Werk

Titel: Über geschlossene Bewegungsvorgänge.

Autor: Müller, Hans Robert

Jahr: 1951

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0055|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über geschlossene Bewegungsvorgänge.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 29. Dezember 1950.)

Wir gehen von einem zwangsläufigen, geschlossenen Drehvorgang D auf der Einheitskugel aus. Mit der Rastkugel K' sei das Rastkreuz $\{\mathfrak{O}; \mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_3'\}$, ein als ruhend angenommenes rechtwinkeliges, rechtshändiges Dreibein mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{E}_i'$ und dem Ursprung $\mathfrak{O}$ im Kugelmittelpunkt starr verbunden. Für die bewegliche Kugel K (Gangkugel) werde ein ebensolches Achsenkreuz, das Gangkreuz $\{\mathfrak{O}; \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3\}$ mit dem gleichen Ursprung gewählt. Gilt nun

$$\mathfrak{E}_i = \Sigma A_{ik} \mathfrak{E}_k' \tag{1}$$

wobei die $A_{i\varkappa}$ eine orthogonale Matrix bilden und periodische Funktionen eines reellen Parameters t mit der Periode 2π sind, so beschreibt K einen zwangsläufigen, geschlossenen Drehvorgang D gegenüber K'. Die Änderungen der $\mathfrak{E}_i$ können wir wiederum auf das Gangkreuz beziehen und folgendes System von Ableitungsgleichungen finden:

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{E}_1 &= \mathfrak{E}_2\,\Omega_3 - \mathfrak{E}_3\,\Omega_2 \\ d\mathfrak{E}_2 &= \mathfrak{E}_3\,\Omega_1 - \mathfrak{E}_1\,\Omega_3 \\ d\mathfrak{E}_3 &= \mathfrak{E}_1\,\Omega_2 - \mathfrak{E}_2\,\Omega_1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Ω_i sind hierin *Pfaff*sche Formen in der Veränderlichen t, haben also die Gestalt $\Omega_i = f_i(t)\,.\,dt$. Wird ein Punkt $\mathfrak{X}$ an der Gangkugel K befestigt, so sind in

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_1 X_1 + \mathfrak{E}_2 X_2 + \mathfrak{E}_3 X_3 \tag{3}$$

die Werte X_i fest und gilt

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1.$$

Wegen (2) finden wir für die Ableitung

$$d\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_1(\Omega_2 X_3 - \Omega_3 X_2) + \mathfrak{E}_2(\Omega_3 X_1 - \Omega_1 X_3) + \mathfrak{E}_3(\Omega_1 X_2 - \Omega_2 X_1). \tag{4}$$

Nach Einführung des Drehvektors

$$\Omega = \mathfrak{E}_1\Omega_1 + \mathfrak{E}_2\Omega_2 + \mathfrak{E}_3\Omega_3 \tag{5}$$

können wir statt (4) das Vektorprodukt

$$d\mathfrak{X} = \Omega \times \mathfrak{X} \tag{6}$$

schreiben. Der Einheitsvektor

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{E}_1 P_1 + \mathfrak{E}_2 P_2 + \mathfrak{E}_3 P_3 \tag{7}$$

mit

$$P_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = (\Omega\Omega) = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 \tag{8}$$

weist zum augenblicklichen Drehpol. $\mathfrak{P}$ beschreibt in K die Gangpolbahn $\mathfrak{P}(t)$ von D; hierbei beziehen wir (7) auf K, sehen also die $\mathfrak{E}_i$ als fest an. Berücksichtigen wir jedoch noch (1), so beschreibt $\mathfrak{P}$ in K' die Rastpolbahn, wofür wir $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'(t)$ setzen. Beim Ablauf von D rollt die Kurve $\mathfrak{P}(t)$ auf $\mathfrak{P}'(t)$. Eine Vorzeichenänderung von Ω_0 bewirkt den Übergang zum Gegenpunkt von $\mathfrak{P}$ als Drehpol. Ω_0 ist der infinitesimale Drehwinkel zum Zeitpunkt t. Schließen in benachbarten Punkten der Gangpolbahn $\mathfrak{P}(t)$ die berührenden Großkreise den Winkel $\Gamma = \Gamma(t)$ ein (geodätischer Kontingenzwinkel) und hat $\Gamma' = \Gamma'(t)$ für die Rastpolbahn $\mathfrak{P}'(t)$ die gleiche Bedeutung, so gilt, wie unmittelbar einzusehen (oder natürlich auch eine einfache Rechnung zeigt)

