Werk

Titel: Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel.

Autor: Müller, Hans Robert

Jahr: 1951

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0055|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 17. Mai 1950.)

L. Euler stellte 1776 die Drehungen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes um einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ mittels Quaternionen dar. Ein Punkt $\mathfrak{x}$ mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{\mathfrak{o}\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$ wird in den Punkt $\mathfrak{x}'$ mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{\mathfrak{o}\mathfrak{x}'} = \mathfrak{x}'$ gedreht, wenn

$$\mathfrak{x}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{P} \tag{1}$$

gilt und $\mathfrak{P} = p_0 + \mathfrak{e}_1 p_1 + \mathfrak{e}_2 p_2 + \mathfrak{e}_3 p_3$ eine genormte Quaternion mit

$$\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{2}$$

ist. Hiebei sind die p_i *Eulers* (homogene) Drehzeiger. $\overline{\mathfrak{P}}$ ist die zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Quaternion. Es genügt, die Drehungen der Einheitskugel zu betrachten; dann gilt für die Skalarprodukte der Vektoren $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}') = 1$.

Die Drehungen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes um einen festen Punkt und somit die Drehungen der Einheitskugel um ihren Mittelpunkt bilden eine dreigliedrige Gruppe, deren Parameterraum der dreidimensionale elliptische Raum ist, worauf zuerst *C. Stéphanos*[1] hingewiesen hatte. Hiezu ordnen wir der Quaternion $\pm\,\mathfrak{P}$ einen gleichfalls mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten Punkt eines dreidimensionalen projektiven Raumes zu, dessen homogene Punktkoordinaten die p_i sind. Durch $\cos\vartheta = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}) = \frac{1}{2}\{\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{Q}} + \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}\} = \Sigma\, p_i q_i$ wird der Abstand ϑ zweier Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ erklärt und eine elliptische Maßbestimmung (mit der Krümmung $+1$) eingeführt. Den Punkten des absoluten Gebildes $(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) = 0$ dieser Maßbestimmung entsprechen singuläre Drehungen.

Im folgenden soll die Bewegungsgeometrie auf der Kugel unter Gegenüberstellung der geometrischen Eigenschaften des „Bildes" im elliptischen Parameterraum entwickelt werden.

---

[1] *C. Stéphanos,* Math. Ann. **22** (1883) 299–367, 589–592.

Zwangsläufige Drehvorgänge.

Geben wir die Quaternion $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(t)$ als Funktion eines reellen Parameters t (Zeit) vor, so wird ein „zwangsläufiger Drehvorgang" D_{I} um den Ursprung $\mathfrak{o}$ festgelegt. Wir denken uns die Kugelfläche doppelt überdeckt: Die „Gangkugel" K vollführe auf der „Rastkugel" K' den Drehvorgang D_{I}. Hängt ein Punkt $\mathfrak{x}$ von K nicht von t ab, so heißt er auf K befestigt. — Vorerst nehmen wir $\mathfrak{x}$ auf K beweglich an. Durch Ableitung nach t erhalten wir aus (1) den *Vektor* $\mathfrak{v}'$ *der absoluten Geschwindigkeit* von $\mathfrak{x}$ gegen K'.

$$\mathfrak{v}' = \frac{d\mathfrak{x}'}{dt} = \dot{\mathfrak{x}}' = \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{P} + \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{P} = \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{P}$$

Aus (2) folgt $\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} + \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P} = 0$. Wird der Vektor

$$2\,\dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P} = -2\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d} \tag{3}$$

gesetzt, so ergibt sich für den *Vektor* $\mathfrak{v}_f$ *der Führungsgeschwindigkeit*

$$\mathfrak{v}_f = \dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}'\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'\,\mathfrak{d}\} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{x}' \tag{4}$$

Der Vektor $\dot{\mathfrak{x}}$ stellt die *Relativgeschwindigkeit* von $\mathfrak{x}$ gegen K in der Ausgangslage von K dar, während $\mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{P}$ der Vektor der Relativgeschwindigkeit von $\mathfrak{x}$ gegen K nach der Drehung $\mathfrak{P}$ ist. Es gilt somit $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}_f + \mathfrak{v}$.

Wir suchen nun zum Zeitpunkt t den augenblicklichen *Drehpol*, d. h. jenen Punkt der Einheitskugel, dessen Führungsgeschwindigkeit verschwindet. Wir bezeichnen ihn in der Ausgangslage von K mit $\mathfrak{p}$ und in K' mit $\mathfrak{p}'$. Wegen (4) und $(\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}') = 1$ finden wir

$$\mathfrak{p}' = \frac{\mathfrak{d}}{w} = -\frac{2\,\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}}}{w} = \frac{2\,\dot{\overline{\mathfrak{P}}}\,\mathfrak{P}}{w}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{p}'\,\overline{\mathfrak{P}} \tag{5}$$

Hiebei gilt für die *Winkelgeschwindigkeit* w die Beziehung

$$w^2 = 4\,(\overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}}, \overline{\mathfrak{P}}\,\dot{\mathfrak{P}}) = 4\,\dot{\mathfrak{P}}\,\dot{\overline{\mathfrak{P}}} = 4\,(\dot{p}_0^2 + \dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \dot{p}_3^2).$$

Man erhält den Gegenpunkt von $\mathfrak{p}'$ als Momentanpol, wenn man das Vorzeichen von w ändert. $\mathfrak{d}$ ist der *Drehvektor* zum Zeitpunkt t. Für den Vektor der Führungsgeschwindigkeit gilt somit $\mathfrak{v}_f = \mathfrak{p}' \times \mathfrak{x}' \,.\, w$. In der Folge sehen wir $\mathfrak{x}$ als festen Punkt von K an ($\dot{\mathfrak{x}} = 0$) und finden dann in der Führungsgeschwindigkeit die absolute Geschwindigkeit: $\mathfrak{v}_f = \mathfrak{v}'$.

Dem zwangsläufigen Drehvorgang D_{I} entspricht im Parameterraum eine Bildkurve, die vom Punkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(t)$ dort beschrieben wird. —

Die geometrischen Eigenschaften dieser Kurve, ihre Invarianten gegenüber der Bewegungsgruppe des elliptischen Raumes kennzeichnen nun unseren eingliedrigen Drehvorgang D_{I} auf der Kugel. Es zeigt sich, daß die Krümmungseigenschaften der Bahnkurven allein von der Krümmung der Bildkurve im Parameterraum abhängen.

