Werk

Titel: Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethode...

Autor: Picone, Mauro; Fichera, Gaetano

Jahr: 1950

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362162050_0054|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen.[1]

Von
Mauro Picone und **Gaetano Fichera,** Rom.

(Eingelangt am 23. Januar 1950.)

Seitdem ich im Jahre 1930 die Leitung des Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo übernommen habe, habe ich mehrmals in meinen Veröffentlichungen darauf hingewiesen, daß die quantitative und Existenzanalysis der gewöhnlichen wie auch partiellen Differentialgleichungen, welche in den experimentellen Wissenschaften und in der Technik vorkommen, auf Grund ihrer Transformation in Integralgleichungen erster statt zweiter Art anzugreifen ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, verweise ich den Leser auf meine letzten Artikel: „Sulla trasformazione in equazioni integrali lineari di prima specie dei problemi al contorno..."[2].

Die fruchtbare Tätigkeit meiner Mitarbeiter im Ist. Naz. per le Appl. del Calcolo hat diesen Anschauungen die glänzendste Bestätigung erbracht, die ich erwarten konnte, wobei sich besonders die Herren *Luigi Amerio, Aldo Ghizzetti* und *Gaetano Fichera* hervorgetan haben[3]. Dem letztgenannten ist es durch eine geniale Synthesis und auch auf Grund der durch die erstgenannten erhaltenen Resultate gelungen, in bedeutenden Spezialfällen vollständige Funktionensysteme aufzufinden, welche mit Hilfe meiner Methoden es erlauben, nicht nur die Konvergenz des Verfahrens, sondern auch die Existenz der Lösung in diesen Fällen zu beweisen. Dadurch halte ich meine Überzeugung, nach welcher die Fortsetzung der Forschungen in der in den obengenannten Artikeln

---

[1] Diese Arbeit wurde im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (Rom) abgefaßt und am II. Österreichischen Mathematiker-Kongreß (Innsbruck, 29. VIII./2. IX. 1949) vorgetragen.

[2] S. *M. Picone* (3), S. Literatur am Ende des Artikels.

[3] S. *L. Amerio* (1), (2), (3), (4), *A. Ghizzetti* (1), (2), (3), *G. Fichera* (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9).

hingewiesenen Richtung es erlauben würde, eine neue Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zu gründen, deren Resultate vom theoretischen und praktischen Standpunkt als besonders fruchtbar sich zeigen könnten, als stark begründet.

Als ich die Einladung, einen Vortrag am II. Kongreß der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft zu halten, erhielt, gelangte ich zur Überzeugung, daß es das Beste wäre, was ich tun könnte, meine obengenannten Ansichten synthetisch darzustellen. Diesen Entschluß gefaßt, war es mein Wunsch, die Abfassung des Vortrages meinem vortrefflichen Assistenten an der römischen Universität und Mitarbeiter im Ist. Naz. per le Appl. del Cal. Herrn *Gaetano Fichera* zu überlassen.

Herrn *Fichera* ist die Abfassung des § 2 dieses Artikels zu verdanken, wo die Methode zur Lösung der allgemeinsten linearen Gleichungen in einem abstrakten Raume, in welchem ein Reziprozitätssatz, der dem Green'schen für Differentialgleichungen analog ist, gilt, behandelt wird. Das Gleiche gilt für § 5 und 6, wo derselbe die Methode auf gewisse Integro-Differentialgleichungen vom *Volterra*'schen Typus[4] und auf einige Randwertprobleme für *Cartan*'sche Differentialformen überträgt[5]. Ich glaube, daß auch § 7 vom besonderen Interesse ist, in welchem es Herrn *Fichera* gelungen ist, hinreichende Bedingungen für die Konvergenz meiner Lösungsmethode aufzustellen für den Fall, daß die linearen Gleichungen eine Reziprozitätsformel zulassen, und aus dieser Konvergenz den Existenzbeweis wie auch ein numerisches Lösungsverfahren abzuleiten. Dem Leser zuwillen schließt der Artikel mit einer Anwendung der Methode auf das klassische *Dirichlet*'sche Problem für die *Laplace*'sche Gleichung, das somit eine vollständige und auch im Vergleich mit den modernsten besonders einfache Behandlung erhält[6].

Mauro Picone.

1. Voraussetzungen.

Es sei S ein, in Bezug auf den komplexen Körper, linearer abstrakter Raum[7]. Es seien also die Summe zweier Elemente und das Produkt eines Elementes mit einer komplexen Zahl mit folgenden Eigenschaften definiert:

---

[4] S. *V. Volterra* (1).
[5] S. *Hodge* (1), (2), (3), *De Rham-Bidal* (1).
[6] S. *C. Miranda* (1).
[7] S. *M. Picone* (4) S. 267.

I. Die Resultate der obengenannten Operationen sind Elemente aus S.

II. Wenn u, v, w, Elemente aus S sind, gilt:

$$u + v = v + u,$$
$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

III. Wenn u, v Elemente aus S und a, b komplexe Zahlen sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} a\,(u + v) &= a\,u + a\,v, \\ (a + b)\,u &= a\,u + b\,u, \\ a\,(b\,u) &= (a\,b)\,u, \\ 1\,.\,u &= u. \end{aligned}$$

IV. In S existiert ein Element ω (der Ursprung von S), so daß man für jedes u

$$u + \omega = u$$

hat.

Aus

$$u + 0\,u = (1 + 0)\,u = 1\,.\,u = u$$

hat man für jedes u

$$0\,.\,u = \omega$$

Das Element $(-1)\,u$ heißt das entgegengesetzte von u und wird mit $-u$ bezeichnet.

Wir nehmen außerdem an, daß zwischen den Elementen aus S eine involutorische Korrespondenz definiert ist; die sich entsprechenden Elemente nennen wir u und $\bar{u}$ (wir nennen $\bar{u}$ das zu u konjugierte Element und umgekehrt) mit folgenden Eigenschaften:

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}; \quad \overline{a\,u} = \bar{a}\,\bar{u}$$

Im Raume S sei für jedes Elementenpaar u, v ein komplexes Funktional $F(u, v)$, das folgenden Eigenschaften genügt, definiert:

1. $$F(u, v) = F(v, u),$$
2. $$F(u, a\,v_1 + b\,v_2) = a\,F(u, v_1) + b\,F(u, v_2),$$
   also aus 1. $$F(a\,u_1 + b\,u_2, v) = a\,F(u_1, v) + b\,F(u_2, v)$$
3. $$F(\bar{u}, \bar{v}) = \overline{F(u, v)}$$
4. $F(u, \bar{u})$ ist reell positiv, wenn $u \neq \omega$.