$$\Gamma' - \Gamma = \Omega_0. \tag{9}$$

Γ und Γ' können auch als Elemente der geodätischen Krümmungen der Polbahnen gedeutet werden. Durch Integration längs unseres geschlossenen Drehvorganges D finden wir

$$G' - G = \oint \Omega_0. \tag{10}$$

$G = \oint \Gamma$, $G' = \oint \Gamma'$ sind hierin die geodätischen Gesamtkrümmungen der Polbahnen; in

$$\oint \Omega_0 = 2\pi M \tag{11}$$

ist M die Drehzahl unseres Bewegungsvorganges auf der Kugel.

Der in K befestigte Punkt $\mathfrak{X}$ beschreibt bei D eine geschlossene Bahnkurve, für deren geodätische Gesamtkrümmung $G_{\mathfrak{X}}$ *W. Blaschke*[1] folgenden Ausdruck fand:

$$G_{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{V}\mathfrak{X}) + 2\pi N_{\mathfrak{X}} = \Sigma V_i X_i + 2\pi N_{\mathfrak{X}}. \tag{12}$$

Darin ist

[1] *W. Blaschke*, Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel. Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1948/2.

$$V_i = \oint \Omega_i \tag{13}$$

und bedeutet

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{E}_1 V_1 + \mathfrak{E}_2 V_2 + \mathfrak{E}_3 V_3 \tag{14}$$

den „*Steiner*-Vektor" von D. Die ganze Zahl $N_{\mathfrak{X}}$ ist die Umlaufzahl der Gangpolbahn $\mathfrak{P}(t)$ um den Punkt $\mathfrak{X}$. Es stellt

$$\oint dT = 2\pi N_{\mathfrak{X}} \tag{15}$$

die Gesamtrichtungsänderung (Integral der Richtungsänderung) der Bahntangente $\mathfrak{T}$ des Punktes $\mathfrak{X}$ gegenüber K' dar.

E. Study's Übertragungsprinzip der Liniengeometrie besteht in der eindeutigen Abbildung der gerichteten Geraden des dreidimensionalen Euklidischen Raumes auf die dualen Punkte der Einheitskugel. Besitzt ein Strahl $\mathfrak{G}$ den Richtungsvektor $\mathfrak{g}$ und den Momentvektor $\bar{\mathfrak{g}}$ um den Ursprung $\mathfrak{o}$, so wird das Vektorpaar $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ zum dualen Einheitsvektor $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{g}}$ mit $\varepsilon^2 = 0$ zusammengefaßt. Statt $(\mathfrak{g}\mathfrak{g}) = 1$, $(\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}) = 0$ können wir nun kurz $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}) = 1$ schreiben. — Der Gruppe der dualen Drehungen der Einheitskugel entspricht nun die Euklidische Bewegungsgruppe des Linienraumes.

Erweitern wir nun den zwangsläufigen, geschlossenen Drehvorgang D ins Duale, so erhalten wir durch Übertragung einen zwangsläufigen, geschlossenen Bewegungsvorgang B im Euklidischen Linienraum. Hierzu sehen wir alle durch große Buchstaben bezeichneten Größen als duale Zahlen, bzw. Vektoren an, deren Realteile wir durch die zugehörigen kleinen Buchstaben ausdrücken; die Dualteile mögen dann durch Überstreichen angedeutet werden. Bei dieser Erweiterung ist lediglich auf das Auftreten von Nullteilern zu achten!

Im dreidimensionalen Raum vollführt nun das Gangkreuz $\{\mathfrak{o};\ \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ als Vertreter des Gangraumes R den zwangsläufigen Bewegungsvorgang B gegenüber dem Rastraum R' mit dem Rastkreuz $\{\mathfrak{o}';\ \mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3'\}$. Für die Achsenschnittpunkte $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ sind die Inzidenzbedingungen erfüllt:

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = \mathfrak{o} \times \mathfrak{e}_i, \quad \bar{\mathfrak{e}}_i' = \mathfrak{o}' \times \mathfrak{e}_i'. \tag{16}$$