Erklärung der *Gleichwertigkeit* der sphärischen Kinematik: Üben wir auf die Ausgangsstellung der Systeme K, K' Drehungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ aus und sehen wir die gedrehten Lagen als gleichwertig an, so stellt sich der Bewegungsvorgang $\mathfrak{P}$ in der Gestalt $\mathfrak{P}^* = \overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{A}'$ dar; die Kurve im Parameterraum erfährt hiebei eine elliptische Bewegung, ist also gegenüber dieser sechsgliedrigen Gruppe der elliptischen Bewegungen gleichwertig.

Wir führen ein den Kurvenpunkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ begleitendes *Polartetraeder* $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ derart ein, daß die Kante $G_1 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\}$ in die Kurventangente, $G_2 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_2\}$ in die Hauptnormale und $G_3 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ in die Binormale der Bildkurve fällt. Sind $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_i'$ die Richtungsvektoren der Kanten G_i, so gilt folgendes System von Ableitungsgleichungen als Gegenstück zu den *Frenet*schen Formeln der Euklidischen Kurventheorie[2]:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{P}}_0 &= \quad * \quad + \mathfrak{P}_1\,\dot{s} \quad * \quad * \\
\dot{\mathfrak{P}}_1 &= -\mathfrak{P}_0\,\dot{s} \quad * \quad + \mathfrak{P}_2\,\dot{g} \quad * \\
\dot{\mathfrak{P}}_2 &= \quad * \quad - \mathfrak{P}_1\,\dot{g} \quad * \quad + \mathfrak{P}_3\,\dot{h} \\
\dot{\mathfrak{P}}_3 &= \quad * \quad * \quad - \mathfrak{P}_2\,\dot{h} \quad *
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{r}}_1 &= \quad * \quad + \mathfrak{r}_2\,\dot{g} \quad * \\
\dot{\mathfrak{r}}_2 &= -\mathfrak{r}_1\,\dot{g} \quad * \quad + \mathfrak{r}_3\,\dot{u} \\
\dot{\mathfrak{r}}_3 &= \quad * \quad - \mathfrak{r}_2\,\dot{u} \quad *
\end{aligned}\right\} \qquad
\left.\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{r}}_1' &= \quad * \quad + \mathfrak{r}_2'\,\dot{g} \quad * \\
\dot{\mathfrak{r}}_2' &= -\mathfrak{r}_1'\,\dot{g} \quad * \quad + \mathfrak{r}_3'\,\dot{u}' \\
\dot{\mathfrak{r}}_3' &= \quad * \quad - \mathfrak{r}_2'\,\dot{u}' \quad *
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hiebei ist $\dot{u} = \dot{h} + \dot{s}$ und $\dot{u}' = \dot{h} - \dot{s}$. Es bedeutet $\dot{s}\,dt$ das Bogenelement der Kurve $\mathfrak{P}(t)$, $\dot{g} : \dot{s} = \varkappa$ ihre Krümmung und $\dot{h} : \dot{s} = \tau$ ihre Windung. Die Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1'$ der Kurventangente legen auf der Einheitskugel ein längentreu aufeinander bezogenes Kurvenpaar mit dem Bogenelement $\dot{g}\,dt$ fest. Die geodätischen Krümmungen dieser sphärischen Kurven sind $c = \dot{u} : \dot{g} = (\dot{h} + \dot{s}) : \dot{g}$, bzw. $c' = \dot{u}' : \dot{g} = (\dot{h} - \dot{s}) : \dot{g}$. Die zugehörigen Integralinvarianten bedeuten $s = \int \dot{s}\,dt$ die Bogenlänge, $g = \int \dot{g}\,dt$ die Gesamtkrümmung und $h = \int \dot{h}\,dt$ die Gesamtwindung der Kurve $\mathfrak{P}(t)$. Andererseits ist g die Bogenlänge der

[2] Vgl. etwa *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamburger Math. Einzelschr. 34. Heft (1942) § 11.

Kurven $\mathfrak{r}_1(t)$ und $\mathfrak{r}_1'(t)$ mit den geodätischen Gesamtkrümmungen $u = h + s$, bzw. $u' = h - s$. Wegen $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{P}_1 \overline{\mathfrak{P}}_0 = -\mathfrak{P}_0 \overline{\mathfrak{P}}_1$, $\mathfrak{r}_1' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{P}_1 = -\overline{\mathfrak{P}}_1 \mathfrak{P}_0$, sowie (5) und (6) erhalten wir $\mathfrak{p}' = \pm \mathfrak{r}_1'$, $w = \mp 2\dot{s}$. Wir entscheiden uns etwa für jene Orientierung, die dem oberen Vorzeichen jeweils zukommt:

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}_1', \; w = -2\dot{s} \tag{8}$$

Die zweite Formel in (8) besagt im wesentlichen die Übereinstimmung des infinitesimalen Drehwinkels auf der Einheitskugel zum Zeitpunkt t mit dem Bogenelement der Bildkurve im Parameterraum. Bei unserer Vorzeichenwahl weist der „rechte" Richtungsvektor $\mathfrak{r}_1'$ der Kurventangente G_1 nach dem augenblicklichen Drehpol: $\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}_1'$. Der „linke" Richtungsvektor $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{p}$ gibt jenen Punkt von K, der durch die Drehung $\mathfrak{P}$ in den Drehpol $\mathfrak{p}'$ übergeht. Aus (7) entnimmt man nun leicht, daß unser Drehvorgang durch Abrollen der in K befestigten Gangpolbahn $\mathfrak{p}(t)$ nach der jeweils erfolgten Drehung $\mathfrak{P}$ auf der in K' festen Rastpolbahn $\mathfrak{p}'(t)$ entsteht.

Dieser Gegenüberstellung von Drehpolen auf der Kugel und Tangenten an die Bildkurve im Parameterraum liegt folgender Sachverhalt zugrunde: Fassen wir die Geraden G des elliptischen Raumes als Raumelemente auf, so stellt diese von *G. Fubini*, *J. Hjelmslev* und *E. Study* um 1900 betrachtete Abbildung auf gerichtete Punktepaare $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ der beiden Richtungskugeln eine *kinematische Abbildung* dar, bei der den Punkten $\mathfrak{P}$ des elliptischen Raumes, aufgefaßt als Träger von Strahlbündeln, die Drehungen von der linken zur rechten Richtungskugel entsprechen: $\mathfrak{r}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{P}$. Den Punkten einer Kurve des elliptischen Raumes wird so eine stetige Folge von Drehungen, also ein eingliedriger Drehvorgang der Kugel zugeordnet. Die Tangentenfläche (Torse) der Kurve bildet sich auf die beiden Polbahnen ab. Beim Fortschreiten von einem Kurvenpunkt zum benachbarten verhält sich die Kurventangente stationär (im Vergleich zu beliebigen Geraden durch die Kurvenpunkte). Dies spiegelt sich im augenblicklichen Stillstand des Drehpoles wider.