Wir normieren den Raum S, indem wir $\| u \|$ als Norm eines Elementes aus S mit

$$\| u \| = | F(u, \bar{u}) |^{\frac{1}{2}}$$

definieren.

Da die Schwarz'sche Ungleichung gilt:

$$| F(u, \bar{v}) |^2 \leqq F(u, \bar{u}) \cdot F(v, \bar{v}),$$

so läßt sich leicht beweisen, daß:

$$\| u + v \| \leqq \| u \| + \| v \|.$$

In dem so normierten Raume S läßt sich eine Theorie der linearen Approximation entwickeln, welche ganz analog der gewöhnlich im Hilbertschen Raum entwickelten verläuft[8]. Wenn man annimmt, daß der Raum S vollständig ist, so gelten alle Resultate mit denselben Beweisen wie im Hilbertschen Raum. Z. B. wenn ein orthonormiertes Punktsystem, das heißt ein solches, für welches

$$F(v_i, \bar{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

gilt, so haben wir die Besselsche Ungleichung:

$$\Sigma_i \{ | F(u, \bar{v}_i) | \}^2 \leqq F(u, \bar{u}) \tag{1}$$

und das Parsevalsche Theorem:

I. *Notwendige und hinreichende Bedingung, daß in* (1) *das Gleichheitszeichen gilt, ist, daß das System* $\{v_i\}$ *vollständig ist.*

Außerdem hat man

II. *Wenn für einen Punkt u aus S seine Fourierkoordinaten* c_i *in Bezug auf das vollständige System* $\{v_j\}$, *d. h.*

$$c_i = F(u, \bar{v}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

bekannt sind, und wenn man

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} v_k$$

setzt und die $\gamma_k^{(n)}$ *aus dem sich als lösbar herausstellenden Gleichungssystem*

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} F(v_k, \bar{v}_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt, dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \| u - u_n \| = 0$$

Man hat auch:

---

[8] S. *M. Picone* (1) S. 507, (5) S. 102.

III. *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des Systems* $\{v_i\}$ *ist, daß der Ursprung* ω *die einzige Lösung des unendlichen Gleichungssystems*

$$F(u, \bar{v}_i) = 0$$

sei, d. h. daß das System $\{v_i\}$ *in* S *abgeschlossen sei.*

2. Allgemeine Lösungsmethoden.

Es seien U, U^*, U_1, U_2 in Bezug auf den komplexen Zahlkörper lineare Räume und L_s (L_s^*) homogene und distributive in U [U^*] mit in den U_s enthaltenen Wertevorräten definierte Funktionen. Es sei F_s ein für jedes Punktepaar aus U_s definiertes komplexes Funktional. Wir nehmen an, daß für jedes Punktepaar u, v aus U und U^* gilt:

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = F_2[L_2[u], L^*_2[v]] \tag{2}$$

Wir nehmen außerdem an, daß die F_1 und F_2 den im vorhergehenden § aufgezählten Eigenschaften genügen.

Es sei u_2 ein Punkt aus U_2 und wir betrachten die Gleichung:

$$L_2[u] = u_2 \tag{3}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $U \subset U_1$ und $L_1 \equiv 1$. Gleichung (2) wird dann:

$$F_1[u, L^*_1[v]] = F_2[u_2, L^*_2[v]]$$

Es gilt folgender Satz:

IV. a) *Wenn ein System* $\{v_i\}$ *von Punkten aus* U^* *existiert, so daß das System* $\{L^*_1[v_i]\}$ *abgeschlossen in* U *in Bezug auf das Funktional* F_1 *ist, dann ist die Lösung der Gleichung* (3) *eindeutig.*

b) *Wenn das System* $\{L^*_1[v_i]\}$ *vollständig in* U *ist und man*

$$w_i = L^*_1[v_i]$$

setzt, dann gilt, angenommen daß das System $\{w_i\}$ *orthonormiert ist, für* (3) *die Lösungsformel*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_i F_2[u_2, L^*_2[v_i]] \tag{4}$$

Man beachte, daß für die Gültigkeit dieses Satzes nicht nötig ist, daß das Funktional F_2 allen vier Eigenschaften genügt, welche für das Funktional F_1 vorausgesetzt sind, sondern daß man es nur für die die Eigenschaft 2. benötigt.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo U auch nicht in U_1 enthalten sein kann. Es werde vorausgesetzt, daß wir dann eine Funktion $G(u_1, u_2)$

mit $u_1 \subset U_1$ und $u_2 \subset U_2$ kennen, deren Wertevorrat in U enthalten ist, und für welche die Identität für jedes u aus U

$$u = G[L_1[u], L_2[u]] \tag{5}$$

gilt; G sei außerdem als homogen und distributiv vorausgesetzt. In diesem Fall gilt auch Satz IV, wenn man in ihm U durch U_1 und die Formel (4) durch die folgende

$$u = G\{\sum_{i=1}^{\infty} \overline{w}_i F_2[u_2, L^*_2[v_i]], u_2\} \tag{4'}$$

ersetzt.

Dadurch wird die Lösung der Gleichung $L_2[u] = u_2$ auf folgende zwei Aufgaben zurückgeführt:

1. Die Herleitung zweier Formeln vom Typus (2) und (5).

2. Die Konstruktion eines Systems von Punkten $\{v_i\}$ aus U^*, für welches $\{L^*_1[v_i]\}$ vollständig ist.

3. Der Fall eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen.[9]

Die beträchtlichsten Anwendungen findet die in dem vorangehenden § 2 skizzierte Methode im Falle eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen; für diesen Fall ist die Aufgabe 1. unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gelöst, während die Aufgabe 2. nur in einigen wichtigen Spezialfällen schon ihre Lösung gefunden hat.