Der Bewegungsvorgang auf der Kugel kann im Augenblick als infinitesimale Drehung um den Drehpol $\mathfrak{P}$ mit dem Drehwinkel Ω_0 angesehen werden. Dem entspricht im Linienraum die infinitesimale Schraubung, die sich aus der Drehung um die Schraubachse $\mathfrak{P}$ durch den Winkel ω_0 und der Schiebung in ihrer Richtung um die Schiebstrecke $\bar{\omega}_0$ zusammensetzt. Der Schraubparameter ist somit

$$k = \frac{\overline{\omega}_0}{\omega_0} = \frac{(\omega\overline{\omega})}{(\omega\omega)} = \frac{\omega_1\overline{\omega}_1 + \omega_2\overline{\omega}_2 + \omega_3\overline{\omega}_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}, \tag{17}$$

Den von $\mathfrak{P}$ in K, bzw. K' beschriebenen Polbahnen entsprechen nun in R, bzw. R' die auf einander schrotenden Achsenflächen. — Die Geschlossenheit des sphärischen Drehvorgangs D bewirkt, daß nicht nur die Polbahnen geschlossene Kurven auf der Kugel, sondern auch die Achsenflächen geschlossene Regelflächen im Raum sind. Durch duale Übertragung wird aus der geschlossenen Bahnkurve eines in K befestigten Punktes $\mathfrak{X}$ die geschlossene Bahnfläche der im Gangraum R festen Geraden $\mathfrak{X}$.

Ein Punkt $\mathfrak{X}$ beschreibe eine (duale) Kurve auf der Einheitskugel. Längs dieser Kurve betrachten wir den Flächenstreifen (Krümmungsstreifen) und denken uns ein begleitendes rechtwinkeliges Dreibein mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{X}_i$ angebracht. Deuten wir die Ableitungen nach t durch Punkte an, so können wir setzen

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_3, \quad \frac{\dot{\mathfrak{X}}}{P} = \mathfrak{X}_1, \quad \frac{\mathfrak{X} \times \dot{\mathfrak{X}}}{P} = \mathfrak{X}_2. \tag{18}$$

Die Ableitungsgleichungen besitzen dann die Gestalt

$$\dot{\mathfrak{X}}_1 = Q\mathfrak{X}_2 - P\mathfrak{X}_3, \quad \dot{\mathfrak{X}}_2 = -Q\mathfrak{X}_1, \quad \dot{\mathfrak{X}}_3 = P\mathfrak{X}_1, \tag{19}$$

wobei

$$P = \sqrt{(\dot{\mathfrak{X}}\dot{\mathfrak{X}})}, \quad Q = \frac{(\mathfrak{X}\,\dot{\mathfrak{X}}\,\ddot{\mathfrak{X}})}{(\dot{\mathfrak{X}}\,\dot{\mathfrak{X}})} \tag{20}$$

gesetzt wurde. $P \,.\, dt = dS$ bedeutet das (duale) Bogenelement, $Q : P$ (die duale) geodätische Krümmung der Bahnkurve des Punktes $\mathfrak{X}$.

$$G = \oint Q\, dt \tag{21}$$

ist dann die geodätische Gesamtkrümmung der sphärischen Kurve $\mathfrak{X}(t)$.

Im Linienraum ergibt sich durch duale Übertragung eine Strahlfläche $\mathfrak{X}(t)$ mit den dualen Differentialinvarianten $P = p + \varepsilon\,\overline{p}$ und $Q = q + \varepsilon\,\overline{q}$; $\mathfrak{X}_1$ ist jeweils Zentralnormale, $\mathfrak{X}_2$ Zentraltangente.

Der reellen Integralinvarianten $\int \overline{q}\, dt$ kommt die geometrische Bedeutung zu, längs der Erzeugenden $\mathfrak{X}$ unserer Strahlfläche die Entfernung r des Kehlpunktes von einer *Querlinie* zu messen[2]. Eine Quer-

[2] *W. Blaschke*, Vorl. ü. Differentialgeometrie I, 4. Aufl. Berlin-Springer, 1945, S. 272.

linie ist hierbei eine Kurve der geradlinigen Fläche, die die Erzeugenden senkrecht durchsetzt. — Bei einer geschlossenen Regelfläche kehrt die Erzeugende $\mathfrak{X}$ wiederum in ihre Ausgangslage zurück, wenn der Parameter gerade einmal die Periode durchläuft; die Querlinie schließt sich jedoch im allgemeinen nicht, sondern trifft dieselbe Erzeugende in einem Punkt, der vom Ausgangspunkt verschieden ist. Die Entfernung $\mathfrak{l}$ dieser beiden Punkte, die von der Wahl der Querlinie auf der geschlossenen Regelfläche unabhängig ist, wird nach *W. Blaschke* als „*Öffnung*" der geschlossenen Regelfläche bezeichnet. Diese Integralinvariante

$$\mathfrak{l} = | r(2\pi) - r(0) | = | \oint \bar{q}\, dt | \tag{22}$$

spielt auch in der geometrischen Optik eine wichtige Rolle.