Die Bahnkurve eines in K befestigten Punktes $\mathfrak{x}$ kann als Ort der rechten Bildpunkte $\mathfrak{x}'$ aller Strahlen betrachtet werden, die die Bildkurve des D_{I} schneiden und zugleich im *Clifford*schen Sinne linksparallel sind, d. h. dem Netz linksparalleler Geraden angehören, dessen Strahlen in $\mathfrak{x}$ den festen linken Bildpunkt haben.

Verfolgen wir nun die Krümmungsverhältnisse der beiden Polbahnen, sowie der Bildkurve im Parameterraum. Die erwähnte geometrische Deutung der Koeffizienten der Ableitungsgleichungen (6) und (7) gibt folgenden Zusammenhang zwischen der Krümmung $\varkappa$ und der Windung τ der Kurve $\mathfrak{P}(t)$ und den geodätischen Krümmungen c und c' der Gang-, bzw. Rastpolbahnen:

$$c = \frac{\tau + 1}{\varkappa}, \quad c' = \frac{\tau - 1}{\varkappa} \tag{9}$$

oder

$$\frac{c - c'}{2} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \frac{c + c'}{2} = \frac{\tau}{\varkappa} \tag{9'}$$

Einige Sonderfälle sind von Interesse:
$c = 0$ ergibt einen *Größtkreis als Gangpolbahn* (Evolventenbewegung). Das Bild des Drehvorganges im Parameterraum ist eine *Links-T-Kurve* ($\tau = -1$)[3]. —
$c' = 0$ führt auf einen *Größtkreis* der Kugel *als Rastpolbahn*. Die Bildkurve ist eine *Rechts-T-Kurve* ($\tau = +1$).
Für festes $c \neq 0$ wird die *Gangpolbahn ein Kreis* der Einheitskugel (Radius < 1), denn man kann leicht einsehen, daß die geodätischen Krümmungskreise einer Kugel gewöhnliche Kreise sind[4]. Die Kurve $\mathfrak{P}(t)$ im Parameterraum ist in diesem Fall *Böschungslinie* auf einem *Clifford*schen Linkszylinder, dessen Erzeugende von ihr unter dem festen Winkel ϑ mit $c = \operatorname{ctg} \vartheta$ geschnitten werden[5].

Ist $c' = \operatorname{ctg} \vartheta' \neq 0$ fest, so ist die *Rastpolbahn ein Kreis* und die Bildkurve im elliptischen Raum eine *Böschungslinie* auf einem *Clifford*schen Rechtszylinder (fester Schnittwinkel ϑ' zwischen Zylindererzeugenden und Kurve).

Sind c und c' fest, jedoch verschieden, so erhalten wir eine allgemeine *zyklische Bewegung* auf der Kugel, bei der *Gang- und Rastpolbahn Kreise* sind. Die Bildkurve $\mathfrak{P}(t)$ besitzt dann feste Krümmung und Windung, ist also eine *gewöhnliche Schraublinie* des elliptischen Raumes. — Diese

---

[3] Vgl. *E. Salkowski*, Jahresber. d. D. Math. Vereinig. **21** (1912) 27—52.

[4] Eine auf ihre Bogenlänge bezogene sphärische Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ besitzt die geodätische Krümmung $c = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}'')$. (Ableitung nach der Bogenlänge durch „Striche" bezeichnet!) Für festes c gilt $c' = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''') = O$ oder $\mathfrak{x}''' = \lambda\mathfrak{x} + \mu\,\mathfrak{x}'$. Wegen $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}') = 1$ ist $\lambda = 0$. Somit verschwindet die Windung

$$\tau = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}''') : (\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}'').$$

[5] Vgl. *H. R. Müller*, Monh. f. Math. **53** (1949) 151—164.

Schraublinie wird zum *Kreis*, wenn $c = -c' = \frac{1}{\varkappa}$ ist. In diesem Fall sind die Polbahnen gleich groß und rollen außen aufeinander. — Schließlich schrumpfen die beiden Polbahnen auf Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ zusammen, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ im Parameterraum eine *Gerade* mit den Richtungsvektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ beschreibt. Es liegt dann eine *kontinuierliche Drehung* um den festen Punkt $\mathfrak{r}'$ vor.

Einer *ebenen Kurve* des Parameterraumes ($\tau = 0$) entsprechen Polbahnen mit entgegengesetzten geodätischen Krümmungen ($c + c' = 0$). In diesem Fall ist der Drehvorgang eine allgemeine *symmetrische Rollung*, bei der symmetrische Polbahnen aus symmetrischer Anfangslage aufeinander abrollen.

Geschlossene Drehvorgänge haben geschlossene Kurven des Parameterraumes zu Bildern. $\mathfrak{P}(t)$ besitzt dann eine Periode t^*. Die Drehzahl ν von D_{I} stimmt nach (8) — abgesehen von einem Faktor — mit dem Umfang der Bildkurve überein.:

$$2\pi\nu = \oint w\,dt = -2\,s.$$

Weiters finden wir für die Integrale der geodätischen Krümmungen u und u' der beiden Polbahnen die Beziehung $u - u' = 2\,s$.

Die Flächenmaße der von den Polbahnen berandeten Kugelstücke hängen nach dem *Gauß-Bonnet*schen Satze mit den geodätischen Gesamtkrümmungen und somit mit dem Umfang und der Gesamtwindung der Bildkurve $\mathfrak{P}(t)$ zusammen. Die der Periode t^* unseres Drehvorganges entsprechenden gleichen „Umfänge" der Polbahnen stimmen mit dem Integral g über die Krümmung von $\mathfrak{P}(t)$ überein.