Es sei D ein reguläres Gebiet im euklidischen r-dimensionalen Raume, dessen Grenze wir mit FD bezeichnen, und mit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ die reellen Koordinaten seines allgemeinen Punktes P. Es sei:

$$E_{hk} = \sum_{\substack{i_1 \ldots i_r \\ i_1 + \ldots + i_r \leqq 1+n}} a^{hk}_{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_r}}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_r^{i_r}}$$

ein Differentialoperator von der Ordnung $\leqq 1 + n$ mit reellen oder komplexen von P abhängigen Koeffizienten, welche außerdem mit ihren Ableitungen

$$\frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_r} a^{hk}_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x_1^{j_1}\, \partial x_2^{j_2} \ldots \partial x_r^{j_r}} \quad (j_1 \leqq i_1, \ldots, j_r \leqq i_r)$$

als stetig in D vorausgesetzt sind. Wir bezeichnen mit

$$E^*_{hk} = \sum_{\substack{i_1 \ldots i_r \\ i_1 + \ldots + i_r \leqq 1+n}} (-1)^{i_1 + \ldots + i_r} \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_r} a^{hk}_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_r^{i_r}}$$

[9] S. *M. Picone* (3).

den zu E_{hk} adjungierten Operator und setzen

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} \dots E_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ E_{p1} \dots E_{pp} \end{pmatrix}, \quad E^* = \begin{pmatrix} E^*_{11} \dots E^*_{p1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ E^*_{1p} \dots E^*_{pp} \end{pmatrix}$$

und nennen E^* die zu E adjungierte Matrix; für den Fall $E \equiv E^*$ nennen wir sie selbstadjungiert. Wenn wir mit einem Buchstaben einen Vektor mit p Komponenten bezeichnen, so werden wir mit demselben Buchstaben und dem Index i $(i = 1, 2, \dots, p)$ seine i-te Komponente bezeichnen.

Φ, Φ^* seien lineare Räume der p-dimensionalen Vektoren φ, φ^*, deren Komponenten stetig mit ihren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung in D sind, und deren Ableitungen von der Ordnung $1 + n$ stetig in $D - FD$ sind, und für welche die Funktionen:

$$E_h[\varphi] = \sum_{k=1}^{p} E_{hk}[\varphi_k], \quad E^*_h[\varphi^*] = \sum_{k=1}^{p} E^*_{hk}[\varphi^*_k]$$

summierbar in D sind.

Wir bezeichnen $\binom{n+r}{r} - 1 = n_r$ und setzen für die Ableitungen eines Vektors φ aus Φ

$$\varphi \equiv \varphi^{(0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \equiv \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \equiv \varphi^{(2)}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_r^n} \equiv \varphi^{(n_r)}.$$

Analoge Bezeichnungen führen wir für die Vektoren φ^* aus Φ^* ein. Es gilt dann folgende Formel von Green-Betti:

$$\int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*] - \varphi^* \times E[\varphi]\}\, dT = \int_{FD} \sum_{k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n} b^{ij}_{hk}\, \varphi^{(i)}_h\, \varphi^{*(j)}\, d\sigma, \qquad (6)$$

wo die b^{ij}_{hk} bestimmte in FD fast stetige und beschränkte Funktionen, welche von den Koeffizienten der Operatoren E_{hk} abhängen, sind.

Wir setzen

$$u = \varphi, \quad v = \varphi^*,$$
$$U = \Phi, \quad U^* = \Phi^*;$$

U_1 ist der Raum, der in D summierbaren p-dimensionalen Vektoren; U_2 ist der Raum, der $p\,(2 + n_r)$-dimensionalen Vektoren, deren erste p Komponenten in D definiert und summierbar sind, während die restlichen auf FD definiert und stetig sind;

$$L_1 \equiv 1, \quad L^*_1 \equiv E^*$$

L_2 ist der Operator, welcher darin besteht, daß man jedem Punkte $u \equiv \varphi$ aus U den $p\,(2 + n_r)$-dimensionalen Vektor zuordnet, dessen Komponenten aus denen des Vektors $E\,[\varphi]$ in D und aus den $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(n_r)}$ auf FD besteht;

L^*_2 ist der Operator, welcher dem Punkte φ^* den Vektor, dessen Komponenten aus denen von φ^* in D und aus $\varphi^{*(0)}, \ldots, \varphi^{(n_r)}$ auf FD bestehen, zuordnet.

$$F_1\,[L_1\,[u], L^*_1\,[v]] = \int_D \{\varphi \times E^*\,[\varphi^*]\}\,dT,$$

$$F_2\,[L_2\,[u], L^*_2\,[v]] = \int_D \{\varphi^* \times E\,[\varphi]\}\,dT + \int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}\,\varphi^{(i)}_k\,\varphi^{*(j)}_h\,d\sigma.$$

Wie man sieht, fällt auf diese Weise die Gleichung (6) mit der Gleichung (2) zusammen.

Gleichung (3) besteht jetzt darin, daß man den Ableitungen der ersten n-Ordnungen des unbekannten Vektors auf FD gewisse Randwerte vorschreibt, und daß man in D—FD: $E\,[\varphi] = f$ verlangt. Satz IV verwandelt sich für diesen Spezialfall in folgenden Satz:

IV'. a) *Wenn ein System* $\{\varphi^*_i\}$ *von Vektoren aus* Φ^* *existiert, so daß das System* $\{E^*\,[\varphi^*_i]\}$ *in* Φ *abgeschlossen ist, dann fallen zwei Lösungen der Gleichung* $E\,[\varphi] = f$, *deren Ableitungen bis zur* n^{ten} *Ordnung auf* FD *die gleichen Randwerte annehmen, auch in ganz* D *zusammen.*

b) *Es sei ein System* $\{\varphi^*_i\}$ *von Vektoren aus* Φ^* *bekannt, für welches das Vektorensystem* $\{E^*\,[\varphi^*_i]\}$ *in* D *hilbertisch vollständig ist: dann bestimmen die Randwerte der Ableitungen der ersten* n *Ordnungen zusammen mit* $E\,[\varphi] = f$ *die Lösung in ganz* D, *und erlauben ihre effektive Berechnung.*

Gleichung (4) läßt sich auf folgende Art hinschreiben:

$$\varphi_l\,(P) = \sum_{s=1}^{\infty} w_{sl}\,(P)\,[\int_D [f\,(P') \times \varphi^*_s\,(P')]\,d_{P'}\,T + \\ + \int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}\,(P')\,\varphi^{(i)}_k\,(P')\,\varphi^{*(j)}_{sh}\,(P')\,d_{P'}\,\sigma \qquad (4')$$