Auch für die Integralinvariante $\int q\, dt$ kann eine geometrische Deutung gefunden werden, die der von $\int \bar{q}\, dt$ dual gegenübersteht. *Wir umschreiben der Strahlfläche $\mathfrak{X}(t)$ so eine Torse $\mathfrak{Y}(t)$, daß deren Erzeugende $\mathfrak{Y}$ jeweils auf der Erzeugenden $\mathfrak{X}$ senkrecht steht.* Dies führt zum Ansatz

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 \sin \Phi + \mathfrak{X}_2 \cos \Phi, \quad \Phi = \varphi + \varepsilon\, \bar{\varphi}. \tag{23}$$

Der Strahl $\mathfrak{Y}$ ist hierbei gegen die Zentraltangente $\mathfrak{X}_2$ unter dem Winkel φ geneigt und besitzt vom Zentralpunkt der Strahlfläche den kürzesten Abstand $\bar{\varphi}$.

Soll die Gerade $\mathfrak{Y}$ auch in der Tangentialebene ihres Schnittpunktes mit der Erzeugenden $\mathfrak{X}$ unserer Strahlfläche liegen, so muß sie auch die Nachbarerzeugende $\mathfrak{X} + d\mathfrak{X}$ schneiden, was das Verschwinden des folgenden Dualteiles bedingt

$$D(\dot{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}) = D(P \sin \Phi) = \bar{p} \,.\, \sin\varphi + p\, \bar{\varphi} \,.\, \cos\varphi = 0. \tag{24}$$

Aus (19) und (23) folgt

$$\dot{\mathfrak{Y}} = -\mathfrak{X}_1 (Q - \dot{\Phi}) \cos \Phi + \mathfrak{X}_2 (Q - \dot{\Phi}) \sin \Phi - \mathfrak{X}_3 P \sin \Phi, \tag{25}$$

$$(\dot{\mathfrak{Y}}\dot{\mathfrak{Y}}) = (Q - \dot{\Phi})^2 + P^2 \sin^2 \Phi. \tag{26}$$

Für eine Torse ist

$$D(\dot{\mathfrak{Y}}\dot{\mathfrak{Y}}) = 0, \tag{27}$$

was wegen (24) mit

$$(q - \dot{\varphi})(\bar{q} - \dot{\bar{\varphi}}) = 0 \tag{28}$$

gleichwertig ist.

Ist die Torse $\mathfrak{Y}(t)$ der Strahlfläche $\mathfrak{X}(t)$ umschrieben, so stimmen die Flächennormalen beider Flächen im jeweiligen Berührungspunkt überein, d. h. legen

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = -\mathfrak{X}_1 \cos \Phi + \mathfrak{X}_2 \sin \Phi \tag{29}$$

und

$$\mathfrak{Y} \times \dot{\mathfrak{Y}} = (-\mathfrak{X}_1 \cos \Phi + \mathfrak{X}_2 \sin \Phi)\, P \sin \Phi + \mathfrak{X}_3 (Q - \dot{\Phi}) \tag{30}$$

dieselbe Richtung fest. (Die Realteile unterscheiden sich nur um einen reellen Faktor.) Dies ergibt

$$q - \dot{\varphi} = 0 \tag{31}$$

und somit die Deutung von

$$\int q\, dt = \varphi \tag{32}$$

als *Neigungswinkel der umschriebenen Torse gegen die Zentralebene* in der Erzeugenden $\mathfrak{X}$. — Für eine geschlossene Fläche $\mathfrak{X}(t)$ schließt sich im allgemeinen die umschriebene Torse nicht, sondern kehrt, unter dem Winkel

$$\lambda = |\varphi(2\pi) - \varphi(0)| = |\oint q\, dt| \tag{33}$$

gegen die Ausgangslage geneigt, zur Erzeugenden $\mathfrak{X}$ zurück.