Wir berechnen nun die geodätische Krümmung c_x der Bahnkurve eines in K befestigten Punktes $\mathfrak{x}$. Nach (4) gilt

$$\dot{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{d} \times \mathfrak{x}', \quad \ddot{\mathfrak{x}}' = \dot{\mathfrak{d}} \times \mathfrak{x}' + (\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')\,\mathfrak{d} - (\mathfrak{d}\,\mathfrak{d})\,\mathfrak{x}'$$

Wir finden daher

$$c_x = \frac{(\mathfrak{x}'\,\dot{\mathfrak{x}}'\,\ddot{\mathfrak{x}}')}{(\dot{\mathfrak{x}}'\,\dot{\mathfrak{x}}')^{3/2}} = \frac{(\mathfrak{d}\,\dot{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{x}') - (\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')^3 + (\mathfrak{d}\,\mathfrak{d})\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')}{[(\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}')^2]^{3/2}}$$

Beziehen wir den Vektor $\mathfrak{x}'$ auf das Dreibein $\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{r}_2'$, $\mathfrak{r}_3'$, d. h. setzen wir $\mathfrak{x}' = x_1'\,\mathfrak{r}_1' + x_2'\,\mathfrak{r}_2' + x_3'\,\mathfrak{r}_3'$ und berücksichtigen $\mathfrak{d} = -2\,\dot{s}\,\mathfrak{r}_1'$, sowie $\varkappa = \dot{g} : \dot{s}$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck für die geodätische Krümmung

$$c_x = \frac{\varkappa\,x_3' - 2\,x_1'\,(1 - x_1'^2)}{2\,(1 - x'^2_1)^{3/2}}.$$

Nennen wir die Punkte $\mathfrak{x}'$ mit $c_x = 0$ *Wendepunkte*, so erfüllen diese die Gleichung

$$\varkappa\, x_3' - 2\, x_1' \,(1 - x_1'^2) = o, \tag{10}$$

werden also für jeweils feste Werte t von einem Zylinder dritter Ordnung (Erzeugendenrichtung $= \mathfrak{r}_2'$) aus der Einheitskugel ausgeschnitten. Man kann nun leicht zeigen, daß diese Kurve auch auf einem Kegel dritter Ordnung mit der Spitze in $\mathfrak{o}$ liegt. — Dieser Wendepunktort berührt die Polbahnen im augenblicklichen Drehpol und hängt nur von der Krümmung $\varkappa$ der Bildkurve im Parameterraum ab, ändert also für zwangsläufige Drehvorgänge, die einer Kurve fester Krümmung des elliptischen Raumes entsprechen, nicht seine Gestalt.

Als *Wendepole* können wir jene Wendepunkte bezeichnen, die auf dem Größtkreis mit der Gleichung $x_2' = o$, also auf der sphärischen Normalen liegen, die im Drehpol $\mathfrak{r}_1'$ auf die sich dort berührenden Polbahnen errichtet werden kann. Der Kugelgleichung, sowie (10) Rechnung tragend, finden wir für diese Wendepole die Darstellung

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{r}_1' \cos\omega + \mathfrak{r}_3' \sin\omega \quad \text{mit} \quad \sin 2\,\omega = \varkappa. \tag{11}$$

Für $|\varkappa| < 1$ erhalten wir — falls bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrisch liegende Punkte nicht unterschieden werden — zwei reelle getrennte Wendepole; für $|\varkappa| = 1$ fallen sie zusammen.

Einer Schraubung des elliptischen Raumes mit der Darstellung $\widehat{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{S}'$ entsprechen die Drehungen $\widehat{\mathfrak{r}} = \overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{S}$, $\widehat{\mathfrak{r}}' = \overline{\mathfrak{S}'}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{S}'$ der Richtungskugeln. (Hiebei ist $\mathfrak{S}\,\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}'\,\overline{\mathfrak{S}'} = 1$.) — Die *Schmiegschraube* führt das mit der Kurve $\mathfrak{P}(t)$ verbundene Polartetraeder jeweils in seine „Nachbarlage" über. Hiebei werden die Dreibeine der Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_i$, bzw. $\mathfrak{r}_i'$ in ihre Nachbarlagen gedreht. Diese infinitesimalen Drehungen sind aber durch die *Darboux*schen Drehvektoren $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1\,\dot{u}\,dt + \mathfrak{r}_3\,\dot{g}\,dt$, $\mathfrak{s}' = \mathfrak{r}_1'\,\dot{u}'\,dt + \mathfrak{r}_3'\,\dot{g}\,dt$ gekennzeichnet. Diese durchstoßen die Einheitskugel in den Krümmungsmittelpunkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ der Gang-, bzw. Rastpolbahn.

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{r}_1\,\dot{u} + \mathfrak{r}_3\,\dot{g}}{\sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}^2}} = \frac{c\,\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \mathfrak{m}' = \frac{\mathfrak{r}_1'\,\dot{u}' + \mathfrak{r}_3'\,\dot{g}}{\sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}'^2}} = \frac{c'\,\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_3'}{\sqrt{1+c'^2}}.$$

Die infinitesimalen Drehwinkel sind $2\,\sigma = \sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}^2}\,dt$, $2\,\sigma' = \sqrt{\dot{g}^2 + \dot{u}'^2}\,dt$. Die Schmiegschraube von $\mathfrak{P}(t)$ ist somit durch die Quaternionen $\mathfrak{S} = \cos\sigma + \mathfrak{m}\sin\sigma = 1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{S}' = \cos\sigma' + \mathfrak{m}'\sin\sigma' = 1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{s}'$ bestimmt. Ihre Achsen sind $[\pm\,\mathfrak{m}, \pm\,\mathfrak{m}']$.

Die Krümmungsmittelpunkte der beiden Polbahnen sind daher die kinematischen Bildpunkte der Achsen der Schmiegschraube der Bildkurve des Drehvorganges D_{I}.

Flächenläufige Drehvorgänge.

Nun sei die Quaternion $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(u_1, u_2)$ von zwei reellen Parametern u_1, u_2 abhängig. Durch (1) wird nun ein zweigliedriger oder flächenläufiger Drehvorgang D_{II} erklärt. Im elliptischen Parameterraum beschreibt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(u_1, u_2)$ eine Fläche als Bild von D_{II}. Mit dem Flächenpunkt $\mathfrak{P}$ verbinden wir nun ein „begleitendes" Polartetraeder $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$. Hiebei ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ und der Eckpunkt $\mathfrak{P}_3$ der Pol (bezüglich der absoluten Quadrik der elliptischen Maßbestimmung) zur Tangentialebene an die Bildfläche im Punkte $\mathfrak{P}_0$. Die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind nur bis auf Drehungen um $\mathfrak{P}_0$ in der Tangentialebene bestimmt. Die Kanten des Tetraeders, die $\mathfrak{P}_0$ mit $\mathfrak{P}_i$ verbinden, bezeichnen wir wiederum mit G_i; ihre Richtungsvektoren seien $\mathfrak{r}_i$ $\mathfrak{r}_i'$. Wir erhalten folgende Ableitungsgleichungen[6]:

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= \quad * \quad + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \alpha_2 \mathfrak{P}_2 \quad * \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1 \mathfrak{P}_0 \quad * \quad + \beta_3 \mathfrak{P}_2 - \beta_2 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2 \mathfrak{P}_0 - \beta_3 \mathfrak{P}_1 \quad * \quad + \beta_1 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_3 &= \quad * \quad + \beta_2 \mathfrak{P}_1 - \beta_1 \mathfrak{P}_2 \quad * \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{r}_1 &= \quad * \quad + \omega_3 \mathfrak{r}_2 - \omega_2 \mathfrak{r}_3 \\ d\,\mathfrak{r}_2 &= -\omega_3 \mathfrak{r}_1 \quad * \quad + \omega_1 \mathfrak{r}_3 \\ d\,\mathfrak{r}_3 &= +\omega_2 \mathfrak{r}_1 - \omega_1 \mathfrak{r}_2 \quad * \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{r}_1' &= \quad * \quad + \omega_3 \mathfrak{r}_2' - \omega_2' \mathfrak{r}_3' \\ d\,\mathfrak{r}_2' &= -\omega_3 \mathfrak{r}_1' \quad * \quad + \omega_1' \mathfrak{r}_3' \\ d\,\mathfrak{r}_3' &= +\omega_2' \mathfrak{r}_1' - \omega_1' \mathfrak{r}_1' \quad * \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \omega_i, \omega_i'$ sind lineare Differentialformen (*Pfaff*sche Formen) in den du_i; zwischen ihnen bestehen die Beziehungen $\omega_i = \beta_i + \alpha_i$, $\omega_i' = \beta_i - \alpha_i$, $\omega_3 = \beta_3$ und sind folgende Integrierbarkeitsbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} d\,\beta_1 &= [\beta_3 \beta_2],\ d\,\beta_2 = [\beta_1 \beta_3],\ d\,\beta_3 = [\beta_2 \beta_1] + [\alpha_2 \alpha_1] \\ d\,\alpha_1 &= [\beta_3 \alpha_2],\ d\,\alpha_2 = [\alpha_1 \beta_3],\ 0 \quad = [\beta_2 \alpha_1] + [\alpha_2 \beta_1] \end{aligned}$$

Hiebei bedeuten die Klammern die „alternierenden Produkte" der eingeschlossenen Differentialformen. $\Phi_0 = [\alpha_1 \alpha_2]$ ist das Flächenelement der Bildfläche. Wir setzen $\Phi_0 \neq 0$ voraus.

Aus D_{II} soll nun ein eingliedriger Drehvorgang D_{I} an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) herausgegriffen werden, dem eine Kurve auf der Bildfläche des Parameterraumes entspricht, die durch den Punkt $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$

[6] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O. § 18.

geht. Dies kann durch Vorgabe von $u_i = u_i(t)$ geschehen oder auch dadurch, daß man, von der Stelle (u_1, u_2) ausgehend, das Verschwinden einer vorgegebenen *Pfaff*schen Form verlangt. Nach (5) und (12) können wir nun die zu D_{I} gehörigen Drehpole berechnen. Wir finden

$$\mathfrak{p}' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \frac{\alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \alpha_2 \mathfrak{P}_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{\alpha_1 \mathfrak{r}_1' + \alpha_2 \mathfrak{r}_2'}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \mathfrak{r}_1' \cos\tau + \mathfrak{r}_2' \sin\tau. \tag{14}$$

Im besonderen legen die Differentialgleichungen (*Pfaff*sche Formen) $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$ zwei zwangläufige Drehvorgänge fest, die in D_{II} enthalten sind und in K' die Drehpole $\mathfrak{r}_2' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{P}_2$, bzw. $\mathfrak{r}_1' = \overline{\mathfrak{P}}_0 \mathfrak{P}_1$ besitzen. Der Vektor $\mathfrak{p}'$ eines allgemeinen zwangsläufigen Drehvorganges durch die Stelle (u_1, u_2) ist somit auf $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ aufgespannt. Ändert sich der Winkel τ, der von der Tetraederkante $G_1 = \{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1\}$ und der gerichteten Kurventangente im Punkte $\mathfrak{P}_0$ eingeschlossen wird, so durchläuft $\mathfrak{p}'$ einen Größtkreis in K', dessen Ebene auf $\mathfrak{r}_3'$ senkrecht steht. Gleiches gilt für die ungestrichenen Größen der Gangkugel K. Die Drehpole aller D_{I}, die aus D_{II} an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) herausgehoben werden können, liegen daher in K, wie in K' auf je einem Größtkreis. Diese „*Polkreise*" sind längentreu aufeinander bezogen. — Der früher erwähnten liniengeometrischen Auffassung des Parameterraumes zufolge entsprechen die Punkte dieser Polkreise den gerichteten Flächentangenten, die in der Tangentialebene des Punktes $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ ein Büschel bilden.

Wir können der Stelle (u_1, u_2) von D_{II} nun in K den Endpunkt von $\mathfrak{r}_3$, in K' den von $\mathfrak{r}_3'$ als augenblicklichen „*Pol*" zuordnen. $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ beschreiben als Richtungsvektoren der gerichteten Flächennormalen G_3 die „sphärischen Bilder" der Fläche $\mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ des elliptischen Raumes. Die von *R. Bricard*[7] erkannte *Flächentreue dieser Polzuordnung* entspricht somit der Tatsache, daß die Richtungsvektoren der Flächennormalen einer Fläche auf der Einheitskugel flächentreu aufeinander bezogene sphärische Bilder beschreiben. Es gilt für die Flächenelemente

$$\Omega = [\omega_1\, \omega_2] = [\omega_1'\, \omega_2'] = \Omega'.$$

Statt von der Flächentreue der Polzuordnung können wir auch von der *Dichtetreue der Polkreiszuordnung* sprechen.

Schreibt man umgekehrt die flächentreue Polzuordnung, also die Zuordnung zwischen $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ vor, so bilden die Geraden $G_3 = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ eine Normalenschar (Normalensystem) des elliptischen Raumes. Zu

[7] *R. Bricard*, C. R. Acad. Sci. Paris **166** (1918) 734—735.

dieser Normalenschar gehört aber immer eine Schar „paralleler" Flächen, die von den ∞^2 Geraden des Normalensystems rechtwinkelig durchsetzt werden und als Bildflächen „paralleler" D_{II} mit der vorgegebenen Polzuordnung fungieren. Wird im besonderen die Polzuordnung mit $\Omega = \Omega' = 0$ festgelegt, so besteht das Normalensystem aus den sämtlichen Flächennormalen einer Schar paralleler abwickelbarer Flächen. Für eine solche abwickelbare Fläche *Bianchi*'s verschwindet das *Gauß*sche Krümmungsmaß identisch. Ihr entspricht ein D_{II}, bei dem *eine in K befestigte Kurve ständig eine feste Kurve von K' berührt*[8].