Man nehme an, es sei ein Punkt P im Innern von D so festgesetzt, daß die Reihen

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}\,(P)\,\varphi^*_s\,(P')$$

in D im Mittel konvergieren und daß, wenn man

$$g_{lk}(P, P') = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^*_{sk}(P') \qquad (l, k = 1, \ldots, p)$$

setzt, die Reihen

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^{*(j)}_{sk}(P') \qquad (l, k = 1, \ldots, p;\ j = 0, \ldots, n_r)$$

auf FD im Mittel konvergieren, und daß

$$g^{(j)}_{lk}(P, P') = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^{*(j)}_{sk}(P')$$

fast überall gilt. Dann gibt Gleichung (4')

$$\varphi_l(P) = \int_D [G_l(P, P') \times f(P')]\, d_{P'}\, T + \\ + \int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}(P')\, g^{(j)}_{lh}(P, P')\, \varphi^{(i)}_k(P')\, d_{P'}\, \sigma \qquad (7)$$

Eine Matrix, für welche — wie für $\| g_{lk}(P, P') \|$ — (7) gilt, nennen wir die zur Gleichung $E[\varphi] = f$ gehörige Fundamentalmatrix.

Wir werden jetzt unter den größtmöglich allgemeinen Voraussetzungen die verschiedenen Randwertprobleme für die Gleichung $E[\varphi] = f$ betrachten und werden sehen, daß man sie als Spezialfälle des allgemeinen Problems aus § 2 betrachten kann, da man immer auf eine Gleichung vom Typus (2) geführt wird, welche man als gelöst annehmen kann, wenn man geeignete vollständige Vektorsysteme zur Verfügung hat.

Dazu müssen wir einige Voraussetzungen machen. Wir werden die Existenz von ν Paaren von linearen Differenzialoperatoren $\mathfrak{L}_s$, $\mathfrak{L}^*_s$ annehmen, welche auf FD definiert sind, die Vektoren φ und φ^* in Skalare transformieren, und für welche identisch in φ und φ^*

$$\int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}\, \varphi^{(i)}_k\, \varphi^{*(j)}_h\, d\sigma = \int_{FD} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma$$

gilt.

Die Gl. (6) schreibt sich dann:

$$\int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*] - \varphi^* \times E[\varphi]\}\, dT = \int_{FD} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma, \qquad (6')$$

während (7) folgende Gestalt annimmt:

$$\varphi_l(P) = \int_D [G_l(P, P') \times F(P')]\, d_{P'}\, T + \int_{FD} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[G_l(P, P')]\, d_{P'}\, \sigma. \qquad (7')$$

Wir werden für jeden Fall Gleichung (2) aus Gleichung (6′) und (5) aus (7′) herleiten.

Die Randwertprobleme, welche für die Gleichung

$$E[\varphi] = f \tag{8}$$

betrachtet werden, haben folgende Gestalt:

a) *Cauchy'sches Problem.*

Es wird ein Teil $F_1 D$ von $F D$ gesucht, wo wir die Werte der ν Formen $\mathfrak{L}_s[\varphi]$ willkürlich vorschreiben können, so daß sie die Lösung φ von (8) eindeutig bestimmen.

b) *Reines Problem.*

Für eine natürliche Zahl $\mu < \nu$ werden auf ganz $F D$ die Werte der Formen $\mathfrak{L}_1[\varphi]$, $\mathfrak{L}_2[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\mu[\varphi]$ vorgeschrieben, welche auch die Lösung von (8) bestimmen.

c) *Gemischtes Problem.*

Auf einem Teil $F_1 D$ von $F D$ sind die Werte der $\mathfrak{L}_1[\varphi]$, $\mathfrak{L}_2[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\mu[\varphi]$ und auf dem restlichen Teil $F_2 D = F D - F_1 D$ diejenigen der $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi]$, $\mathfrak{L}_{\mu+2}[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\nu[\varphi]$ vorgeschrieben.

d) *Ausbreitungsproblem.*

Es seien $F_1 D$ und $F_2 D$ zwei Teile von $F D$, welche höchstens Randpunkte gemeinsam haben; auf $F_1 D$ seien die Werte aller Formen $\mathfrak{L}_s[\varphi]$ und auf $F_2 D$ nur diejenigen der ersten vorgeschrieben.

Wir werden als Beispiel das gemischte Problem betrachten, und auf zwei verschiedene Arten zeigen, wie es sich auf das im § 2 betrachtete Problem zurückführen läßt.

Erste Art:

Man nimmt an:

$$U \equiv \Phi$$

U^* = Menge aller Vektoren φ^* aus Φ^*, welche $E[\varphi^*] = 0$ genügen;

U_1 = Menge aller ν-dimensionaler Vektoren, deren erste ν-μ-Komponenten auf $F_1 D$ und restlichen auf $F_2 D$ liegen;

U_2 = Menge aller $(p + \nu)$-dimensionalen Vektoren, deren erste p Komponenten in D summierbar, die restlichen ν stetig, μ von ihnen auf $F_1 D$ und ν-μ auf $F_2 D$ definiert sind;

L_1 = Operator, der den Punkt $u \equiv \varphi$ aus U in den Vektor aus U_1, dessen Komponenten $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi]$, $\mathfrak{L}_{\mu+2}[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\nu[\varphi]$ auf $F_1 D$ und $\mathfrak{L}_1[\varphi]$, $\mathfrak{L}_2[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\mu[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind, transformiert;

L^*_1 = Operator, der den Punkt $v \equiv \varphi^*$ aus U^* in den Vektor aus U_1 dessen Komponenten $\mathfrak{L}^*_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\nu}[\varphi]$ auf $F_1 D$ und $\mathfrak{L}^*_1[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\mu}[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind transformiert;

L_2 = Operator, der den Punkt u aus U in den Vektor aus U_2 transformiert, dessen erste p Komponenten diejenigen der $E[\varphi]$, die restlichen die $\mathfrak{L}_1[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\mu}[\varphi]$ auf $F_1 D$ und die $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\nu}[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind;

L^*_2 = Operator, der $v \equiv \varphi^*$ aus U^* in den Vektor aus U_2 transformiert, dessen erste p Komponenten die φ^* selbst sind, während die restlichen die $\mathfrak{L}^*_1[\varphi], \mathfrak{L}^*_2[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\mu}[\varphi]$ auf $F_1 D$ und die $\mathfrak{L}^*_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\nu}[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind;

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_{F_1 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma - \int_{F_2 D} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v]] = \int_D \{\varphi^* \times E[\varphi]\}\, d\,T + \int_{F_1 D} \sum_{s=1}^{\mu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma + \int_{F_1 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma.$$

Mit diesen Bezeichnungen leitet man (2) aus (6′) ab, während (3) dem gemischten Problem c) äquivalent ist. Aus (7′) folgt (5) und daraus die Lösungsformel (4′).