Das Verschwinden des zweiten Faktors von (28) führt zu den Querlinien und der oben erwähnten Deutung von

$$\int \bar{q}\, dt = \bar{\varphi} = r \tag{34}$$

(In diesem Fall muß die Berührung von Torse und Strahlfläche längs der Gratlinie der ersteren stattfinden, also

$$D(\mathfrak{X}\, \mathfrak{Y}\, \dot{\mathfrak{Y}}) = 0 \tag{35}$$

sein.) Für geschlossene Regelflächen sind beide Größen, der „*Öffnungswinkel*" λ, wie die „*Öffnungsstrecke*" l unabhängig von der Wahl des Ausgangselementes (Ebene, bzw. Punkt) auf der Erzeugenden $\mathfrak{X}$.

Nun übertragen wir die Formeln (10) und (12) über die geodätischen Gesamtkrümmungen in den Linienraum. Die Realteile liefern einmal Aussagen über die sphärischen Bildkurven der betreffenden geradlinigen Flächen, also nur über die im räumlichen Bewegungsvorgang enthaltenen reinen Drehbewegungen (Richtungsbewegungen). Sie können aber auch, so wie die Dualteile zu Aussagen über die Öffnungsgrößen der betreffenden geschlossenen Strahlflächen führen. So besagt

$$g' - g = \oint \omega_0 = 2\pi\mu \tag{36}$$

einmal, daß *die Differenz der geodätischen Gesamtkrümmungen der sphärischen Bildkurven der Achsenflächen gleich der Gesamtdrehung unseres Bewegungsvorganges ist.*

Andererseits gilt: *Die Öffnungswinkel der beiden Achsenflächen unterscheiden sich gerade um die Gesamtdrehung von B.*

Die Dualteile von (10) ergeben die Beziehung

$$\bar{g}' - \bar{g} = \oint \bar{\omega}_0. \tag{37}$$

Die Differenz der Öffnungsstrecken der beiden Achsenflächen ist somit gleich der Gesamtschiebstrecke unseres geschlossenen Bewegungsvorgangs. Wegen (17) können wir für letztere auch

$$\oint \bar{\omega}_0 = \oint k\,\omega_0 \tag{38}$$

schreiben.

Die Aufspaltung von (12) liefert als Realteil für den *Öffnungswinkel einer Bahnfläche* oder *für die geodätische Gesamtkrümmung der sphärischen Bildkurve der Bahnfläche von* $\mathfrak{X}$ den Ausdruck

$$g_{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{x}) + 2\pi\, n_{\mathfrak{X}} = \Sigma\, v_i\, x_i + 2\pi\, n_{\mathfrak{X}}. \tag{39}$$

Hierbei ist $n_{\mathfrak{X}}$ wieder die Umlaufzahl des Richtkegels der beweglichen Achsenfläche um die Richtung $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{X}$ und gilt

$$2\pi\, n_{\mathfrak{X}} = \oint d\tau. \tag{40}$$

Als Dualteil finden wir

$$\bar{g}_{\mathfrak{X}} = \Sigma\,(v_i\,\bar{x}_i + \bar{v}_i\,x_i) + \oint d\bar{\tau}. \tag{41}$$

Auf der Einheitskugel war $\mathfrak{T}$ die Bahntangente des in K befestigten dualen Punktes $\mathfrak{X}$ bei dem zugrunde gelegten Drehvorgang D. Da die Bahntangente $\mathfrak{T}$ nicht nur auf $\mathfrak{X}$, sondern auch auf dem jeweiligen Polstrahl senkrecht steht, gilt

$$(\mathfrak{T}\,\mathfrak{X}) = 0, \quad (\mathfrak{T}\,\mathfrak{P}) = 0. \tag{42}$$

Im Linienraum durchläuft somit der Strahl $\mathfrak{T}$ ein *gerades Konoid*, falls wir den Standpunkt des Beobachters in den Gangraum R verlegen. Dieses Konoid besteht aus den sämtlichen normalen Treffgeraden der in R festen Leitlinie $\mathfrak{X}$ und der einzelnen Erzeugenden der Achsenfläche $\mathfrak{P}\,(t)$. Es mißt daher $d\tau$ den Winkel, $d\bar{\tau}$ die Entfernung (Normalabstand) benachbarter Erzeugenden dieses Konoides. Da unser Bewegungsvorgang geschlossen ist, gilt gleiches von den Achsenflächen, aber auch von dem geraden Konoid in R, denn die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$, also die Fußpunkte obiger Gemeinlote $\mathfrak{T}$ bilden auf der Achsenfläche eine geschlossene Kurve[3]. Daher ist

$$\oint d\bar{\tau} = 0 \tag{43}$$

[3] Es sei keine der Erzeugenden $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{X}$ parallel!