Nun legen wir besondere eingliedrige Drehvorgänge durch die betrachtete Stelle von D_{II}:

1. Berühren die Polbahnen jeweils den Polkreis, so sprechen wir von einem *Schmieg-D_{I}*. Es muß dann $(\mathfrak{r}_3' \, d\,\mathfrak{p}') = 0$ gelten. Aus (14) folgt

$$d\,\mathfrak{p}' = -(\omega_3 + d\tau)\,\mathfrak{r}_1' \sin\tau + (\omega_3 + d\tau)\,\mathfrak{r}_2' \cos\tau + (\omega_1' \sin\tau - \omega_2' \cos\tau)\,\mathfrak{r}_3' \tag{15}$$

und daher $\omega_1' \sin\tau - \omega_2' \cos\tau = 0$ oder $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$. Dies ist aber die Differentialgleichung der Schmiegtangentenlinien auf der Bildfläche $\mathfrak{P}_0\,(u_1, u_2)$ des elliptischen Parameterraumes.

2. Durchsetzen die Polbahnen jeweils die Polkreise senkrecht, so liegt ein *geodätischer* zwangsläufiger Drehvorgang von D_{II} vor. $d\,\mathfrak{p}'$ muß nun die Richtung von $\mathfrak{r}_3'$ haben und somit $\omega_3 + d\tau = 0$ sein. Dies besagt, daß die D_{I} entsprechende Kurve des Parameterraumes eine geodätische Linie auf der Bildfläche von D_{II} ist. Die geodätische Krümmung c einer Flächenkurve ist nämlich $c = (\omega_3 + d\tau) : d\sigma_0$, wobei $d\sigma_0^2 = (d\,\mathfrak{P}_0\, d\,\mathfrak{P}_0) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ das Quadrat des Bogenelementes der Fläche $\mathfrak{P}_0$ ist.

3. Schließlich bezeichnen wir einen eingliedrigen Drehvorgang von D_{II} als *Krümmungs-D_{I}*, wenn die Zuordnung der Pole $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_3'$ längs D_{I} längentreu ist, in K und K' diese Pole also Kurven bilden, die durch gleiche Bogenlängen aufeinander bezogen sind. Wegen $\mathfrak{r}_3' = \overline{\mathfrak{P}}_0\, \mathfrak{r}_3\, \mathfrak{P}_0$ fallen nach der jeweiligen Drehung $\mathfrak{P}_0$ entsprechende Punkte dieser Kurven zusammen, ohne sich jedoch zu berühren ($d\,\mathfrak{r}_3' \neq \overline{\mathfrak{P}}_0\, d\,\mathfrak{r}_3\, \mathfrak{P}_0$). — Es gilt für einen Krümmungs-D_{I}

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_1'^2 + \omega_2'^2 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0. \tag{16}$$

Dies ist aber die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche des elliptischen Raumes. $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ sind die Richtungsvektoren

[8] Vgl. *W. Blaschke*, a. a. O. § 21.

der Flächennormalen, die längs einer Krümmungslinie eine Torse durchläuft.

Aus den bekannten Eigenschaften von Krümmungslinien und Schmiegtangentenlinien einer Fläche folgt nun, daß die zu den beiden Krümmungs-D_{I} gehörigen Drehpole unter einem rechten Winkel aus dem Kugelmittelpunkt gesehen werden und die Drehpole der beiden Schmieg-D_{I} zu ihnen symmetrisch liegen, d. h. von dem einen der Krümmungsdrehpole etwa einen Abstand $\pm\, \tau_0$ besitzen. Für den sphärischen Abstand $2\,\tau_0$ der beiden Schmiegdrehpole findet man leicht

$$\operatorname{tg} 2\,\tau_0 = -\frac{\sqrt{1 - K_0}}{H_0}$$

mit H_0 der mittleren Krümmung und K_0 dem Krümmungsmaß der Fläche $\mathfrak{P}_0\,(u_1, u_2)$ im elliptischen Raum. — Für *Torsen* wird $K_0 \equiv +1$ und fallen die beiden Schmieg-Γ_{I} und damit ihre Drehpole stets zusammen. — Ist überall $\tau_0 = \pi : 4$, so verschwindet H_0 identisch und liegt eine *Minimalfläche* vor.

Ist an einer Stelle (u_1, u_2) von D_{II} die *Bricard*sche Polzuordnung nicht nur flächentreu, sondern in jeder „Fortschreitungsrichtung" auch längentreu, ist also (16) für (u_1, u_2) identisch erfüllt, so können wir diese Stelle als eine *Nabelstelle* von D_{II} bezeichnen. Ihr entspricht im Parameterraum ein Nabelpunkt der Bildfläche. — Ist ein D_{II} so beschaffen, daß an jeder Stelle die Polzuordnung längentreu erfolgt, so ist seine Bildfläche eine *Kugel*. Da deren Flächennormalen $G_3 = \{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ stets durch den Kugelmittelpunkt $\mathfrak{M}$ gehen, gilt für die Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_3' = \overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{M}$. Diese Inzidenzbedingung besagt, daß die augenblicklichen Pole eines *Kugel*-D_{II} aus ihrer Anfangslage $\mathfrak{r}_3$ in K durch eine feste Drehung $\mathfrak{M}$ in ihre Lage $\mathfrak{r}_3'$ in K' übergehen.

Die Bedingung (16) ist natürlich auch erfüllt, wenn $\beta_1 = \beta_2 = o$. Nun ist $\mathfrak{P}_3$ fest und übernimmt die Rolle von $\mathfrak{M}$. Die Kugel artet in eine *Ebene* aus (Radius $= \pi/2$).

Nun einige Bemerkungen zu Drehvorgängen, denen im Parameterraum *geradlinige Flächen* entsprechen:

Wie schon erwähnt, wird durch die Punkte einer Geraden des elliptischen Raumes ein zwangsläufiger Drehvorgang bestimmt, der aus einer kontinuierlichen Drehung um einen festen Drehpol $\mathfrak{r}'$ besteht. Auch in der Ausgangslage von K ist der Punkt $\mathfrak{r}$ fest. — Hängt nun die Gerade $G = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ von einem reellen Parameter t ab, durchläuft sie also eine *Regelfläche* des Parameterraumes, so wird ein D_{II} dargestellt,

der eine Zerlegung in ∞^1 D_{I} gestattet, die jeweils kontinuierliche Drehungen um einen festen Punkt (Drehzentrum) sind. Diese Drehzentren erfüllen auf der Kugel eine Kurve $\mathfrak{r}'(t)$, die durch gleiche Werte t auf die Kurve $\mathfrak{r}(t)$, den Ort der Drehzentren in der Ausgangslage von K bezogen ist. Diese Beziehung ist dann und nur dann längentreu, wenn die Regelfläche eine *Torse* ist. In diesem Fall sind die Orte dieser Drehzentren die Polbahnen jenes im D_{II} enthaltenen D_{I}, dem im Parameterraum die Gratlinie der Torse entspricht.