Zweite Art.

$$U \equiv \Phi \qquad U^* \equiv \Phi^*;$$

U_1 = Raum der $(\nu + p)$-dimensionalen Vektoren, deren p Komponenten in D summierbar, μ-ν auf $F_1 D$ und μ auf $F_2 D$ definiert sind;

U_2 = wie vorher;

L_1 = Operator, der den Punkt $u \equiv \varphi$ aus U in den Vektor aus U_1 transformiert, dessen Komponenten in D diejenigen der φ, auf $F_1 D$: $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\nu}[\varphi]$ und auf $F_2 D$: $\mathfrak{L}_1[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\mu}[\varphi]$ sind;

L^*_1 = Operator, der den Punkt $v \equiv \varphi^*$ aus U^* in den Vektor aus U_1 transformiert, dessen Komponenten in D diejenigen der $E^*[\varphi^*]$, auf $F_1 D$: $\mathfrak{L}^*_{\mu+1}[\varphi^*], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\nu}[\varphi^*]$ und auf $F_2 D$: $L^*_1[\varphi^*], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\mu}[\varphi^*]$ sind;

L_2 und L^*_2 wie vorher;

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*]\}\, d\,T - \int_{F_1 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \Omega_s[\varphi]\, \Omega^*_s[\varphi^*]\, d\sigma -$$

$$- \int_{F_2 D} \sum_{s=1}^{\nu} \Omega_s[\varphi]\, \Omega^*_s[\varphi^*]\, d\sigma$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v]] = \int_D \{\varphi^* \times E[\varphi]\}\, d\,T + \int_{F_1 D} \sum_{s=1}^{\mu} \Omega_s[\varphi]\, \Omega^*_s[\varphi^*]\, d\sigma +$$

$$- \int_{F_2 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \Omega_s[\varphi]\, \Omega^*_s[\varphi^*]\, d\sigma.$$

Natürlich gibt es auch andere Arten, welche unser Problem als Spezialfall desjenigen des § 2 darstellen. Wir haben nur zwei beschrieben, für welche in wichtigen Spezialfällen, die besonders die mathematische Physik interessieren, Systeme $\{v_i\}$ erhalten wurden, die sich in vollständige Systeme $\{L^*_1(v_i)\}$ transformieren[10].

4. Die Konstruktion der Fundamentalmatrix für Systeme mit konstanten Koeffizienten.[11]

Es seien $a^{hk}_{i_1 i_2, \ldots, i_r}$ die als konstant angenommenen Koeffizienten der Operatoren E_{hk}; wir führen folgende Polynome ein:

$$a_{hk}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_r \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_r \leqq n}} a^{hk}_{i_1, i_2 \ldots i_r}\, \xi_1^{i_1}\, \xi_2^{i_2} \ldots \xi_r^{i_r}$$

und bezeichnen mit $a'_{hk}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ die Polynome, welche die algebraischen Minoren der Elemente a_{hk} der Determinante $\| a_{hk} \|$ sind, mit $a(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ die Determinante selbst, und nennen letztere das charakteristische Polynom des Systems (8). Für willkürliche Werte der Parameter $\xi_1, \ldots, \xi_r$ betrachten wir den Vektor V_l, dessen Komponenten die

$$v_{lh} = a'_{hl}\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s} \qquad (l, h = 1, 2, \ldots, p) \tag{9}$$

sind. Man hat

$$E^*_k[V_l] = \sum_{h=1}^{p} E^*_{hk}\, [a'_{hk}\, e^{-\sum_{s-1}^{r} \xi_s x_s}] = \sum_{h=1}^{p} a_{hk}\, a'_{hl}\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s},$$

woraus

[10] *L. Amerio* (3), *G. Fichera* (2), (3), (7), (8).
[11] *M. Picone* (11).

$$E_k^*[V_l] \begin{cases} = a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s} & \text{für } k = l, \\ = 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases} \tag{10}$$

folgt. Man gelangt so zu

$$\int_D \{\varphi \times E^*[V_l]\}\, d\,T = \int_D \sum_{k=1}^{p} \varphi_k\, E_k^*[V_l]\, d\,T = a \int_D \varphi_l\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s}\, d\,T, \tag{11}$$

und wenn man

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_r} V_l}{\partial \xi_1^{\lambda_1}\, \partial \xi_2^{\lambda_2} \ldots \partial \xi^{\lambda_r}} = V_{l\,\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$$

setzt und die Identität (9) λ_i-mal in bezug auf ξ_i für $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ableitet, erhält man schließlich

$$\int_D \{\varphi \times E^*[V_{l\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}]\}\, d\,T =$$

$$= \int_D \varphi_l \left[a\, x_1^{\lambda_1} \ldots x_r^{\lambda_r} + \lambda_1 \frac{\partial a}{\partial \xi_1} x_1^{\lambda_1 - 1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_r^{\lambda_r} + \ldots\right] e^{-\sum \xi_s x_s};$$

daraus folgert man, daß wenn in einem Punkte $(\xi_1^0, \ldots, \xi_r^0)$ die Determinante a von 0 verschieden ist, das Vektorsystem

$$E^*[V_{l\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}] \qquad (l = 1, 2, \ldots, p;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0, 1, 2, \ldots)$$

für $\xi_s = \xi_s^0$ $(s = 1, \ldots, r)$ in der Klasse der in D summierbaren Vektoren abgeschlossen ist. Da die obengenannten Vektoren in ganz D stetig sind, folgt folgender Satz:

V. *Das System* (8) *habe konstante Koeffizienten und ihr charakteristisches Polynom sei nicht identisch gleich* 0, *dann bestimmen die Randwerte der Lösung und die ihrer partiellen Ableitungen bis zur* n^{ten} *Ordnung dieselbe eindeutig und erlauben ihre effektive Berechnung.*

Das Gebiet D sei im Parallelepiped R: $x_i^0 - d_i \leqq x_i \leqq x_i^0 + d_i$ enthalten, und es gelte:

$$a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \pi i \frac{\lambda_2}{d_2}, \ldots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) \neq 0 \tag{12}$$

für jedes System ganzer Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Wir setzen in (6′) den Vektor $V_{l\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}$, dessen k-te Komponente

$$v_{l\,\lambda_1 \dots \lambda_r\,k} = a'_{kl}\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) e^{-\pi i \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s}{d_s} x_s}$$

ist, an Stelle des Vektors φ^* ein, und erhalten so auf Grund der Identität (11)

$$a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) \int_D \varphi_l\, e^{-\pi i \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s}{d_s} x_s}\, d\,T =$$

$$= \int_D \{E[\varphi] \times V_{l\,\lambda_1 \dots \lambda_r}\}\, d\,T + \int_F \sum_{t=1}^{\nu} \mathfrak{L}_t[\varphi]\, \mathfrak{L}_t^*[V_{l\,\lambda_i \dots \lambda_r}]\, d\,\sigma$$

Hieraus bestimmen wir die Fourierkoordinaten der φ_l in bezug auf die Systeme $\{e^{-\pi i \sum (\lambda_s/d_s) x_s}\}$ $(\lambda_1 \dots \lambda_r = -1, 0, 1, \dots)$. Man gelangt so zur Berechnung der Fundamentalmatrix $\| g_{lk}(P, P') \|$

$$g_{lk}(P, P') \sim$$

$$\sim \frac{1}{2^r d_1 \dots d_r} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{-\infty, +\infty} \frac{a'_{kl}\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)}{a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)} e^{\pi i \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s}{d_s} (x_s - x'_s)},$$

wobei $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ die Koordinaten des Punktes P' bezeichnen. Für den Fall, daß es eine endliche Anzahl von Systemen von ganzen Zahlen gibt, für welche Ungleichung (12) nicht erfüllt ist, führen wir für jedes solche System einen Vektor $V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r}$ ein, der dem Gleichungssystem

$$E^*_k[V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r}] \begin{cases} = 0 & \text{für } l \neq k \\ = e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s} & \text{für } l = k \end{cases}$$

genügt; dann setzen wir in (6′) denselben an Stelle des Vektors V ein und gelangen so zur Gleichung:

$$\int_D \varphi_l\, e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s}\, d\,T = \int_D (E[\varphi] \times V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r})\, d\,T +$$

$$+ \int_F \sum_{t-1}^{\nu} \mathfrak{L}_t[\varphi]\, \mathfrak{L}_t^*[V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r}]\, d\,\sigma,$$

woraus man für die Fundamentalmatrix

$$2^r d_1 \dots d_r g_{lk}(P, P') \sim \sum_{\mu_1 \dots \mu_r} v_{l\,\mu_1 \dots \mu_r\,k}(x'_1 \dots x'_r)\, e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s} +$$

$$+ \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{(\mu)} \frac{a'_{kl}(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r})}{a(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r})} e^{\pi i \sum \frac{\lambda_s}{d_s}(x_s - x'_s)}$$

erhält; hierbei bedeutet $\Sigma^{(\mu)}$, daß bei der Summierung die Glieder mit den obengenannten Systemen von Zahlenwerten auszulassen sind.

5. Integro-Differentialgleichungen.

Andere Probleme, deren Lösung sich auf die allgemeine Methode des § 2 zurückführen läßt, sind die linearen Integro-Differentialgleichungen, die z. B. in der Elastizitätslehre beim Studium der Vererbungsprobleme vorkommen. Wir werden uns mit der Betrachtung einer besonderen einfachen Integro-Differentialgleichung begnügen, aber die Resultate lassen sich ohne Schwierigkeiten auf die Gleichungen und Gleichungssysteme von komplizierterem Typus verallgemeinern.

Es sei D ein beschränktes reguläres Gebiet im Descartes'schen Raume $x\,y\,z$, und T ein Zylinder des Raumes $x\,y\,z\,t$, mit folgenden Beschränkungen

$$(x, y, z) \subset D \qquad 0 \leqq t \leqq t_0$$

In T betrachten wir folgende Integro-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right] d\tau = 0, \tag{19}$$

wobei $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ im Quadrate, dessen Endpunkte (0, 0) und (t_0, t_0) sind, stetige Funktionen bedeuten.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\int_t^{t_0}\left[\frac{\partial^2 v(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 v(x,y,z,\tau)}{\partial y^2}\varphi(\tau,t)+\frac{\partial^2 v(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}\psi(\tau,t)\right] d\tau = 0 \qquad (13')$$

nennt man die zu (9) adjungierte Gleichung.

Wir nennen $F_1 T$ den durch folgende Beschränkungen definierten Teil von $F T$:

$$(x, y, z) \subset F D \qquad 0 \leqq t \leqq t_0.$$

Wenn u und v in T mit ihren ersten Ableitungen in bezug auf x, y, z, stetige und mit ihren zweiten Ableitungen in bezug auf dieselben Variablen in $T - F_1 T$ stetige Lösungen der (13) und (13') sind, dann besteht der folgende Reziprozitätssatz:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{FD}[v(t)\frac{du(t)}{dn}-u(t)\frac{dv(t)}{dn}]\,d\sigma+\int_0^{t_0}dt\int_t^{t_0}d\tau\int_{FD}\{[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial x}-$$

$$-u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial x}]f(\tau,t)\cos(n,x)+[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial y}-u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial y}]\varphi(\tau,t)\cdot$$

$$\cos(n,y)+[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial z}-u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial z}]\psi(\tau,t)\cos(n,z)\}\,d\sigma = 0 \qquad (14)$$

Wenn wir eine geeignete Fundamentallösung, deren Existenz sich beweisen läßt, einführen, dann erhält man eine Formel, welche die Werte einer Lösung u von (13) in jedem inneren Punkte von T mit Hilfe der für jeden Zeitpunkt t als bekannt vorausgesetzten Randwerte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, ausdrückt[12].

