigma_2$.

Man schließt wie früher $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ (jetzt $j = L$ statt $j \to \infty$).

Ist nun $C^{n_1/n}\, \tau(f_1 f_2^{-1})^{n_1/n} \leqq H_2(\mathfrak{h}_L)$, dann gibt es ein $j$ mit (14) und der Beweis kann wie in Hilfssatz 4 zu Ende geführt werden. Ist aber $C^{n_1/n}\, \tau\,(f_1 f_2^{-1})^{n_1/n} > H_2(\mathfrak{h}_L)$, dann wenden wir dies auf (22) mit $j = L$ an und wir erhalten den Satz sogar mit einer schärferen Abschätzung.

*Hilfssatz 8*: Ist für jedes $\mathfrak{h} \neq o$ von $\mathfrak{H}$ stets $H_2(\mathfrak{h}) \neq o$, dann gibt es in $\mathfrak{H}$ Folgen $S$ (II).

Beweis: Wir konstruieren wie in Hilfssatz 5 zu gegebenen $M > 1$, die Kette $S'$. Diese Kette kann wie dort mit $\mathfrak{h}_0{}^*$ begonnen werden, da ja $H_2$ stets $\neq 0$ sein soll, es kann aber sein, daß von einer Stelle $T$ an, $H_1(\mathfrak{h}_T) = o$ ist. Dann bricht die Kette dort ab. Man kann annehmen, daß von endlich vielen $M$ abgesehen, die Ketten stets abbrechen, da sonst eine Folge $S$ (I) konstruiert werden könnte, was nicht sein soll. Für alle genügend großen $M$, haben wir also Ketten $S'_M : \{\mathfrak{h}_{jM}^*\}$ $(o \leqq j \leqq \leqq T(M))$, die 1., 2., 3., 4., 6. von (II) erfüllen, nur gilt statt 5. die Eigenschaft 5': $H_1(\mathfrak{h}_T) = o$, $H_1(\mathfrak{h}_j) > o$ $(j < T)$.

Es gibt dann wieder ein eindeutig bestimmtes $N(M)$, so daß (18) gilt.

Wenn wir wieder $\mathfrak{h}_{j,M} = \mathfrak{h}_{j+N,M}^*$ setzen $(-N \leqq j \leqq T - N)$, so haben wir wieder (18') und es gilt $\lim\limits_{M \to \infty} H_1(\mathfrak{h}_{-N,M}) = \infty$.

Wir können nun so vorgehen (es ist ja stets $H_2 \neq 0$), so daß der Hilfssatz 6 immer angewendet werden kann), wie bei der Konstruktion der Kette $S$ (I), nur daß von einer Stelle $L \geqq 1$ an, zum erstenmal $H_1(\mathfrak{h}_L) = o$ sein, denn sonst wäre ja eine $S$ (I) Kette vorhanden (nach links bricht sie natürlich nicht ab). Damit ist der Hilfssatz 8 bewiesen. Wir nehmen nun an, daß in $\mathfrak{H}$ weder eine $S$(I) noch eine $S$(II) Folge vorhanden ist. Dann muß es nach den Hilfssätzen 5 und 8 ein $\mathfrak{h}_0 \neq o$ in $\mathfrak{H}$ mit $H_2(\mathfrak{h}_0) = o$ geben.

Wir beginnen nun wie in Hilfssatz 5 und 8 die Kette $S'$ zu konstruieren, aber nun stets mit $\mathfrak{h}_0{}^* = \mathfrak{h}_0$, so daß also (II) 4. ersetzt wird, durch

$$4'') \quad H_2(\mathfrak{h}_0) = 0. \tag{23}$$

Es ist natürlich $H_1(\mathfrak{h}_0) \neq o$. Ist nun bei der Konstruktion von $\mathfrak{H}'$ stets $H_1(\mathfrak{h}_j) \neq o$, so bricht die Kette $S'$ nicht ab und wir können aus ihr eine Kette $S_M''' : \{\mathfrak{h}_{jM}^*\}$ bilden, welche (II) 1., 2., 3., 5., 6. und 4'') erfüllt für jedes $M > 1$ $(0 \leqq j < \infty)$ $(\mathfrak{h}_{0M}{}^* = \mathfrak{h}_0)$. Dies ist möglich, da ja beim Nachweis von 5. nur benützt wurde, daß $H_1(\mathfrak{h}_j{}^*) \neq 0$ für alle $j$ ist. Nehmen wir an, daß es für eine unendliche Folge von $M$-Werten zugehörige $S_M'''$-Ketten gibt, dann können wir uns eine Kette $S$(III): $\{\mathfrak{h}_j\}$ $(0 \leqq j < \infty)$ bilden, welche (II) 1., 2., 3., 6., 4'' erfüllt.

Vom Hilfssatz 6 wird nur mehr die erste Hälfte verwendet, sonst wird so wie bei der Konstruktion von $S$ (I) und $S$ (II) vorgegangen. Es gibt nur endlich viele verschiedene $\mathfrak{h}_{1\,M}$ mit $H_1(\mathfrak{h}_{1M}) \leqq H_1(\mathfrak{h}_0) = K$, es gibt also eine unendliche Teilfolge $\{M_{l1}\}$ von $M$-Werten mit $\mathfrak{h}_{1M} = \mathfrak{h}_1$ usw.

Aus der Existenz von $S$(III) schließen wir wie bei $S$(I), daß

$$\lim_{j \to \infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = 0, \quad \lim_{j \to \infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = \infty \tag{24}$$

ist, denn es wurde dort nur benützt, daß für alle $j$, $H_1(\mathfrak{h}_j) \neq 0$.

Wir können nun genau wie bei $S$(I) vorgehen, nur ist $j = 0$ statt $j \to -\infty$ zu benützen, da ja $H_2(\mathfrak{h}_0) = 0$ ist. Damit ist auch in diesem Fall der Satz bewiesen.

Es kann daher angenommen werden, daß es in $\mathfrak{H}$ keine Ketten von der Gestalt $S$(I), $S$(II), $S$(III) gibt. Dann muß die Kette $S'$ begonnen mit $\mathfrak{h}_0$, mit $H_2(\mathfrak{h}_0) = 0$ notwendigerweise abbrechen, denn sonst gäbe es in $\mathfrak{H}$ eine $S$(III)-Folge, d. h. es gibt eine endliche Folge $S = S$ (IV): $\{\mathfrak{h}_j\}$ $(0 \leqq j \leqq L)$, wo $L \geqq 1$, welche (II) 1., 2., 3., 6. erfüllt und

$$4''': H_2(\mathfrak{h}_0) = 0 \qquad 5'''): H_1(\mathfrak{h}_L) = 0, \quad H_1(\mathfrak{h}_j) > 0 \quad (j < L)$$

ist. Hier geht man nun genau so vor, wie bei $S$(II) nur ist $j = 0$ statt $j \to -\infty$ und $j = L$ statt $j \to \infty$ zu verwenden. Für $t_1$ (vgl. (21) steht jetzt bei festem $t_2$ eine Menge mit inneren Punkten zur Verfügung, da ja $S$ jetzt endlich ist.