und vereinfacht sich der Ausdruck (41) für die *Öffnungsstrecke* der *Bahnfläche*

$$\bar{g}_{\mathfrak{X}} = \Sigma\,(v_i\,\bar{x}_i + \bar{v}_i\,x_i). \tag{44}$$

W. Blaschke berechnete direkt diesen Ausdruck und deutete ihn als Moment der Geraden $\mathfrak{X}$ um die Schraube $\mathfrak{K}$. Diese auch von *G. Koenigs* benützte Schraube ist durch die sechs Integrale bestimmt

$$\begin{gathered} v_i = \oint \omega_i = k_{0i},\ \ \bar{v}_i = \oint \bar{\omega}_i = k_{jk} \\ (i, j, k = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2) \end{gathered} \tag{45}$$

Die *Study*sche Übertragung liefert somit unmittelbar aus (12) die Formel (44).

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den geschlossenen Drehvorgang auf der Kugel, dessen Polbahnen Kreise mit rationalem Umfangverhältnis sind; die Bahnkurven sind dann sphärische Radlinien. Bei geeigneter Wahl der Achsenkreuze können wir für die Polbahnen setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{e}_1 \sin P \cos nt + \mathfrak{e}_2 \sin P \sin nt + \mathfrak{e}_3 \cos P \\ \mathfrak{P}' &= \mathfrak{e}_1' \sin P' \cos n't + \mathfrak{e}_2' \sin P' \sin n't + \mathfrak{e}_3' \cos P' \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

P, P' sind die sphärischen Radien; sie erfüllen die Bedingung

$$n \sin P = n' \sin P'. \tag{47}$$

Die Zahlen n, n' seien ganz und relativ prim.

Die beiden Achsenkreuze sind durch $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$, $\dot{\mathfrak{P}} = \dot{\mathfrak{P}}'$ aufeinander bezogen, was

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= n' \sin (P - P') \cos nt\, dt \\ \Omega_2 &= n' \sin (P - P') \sin nt\, dt \\ \Omega_3 &= [-n + n' \cos (P - P')]\, dt \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und somit

$$\Omega_0 = (n' \cos P' - n \cos P)\, dt \tag{49}$$

zur Folge hat. Wir finden für die geodätischen Kontingenzwinkel

$$\Gamma = n \cos P\, dt, \quad \Gamma' = n' \cos P'\, dt \tag{50}$$

und daher für die Gesamtkrümmungen

$$G = 2\pi n \cos P, \quad G' = 2\pi n' \cos P'. \tag{51}$$

Die Übertragung in den Linienraum — es werden hierzu nur $P = \varrho + \varepsilon\,\bar{\varrho}$ und $P' = \varrho' + \varepsilon\,\bar{\varrho}'$ als duale Zahlen aufgefaßt — führt die beiden aufeinander rollenden Polkreise in zwei Drehhyperboloide über, die aufeinander schroten. Ihre Gleichungen sind

$$\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{z_3}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{z_1'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{z_2'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{z_3'}{b'}\right)^2 = 1, \tag{52}$$

wobei

$$a = \bar{\varrho}, \; a' = \bar{\varrho}', \; b = b' = \bar{\varrho} \operatorname{ctg} \varrho = \bar{\varrho}' \operatorname{ctg} \varrho \tag{53}$$

gilt. — Die letzte Gleichung besagt die Übereinstimmung des Dralls der beiden Hyperboloide. Der Öffnungswinkel eines solchen ist

$$\lambda = 2\pi n \cos \varrho = \frac{2\pi n b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{54}$$

die Öffnungsstrecke

$$\mathfrak{l} = -2\pi n \bar{\varrho} \sin \varrho = \frac{-2\pi n a^2}{\sqrt{a^2 + b^{2\prime}}}. \tag{55}$$

Die Gesamtdrehung, wie die Gesamtschiebung unseres räumlichen Bewegungsvorganges kann nun nach (36), (37) leicht gefunden werden. Die Formeln (51), (54), (55) sind auf die Periode des geschlossenen Dreh-, bzw. Bewegungsvorgangs bezogen; für die geschlossenen Polbahnen oder Achsenflächen allein wäre sonst noch durch n, bzw. n' zu dividieren.