Wir betrachten das folgende Randwertproblem für Gleichung (13):

Es wird eine Lösung $u(x, y, z, t)$ von (13) gesucht, wenn ihre Randwerte auf $F_1 T$ vorgeschrieben sind.

Dieses Problem führt auf dasjenige des § 2 zurück, wenn man wie folgt setzt:

U = Menge der Lösungen der (13), die den obengenannten Regularitätsbedingungen genügen;

U^* = Menge der Lösungen (13'), die denselben Stetigkeitsbedingungen genügen;

---

[12] S. *V. Volterra* (1), S. 82.

$U_1 \equiv U_2 =$ Menge der in $F_1\,T$ stetigen Funktionen;

$$L_1[u] = \frac{d\,u(t)}{d\,n} + \int_0^t (\Sigma \frac{\partial\,u(\tau)}{\partial\,x} f(t,\tau)\cos(n,x))\,d\,\tau,$$

$$L^*_1[v] = v(t) \qquad \text{für } (x,y,z) \subset F\,D,$$

$$L_2[u] = u(t) \qquad \text{für } (x,y,z) \subset F\,D,$$

$$L^*_2[v] = \frac{d\,v(t)}{d\,n} + \int_t^{t_0} (\Sigma \frac{\partial\,v(\tau)}{\partial\,x} f(\tau,t)\cos(n,x))\,d\,\tau,$$

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_0^{t_0} d\,t \int_{FD} L_1[u] \,.\, v\,d\,\sigma,$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v] = \int_0^{t_0} d\,t \int_{FD} u \,.\, L^*_2[v]\,d\,\sigma.$$

Man sieht leicht ein, daß (2) und (14) zusammenfallen. Das Problem ist auf diese Weise auf die Konstruktion eines in F_1T hilbertisch vollständigen Systems von Lösungen von (13′) zurückgeführt. Analog behandelt man die anderen Probleme.

6. Gleichungen, die sich auf Differentialformen beziehen.

Eine weitere interessante Anwendung des § 2 ergibt sich aus der Betrachtung von Randwertproblemen, welche sich auf äußere Differentialformen beziehen. Wenn u eine Form k-ten Grades in n Veränderlichen ist, so definieren wir einen Operator E, welcher die gegebene Form in eine Form $E[u]$, $(n\text{-}k)$-ten Grades transformiert, die im Falle, daß u ein Skalar ist, sich auf den gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialoperator zweiter Ordnung reduziert. Es besteht der folgende Reziprozitätssatz:

$$\int_D (u\,E[v] - v\,E[u]) = \int_{FD} (u\,L[v] - v\,L[u]),$$

wobei L einen bestimmten Operator bedeutet.

Man sieht leicht ein, wie man die Methode des § 2 auf das Problem, eine Form u aufzufinden, welche der Gleichung

$$E[u] = \varphi$$

genügt, und für welche die Randwerte der Koeffizienten, oder diejenigen der $L[u]$ oder endlich (gemischtes Problem) die der u auf einem Teile und der $L[u]$ auf einem anderen Teile des Randes vorgeschrieben sind, anwenden kann.

7. Existenzprobleme.

Die im § 2 beschriebene und in den folgenden angewandte Methode setzte voraus, daß die Existenz der Lösungen der betrachteten Probleme schon gesichert war. Wir werden aber sehen, daß man aus Gleichung (2) auch ein Verfahren ableiten kann, welches erlaubt, unter gewissen speziellen Voraussetzungen und immer, wenn wir ein besonderes System $\{v_i\}$, das gewissen Vollständigkeitsbedingungen genügt, zur Verfügung haben, den Existenzbeweis zu führen[13].

Zunächst setzen wir voraus: $U^* \subset U$, $\overline{L_1[v]} \equiv L^*_1[v]$, wodurch Gleichung (2) sich wie folgt schreiben läßt:

$$F_1[L_1[u], \overline{L_1[v]}] = F_2[L_2[u], L^*_2[v]] \tag{2'}$$

Außerdem nehmen wir an:

a) *Es gibt einen linearen Raum W, der U enthält, so daß, wenn wir das Definitionsgebiet von L_1 und L_2 auf das ganze W erweitern, die Gleichung (2') für jedes w in W und v in U^* erfüllt ist, während die Gleichung*

$$L_2[w] = u_2$$

lösbar ist.

b) *U_1 sei abgeschlossen und man verfüge über ein Punktsystem $\{v_i\}$ aus U^* so, daß nach der Orthogonalisierung in bezug auf das Funktional F_1 des Systems $\{L_1[v_i]\}$ die Gleichung*

$$L_1[u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i L_1[v_i] \tag{14}$$

im Raume U lösbar wird, wobei $\{c_i\}$ eine Zahlenfolge mit konvergenter Summe $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ darstellt.

c) *Das System $\{L^*_2[v_i]\}$ ist im Raume U_2 in bezug auf das Funktional F_2 abgeschlossen.*

Dann gilt folgender Existenzsatz:

VI. *Unter den Voraussetzungen* a), b), c), *gibt es einen Punkt im Raum U, welcher der Gleichung*

$$L_2[u] = u_2 \tag{3}$$

genügt.

Denn sei w der Punkt des Raumes w, für welchen $L_2[w] = u_2$ gilt, und setzen wir:

$$c_i = F_1[L_1[w], \overline{L_1[v_i]}],$$

[13] S. *G. Fichera* (5), (6), (7), (8).

dann gibt die Bessel'sche Ungleichung:

$$\Sigma \mid c_i \mid^2 \leqq F_1 [L_1 [w] \overline{L_1 [w]}].$$

Wir behaupten, daß die Lösung von (14) gleichzeitig die Lösung von (3) ist. Man hat nämlich:

$$F_2 [L_2 [u] - u_2, L^*_2 [v_i]] = F_2 [L_2 [u], L^*_2 [v_i]] - F_1 [L_1 [w], \overline{L_1 [v_i]}] =$$
$$= F_1 [L_1 [u], \overline{L_1 ([v_i]}] - c_i.$$

Andererseits gilt aber

$$F_1 [L_1 [u], \overline{L_1 [v_i]}] = F_1 [\sum_{j=1}^{\infty} c_j L_1 [v_j], L_1 [v_i]] = c_i,$$

woraus

$$F_2 [L_2 [u] - u_2, L^*_2 [v_i]] = 0$$

folgt, und auf Grund von Annahme c): $L_2 [u] = u_2$.