Schrumpft dieser Drehzentrenort im bewegten System K oder auf der festen Kugel K' auf einen Punkt zusammen, im jeweils anderen System jedoch nicht, ist also entweder $d\,\mathfrak{r} = o$ oder $d\,\mathfrak{r}' = o$, so entspricht unserem Drehvorgang D_{II} im elliptischen Parameterraum ein *Cliffordscher Links-, bzw. Rechtszylinder.* Im ersten Fall ist also der Punkt $\mathfrak{r}$ in der Ausgangslage von K fest und kommt der Reihe nach mit den Punkten der Kurve $\mathfrak{r}'(t)$ in K' zur Deckung, die jeweils als Drehzentren für kontinuierliche Drehungen fungieren. Im zweiten Fall werden die einzelnen Punkte der Kurve $\mathfrak{r}(t)$ in die feste Lage $\mathfrak{r}'$ gebracht und erfolgen dann um diesen Punkt die kontinuierlichen Drehungen. —

Wir greifen aus dem D_{II} nun alle jene D_{I} heraus, die an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) die gleichen Drehpole $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ besitzen. Als Bilder im Parameterraum ergeben sich alle Flächenkurven durch den Punkt $\mathfrak{P}_0\,(u_1, u_2)$, die dort die gleiche Flächentangente berühren.

Ist $\varkappa$ die Krümmung der Bildkurve des ins Auge gefaßten D_{I}, ϑ der Winkel, den die Hauptnormale dieser Kurve mit der Flächennormale G_3 einschließt, und bedeutet $\varkappa^*$ die Krümmung der geodätischen Linie (im besonderen etwa des Normalschnittes) durch den Flächenpunkt in Richtung der Flächentangente, so gilt nach dem Satz von *Meusnier*

$$\varkappa^* = \varkappa \,.\, \cos\vartheta.$$

Der Zusammenhang mit der geodätischen Krümmung c unserer Flächenkurve ist durch $c = \varkappa \,.\, \sin\vartheta$ gegeben.

Wir wollen nun für die betrachteten Drehvorgänge D_{I} die *Wendepunktorte* untersuchen.

Zwecks Vereinfachung der Rechnungen drehen wir erst einmal das die Fläche im elliptischen Raum begleitende Polartetraeder so um die Flächennormale, daß die herausgegriffene Flächentangente zur Tetraederkante wird. Dann erleiden auch in K und K' die von $\mathfrak{r}_i$, bzw. $\mathfrak{r}_i'$ gebildeten Dreibeine Drehungen um $\mathfrak{r}_3$, bzw. $\mathfrak{r}_3'$. Man kann etwa setzen:

$\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{p}' = + \mathfrak{r}_1' \cos\tau + \mathfrak{r}_2' \sin\tau, \quad \mathfrak{q}_2' = - \mathfrak{r}_1' \sin\tau + \mathfrak{r}_2' \cos\tau, \quad \mathfrak{q}_3' = \mathfrak{r}_3'.$

Um Formel (10) anwenden zu können, müssen wir unser Polartetraeder und damit die Dreibeine von K und K' abermals drehen, bis die Kante G_3 in die Hauptnormale der Flächenkurve fällt. Die feste Tangente dient für diese Drehung als Drehachse; der Drehwinkel ist $\frac{\pi}{2} - \vartheta$.

$\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{p}', \mathfrak{p}_2' = + \mathfrak{q}_2' \sin\vartheta + \mathfrak{q}_3' \cos\vartheta, \mathfrak{p}_3' = - \mathfrak{q}_2' \cos\vartheta + \mathfrak{q}_3' \sin\vartheta.$

Beziehen wir den Vektor $\mathfrak{x}' = x_1' \mathfrak{r}_1' + x_2' \mathfrak{r}_2' + x_3' \mathfrak{r}_3'$ nun auf diese Dreibeine der $\mathfrak{q}_i'$ und $\mathfrak{p}_i'$, setzen wir also $\mathfrak{x}' = y_1' \mathfrak{q}_1' + y_2' \mathfrak{q}_2' + y_3' \mathfrak{q}_3' = z_1' \mathfrak{p}_1' + z_2' \mathfrak{p}_2' + z_3' \mathfrak{p}_3'$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= + x_1' \cos\tau + x_2' \sin\tau \\ y_2' &= - x_1' \sin\tau + x_2' \cos\tau \\ y_3' &= \quad x_3' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} z_1' &= \quad y_1' \\ z_2' &= + y_2' \sin\vartheta + y_3' \cos\vartheta \\ z_3' &= - y_2' \cos\vartheta + y_3' \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$\mathfrak{x}'$ beschreibt nach (10) gerade einen Wendepunkt, wenn

$$\varkappa z_3' - 2 z_1' (1 - z_1'^2) = o.$$

Durch Einsetzen von (17) ergibt sich daraus die Gleichung im Dreibein der $\mathfrak{q}_i'$:

$$c\, y_3' - \varkappa^* y_2' - 2 y_1' + 2 y_1'^3 = o$$

Nur der Koeffizient c hängt hierin von der Wahl der Kurve durch das festgehaltene Linienelement auf der Bildfläche $\mathfrak{P}_0 (u_1, u_2)$ ab. In der Ebene $x_3' = y_3' = o$ liegen somit, abgesehen vom Drehpol, im allgemeinen noch zwei Punkte $\mathfrak{h}'$, die den sämtlichen Wendepunktorten aller betrachteten D_{I} angehören. Für sie gilt:

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{q}_1' \cos\eta + \mathfrak{q}_2' \sin\eta = \mathfrak{r}_1' \cos\xi + \mathfrak{r}_2' \sin\xi$$

mit

$$\varkappa^* = - \sin 2\eta = \sin 2(\tau - \xi).$$

Alle zwangsläufigen Drehvorgänge, die in einem flächenläufigen Drehvorgang enthalten sind und an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) gemeinsame Drehpole besitzen, haben im allgemeinen zwei Wendepunkte gemeinsam, die auf dem Polkreis liegen.