Man kann von Annahme c) absehen, wenn vorher folgender Satz bewiesen ist:

c') *Nötige und hinreichende Bedingung, daß ein Punkt u aus U der Gleichung* (3) *genügt, ist, daß er dem unendlichen Gleichungssystem*:

$$F_1 [L_1 [u], \overline{L_1 [v_i]}] = F_2 [u_2, L^*_2 [v_i]]$$

genügt. Man stellt nämlich leicht fest, daß der vorher bewiesene Existenzsatz weiter besteht, wenn wir gleichzeitig die Voraussetzungen a) und b) festhalten. Dieses einfache Beweisverfahren ist schon auf verschiedene Fundamentalprobleme der mathematischen Physik, wie z. B. das Gleichgewichtsproblem einer eingespannten Platte und andere gemischte Randwertaufgaben für Gleichungen vom elliptischen Typus, zum Existenzbeweis angewandt worden. Als Beispiel wollen wir hier zeigen, wie man mit diesem Verfahren leicht einen Beweis des Dirichletschen Prinzips erhält, d. h. die Existenz einer harmonischen Funktion, deren Randwerte vorgeschrieben sind, beweist.

Es genügt zu setzen:

W = Menge aller in einem beschränkten regulären Gebiete definierten Funktionen, deren erste Ableitungen quadratisch summierbar sind.
U = Menge aller in D harmonischen Funktionen aus W;
U^* = Menge aller in D harmonischen und biregulären Funktionen;
U_1 = Menge der in D r-dimensionalen hilbertschen Vektoren;
U_2 = Raum der auf F D summierbaren Funktionen;
L_1 = Operator, welcher einer Funktion w aus W den Vektor grad w zuordnet;

L_2 = Operator, welcher einer Funktion w ihre Randwerte zuordnet;
$L^*_2 \equiv \frac{d}{d\,n}$, wobei n die äußere Normalenrichtung auf $F\,D$ bedeudet.

$$F_1\,[L_1\,[w],\,\overline{L_1\,[v]}] = \int\limits_D (\operatorname{grad} w \times \overline{\operatorname{grad} v})\,d\,T$$

$$F_2\,[L_2\,[w],\,L^*_2\,[v]] = \int\limits_{F\,D} w\,\frac{d\,\bar{v}}{d\,n}\,d\,\sigma$$

Wenn $w \subset W$ und $v \subset U^*$, dann gilt:

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} w \times \operatorname{grad} v)\,d\,\sigma = \int\limits_{F\,D} w\,\frac{d\,v}{d\,n}\,d\,\sigma,$$

das heißt

$$F_1\,[L_1\,[w],\,L_1\,[v]] = F_2\,[L_2\,[w],\,L^*_2\,[v]]$$

ist erfüllt.

Es sei u_2 eine auf dem Rande definierte Funktion und es gebe ein w aus W, welche auf $F\,D$ mit u_2 zusammenfällt. Es sei $\{v_i\}$ das System der harmonischen Polynome.

Gleichung (14) nimmt folgende Gestalt an:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \operatorname{grad} v_i$$

und ist sicher lösbar, da die rechterhand stehende Reihe im Mittel, also auch gleichförmig im Innern von D konvergiert. Man sieht, daß die Annahmen a) und b) erfüllt sind; aber auch Voraussetzung c) ist erfüllt, da man die Vollständigkeit (von einer Konstanten abgesehen) des Systems $\{\frac{d\,v_i}{d\,n}\}$ auf $F\,D$ beweisen kann. Man kann auch den Satz c') beweisen, wodurch man die Existenz einer im Gebiete D harmonischen Funktion mit vorgeschriebenen Randwerten in der Klasse U sichert.

Literatur.

Amerio Luigi:

1. *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2\,u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*, Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 78 (1944–45).
2. *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k}\,u = f$, Annali di Matematica pura ed applicata, Tomo 24, Serie IV (1945).
3. *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico*, American Journal of Mathematics, vol. LXIX, n. 3 (July, 1947).

4. *Sull'equazione di propagazione del calore*, Rend. di Matematica e delle sue Applicazioni (1946).

De Rham Georges — Bidal Pierre:

1. *Les formes différentielles harmoniques*, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 19, MCMXLVI/XLVII, Fasc. I.

Fichera Gaetano:

1. *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo e omogeneo*, Rend. Seminario Matem. Università di Padova, vol. XVII (1948).
2. *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, Annali di Matem. pura ed applicata, tomo 27, serie IV (1948).
3. *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$, Giornale di Matematiche di Battaglini, s. IV, vol. 77 (1948).
4. *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di Analisi funzionale lineare*, Giornale di Matem. di Battaglini, s. IV, vol. 78 (1948—49).
5. *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. V (1948).
6. *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione ed ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1949).
7. *Sui problemi dell'elasticità piana*, Rend. della Facoltà di Scienze della Università di Cagliari (1949).
8. *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1950).
9. *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. III (1947).

Ghizzetti Aldo:

1. *Sul metodo della transformata parziale di Laplace ad intervallo d'integrazione finito*, Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, 1947.
2. *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1948).
3. *Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, trattato col metodo delle trasformate parziali*, Rend. di Mat. e delle sue appl. (1946).

Hodge W. V. D.:

1. *A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties*, Proceedings of the London Math. Soc., ser. 2, v. 36 (1932).
2. *Harmonic functional in a riemannian space*, Ibid. se. 2, vol. 38 (1933).
3. *The existence theorems for harmonic integral*, Ibid., ser. 2, vol. 41 (1936).

Miranda Carlo:

1. *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. III (1947).

Picone Mauro:

1. *Appunti di Analisi Superiore*, I Ediz. Rondinella, Napoli (1940).
2. *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuove applicazioni della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*, Atti Acc. Scienze Torino (1939–40).
3. *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. II (1947).
4. *Lezioni di Analisi funzionale lineare*, Istituto di Alta Matematica, Roma (1942).
5. *Lezioni di Analisi funzionale*, Tumminelli, Roma (1947).

Volterra Vito:

1. *Fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris (1913).