Nun ermitteln wir die *Wendepole* eines aus D_{II} herausgehobenen D_{I}. Nach (11) gilt für die Wendepole die Darstellung

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{p}_1' \cos\omega + \mathfrak{p}_3' \sin\omega = \mathfrak{q}_1' \cos\omega - \mathfrak{q}_2' \cos\vartheta \sin\omega + \mathfrak{q}_3' \sin\vartheta \sin\omega,$$

wobei $\sin 2\omega = \varkappa$ ist. Daraus finden wir leicht die Gleichung des Ortes des Wendepole aller D_{I} mit gemeinsamen Drehpolen. Wir setzen

$$y_1' = \cos\omega,\ y_2' = -\cos\vartheta\sin\omega,\quad y_3' = \sin\vartheta\sin\omega$$

in $\varkappa^* = \cos\vartheta\sin 2\omega$ ein und erhalten im System der $\mathfrak{q}_i'$ die Bedingung

$$2\,y_1'\,y_2' + \varkappa^* = o. \tag{18}$$

Der Wendepolort aller D_{I} mit gemeinsamen Drehpolen wird also von einem hyperbolischen Zylinder (mit der Achsenrichtung $\mathfrak{q}_3' = \mathfrak{r}_3'$) aus der Einheitskugel ausgeschnitten. Betrachtet man das durch diese beiden Flächen festgelegte Büschel von Flächen zweiter Ordnung

$$\lambda\,(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 - 1) + \mu\,(2\,y_1'\,y_2' + \varkappa^*) = o,$$

so sieht man, daß für $\lambda = \mu\,\varkappa^*$ ihm der Kegel zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$\varkappa^*\,(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2) + 2\,y_1'\,y_2' = o$$

als singuläre Fläche angehört. Seine Spitze liegt in $\mathfrak{o}$. *Der Wendepolort ist somit ein sphärischer Kegelschnitt.*

Auf ihm liegen auch die früher betrachteten Punkte $\mathfrak{y}'$; sie sind Wendepole des geodätischen D_{I} durch die Stelle (u_1, u_2) von D_{II} bei festgehaltenen Drehpolen, denn die zugehörigen Polbahnen durchsetzen dort den Polkreis senkrecht. *Diese „geodätischen Wendepole" sind also die Schnittpunkte des Polkreises mit dem Wendepolort, der ein sphärischer Kegelschnitt ist und in ihnen Scheitelpunkte besitzt.* Durch sie gehen sämtliche Wendepunktkurven von zwangsläufigen Drehvorgängen mit festen Drehpolen. — Aus (18) folgert man, daß der Wendepolort für $|\varkappa^*| < 1$ reell ist. Für $|\varkappa^*| = 1$ zieht er sich auf einen Punkt zusammen.

Gelenkvierecke auf der Kugel: Wir fragen zuerst nach allen Geraden $X = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}']$ des Parameterraumes, deren linke Bildpunkte $\mathfrak{x}$ in der kinematischen Abbildung, die unseren Überlegungen zugrunde liegt, fest sind, während die rechten Bildpunkte $\mathfrak{x}'$ einen Kreis mit dem sphärischen Mittelpunkt $\mathfrak{m}'$ durchlaufen. Wir fassen neben diesen Geraden X noch alle Gerade $Y = [\mathfrak{y}, \mathfrak{y}']$ mit festen rechten Bildpunkten $\mathfrak{y}'$ ins Auge, für die umgekehrt die linken Bildpunkte $\mathfrak{y}$ auf einem Kreis um $\mathfrak{m}$ beweglich sind. Falls $\mathfrak{m} = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{y}'$ gewählt wird und die „Kreisradien" ϱ gleich sind, also $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}') = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{m}') = \cos\varrho$ gilt, durchläuft X den linksparallelen und Y den rechtsparallelen Regulus einer *Clifford*schen Quadrik. Die Erzeugenden X und Y schneiden sich unter dem festen Winkel ϱ und ihre Punkte haben von den Achsen $[\pm\,\mathfrak{m}, \pm\,\mathfrak{m}']$ den Abstand $\pm\,\varrho : 2$, bzw. $(\pi \pm \varrho) : 2$.

Ist die freie Beweglichkeit der beiden Kugelschalen K, K' nur durch die Bedingung eingeschränkt, daß ein in K befestigter Punkt $\mathfrak{x}$ eine Kreisbahn in K' beschreibt, also $\mathfrak{x}'$ auf obigem Kreis wandert, so kann die *Clifford*sche Quadrik als Bild dieser sphärischen *Einklammerbewegung* angesehen werden. Den Punkten der Erzeugenden X entsprechen hiebei die kontinuierlichen Drehungen von K um $\mathfrak{x}'$.

Werden nun zwei Punkte $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ von K auf Kreisen um $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$ geführt, so ist die Bildkurve des dadurch bestimmten eingliedrigen Drehvorganges (Sphärische *Zweiklammerbewegung*) als Durchdringungskurve zweier *Clifford*scher Quadriken von vierter Ordnung und erster Art. Diese Kurve hängt natürlich auch noch von der Ausgangslage der Punkte $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_2'$, d. h. von der Wahl des „Koppelstückes" ab. Seine Länge λ ist durch $(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{x}_1'\,\mathfrak{x}_2') = \cos\lambda$ festgelegt. Bloße Änderung der Koppellänge führt zu Lagenänderungen (Bewegungen) obiger *Clifford*schen Flächen und somit zu einer anderen Schnittkurve.

Übereinstimmung der „Armlängen" $\varrho_1 = \varrho_2$ mit $(\mathfrak{m}_i'\,\mathfrak{x}_i') = \cos\varrho_i$ ergibt zwei kongruente *Clifford*sche Flächen. Ist außerdem noch $(\mathfrak{m}_1'\,\mathfrak{m}_2') = (\mathfrak{x}_1'\,\mathfrak{x}_2')$, haben also gegenüberliegende Seiten des Gelenkvierecks gleiche Länge, so schneiden sich die Achsen und die beiden Flächen berühren sich doppelt. Die Bildkurve des D_{I} zerfällt in zwei Kegelschnitte.

Ist das Gelenkviereck ein *Deltoid*, gilt also etwa $(\mathfrak{m}_1'\,\mathfrak{x}_1') = (\mathfrak{m}_1'\,\mathfrak{m}_2')$, $(\mathfrak{x}_2'\,\mathfrak{x}_2') = (\mathfrak{m}_2'\,\mathfrak{x}_2')$, so zerfällt das Bild im Parameterraum in eine Kurve dritter Ordnung und eine Gerade. Letztere entspricht der kontinuierlichen Drehung, die für das Zusammentreffen von $\mathfrak{x}_1'$ mit $\mathfrak{m}_2'$ möglich ist.