Werk

Titel: Eine Faktorisierung der bei der rationalen Interpolation auftretenden Matrizen.

Autor: WERNER, H.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?362160546_0018|log39

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Numer. Math. 18, 423—431 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

Eine Faktorisierung der bei der rationalen Interpolation auftretenden Matrizen

HELMUT WERNER

Eingegangen am 23. Juli 1971

Summary. Rational interpolation may be reduced formally to the homogeneous or inhomogeneous system of linear equations (2) resp. (3). This paper presents a factorization of the matrices belonging to those systems.

If the highest or lowest coefficient of numerator or denominator is normalized to 1, the coefficients may be represented by an explicit formula using this factorization. This is the matrix representation of the Wetterling-algorithm.

The system (2) may also be bordered by an additional equation to give $n+2$ homogeneous equations in $n+2$ unknowns. Then the factorization furnishes the matrix-representation of the Kettenbruch-algorithm.

This facilitates the comparison of the Kettenbruch- and the Wetterling-algorithm. In the special case of rational interpolation the first one is superior, while the Wetterling-algorithm is more generally applicable.

Zusammenfassung. Die rationale Interpolation führt auf ein homogenes oder inhomogenes lineares Gleichungssystem (2) bzw. (3). Hier sollen Faktorisierungen für die zu diesen Gleichungssystemen gehörenden Matrizen angegeben werden.

Wandelt man das Gleichungssystem (2) durch Fixieren des höchsten oder niedrigsten Koeffizienten in Zähler oder Nenner in ein inhomogenes Gleichungssystem um, so wird durch die Faktorisierung die explizite Angabe der Auflösung des Systems geliefert. Sie stellt eine übersichtliche Formulierung des Wetterling-Algorithmus für inhomogene Systeme der genannten Art dar.

Ergänzt man das System (2) durch eine weitere Gleichung zu einem System von $n+2$ Gleichungen für $n+2$ Unbekannte, so kann man mit Hilfe dieser Faktorisierung sofort die Kettenbruchentwicklung angeben. Es zeigt sich, daß man vom Rechenaufwand her dem Kettenbruchalgorithmus gegenüber dem zuerst genannten Algorithmus bei der rationalen Interpolation den Vorzug geben sollte.

Mit dem Wetterlingschen Algorithmus kann man jedoch allgemeinere Probleme lösen, wie sie z.B. bei der T-Approximation auftreten.

In einer anderen Arbeit soll die Faktorisierung benutzt werden, um die numerische Stabilität der Algorithmen zu untersuchen.

1.

Zu gegebenen $l, m \in \mathbb{N}$ und Punkten (x_j, y_j) mit $j=0, \ldots, l+m$ sei eine rationale Funktion $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ mit Nennergrad $\partial q \leqq m$ und Zählergrad $\partial p \leqq l$ zu bestimmen, die die gegebenen Punkte interpoliert.

Diese Aufgabe führt man formal auf die Bestimmung der Koeffizienten der Polynome

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_l \cdot x^l \quad \text{und} \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m \cdot x^m \end{aligned} \tag{1}$$

aus dem Gleichungssystem

$$(2') \qquad a_0 + a_1 x_j^1 + \cdots + a_l \cdot x_j^l = (b_0 + b_1 x_j + \cdots + b_m x_j^m) \cdot y_j \qquad \text{mit} \quad j = 0, \ldots, n; \quad n := l + m$$

zurück.

Die Frage, ob tatsächlich alle Punkte durch die rationale Funktion erreicht werden und ob die Interpolierende zwischen den Punkten sogar stetig ist, soll unbeachtet bleiben; denn es stehen in dieser Note die formalen Operationen im Vordergrund. Deshalb wird auch grundsätzlich angenommen, daß auftretende Nenner von Null verschieden sind.

Bezüglich der Literatur zu diesem Problemkreis wird auf das ausführliche Verzeichnis in einer Arbeit von Meinguet [1] verwiesen. Nach Wetterling kann man zu einem inhomogenen System übergehen, indem man etwa

$$f_j := y_j \cdot x_j$$

setzt und annimmt, daß außerdem b_0 nicht verschwindet, so daß durch

$$b_0 = 1$$

normiert werden kann.

Dies ergibt

$$(3') \qquad a_0 + a_1 x_j^1 + \cdots + a_l x_j^l - f_j b_1 - \cdots - f_j b_m x_j^{m-1} = y_j \quad \text{mit} \quad j = 0, \ldots, n.$$

Mit den Bezeichnungen

$$X_{j,n}^l := \begin{pmatrix} 1 & x_j & \ldots & x_j^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^l \end{pmatrix}$$

und

$$Y_{j,n} := \begin{pmatrix} y_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix}$$

kann man die Gln. (2') und (3') umschreiben zu

$$(2) \qquad (X_{0,n}^l, Y_{0,n} \cdot X_{0,n}^m) \cdot \begin{pmatrix} a \\ -\tilde{b} \end{pmatrix} = 0,$$

$$(3) \qquad (X_{0,n}^l, F_{0,n} \cdot X_{0,n}^r) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = c; \qquad r := m - 1,$$

mit $a := (a_0, \ldots, a_l)$; $\tilde{b} := (b_0, \ldots, b_m)$, $b := (b_1, \ldots, b_m)$ und $c := (y_0, \ldots, y_n)$. Jedoch kommt es bei dem Algorithmus nicht auf die spezielle Gestalt des Vektors c an.

2.

Unser Hauptergebnis ist eine Faktorisierung der in (3) auftretenden Matrix $M_0 := (X_{0,n}^l, F_{0,n} \cdot X_{0,n}^r)$ mit Hilfe von Dreiecks- und Permutationsmatrizen. Es darf o.B.d.A. $l > r$ angenommen werden, anderenfalls würde man $1/R(x)$ bestimmen.

Seien $\lambda(i,k) := \frac{1}{x_i - x_k}$ die bei der Bildung des ersten Differenzenquotienten auftretenden Faktoren und

$$(4) \qquad T_0 := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \lambda(0,1) & \lambda(1,0) & & & & 0 \\ \lambda(0,2) & 0 & \lambda(2,0) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \lambda(0,n) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda(n,0) \end{pmatrix}.$$

Bei Linksmultiplikation von M_0 mit T_0 bleibt die 1. Zeile unverändert, während in den übrigen Zeilen 1. Differenzenquotienten entstehen. Die $(j+1)$te Zeile $(j \geqq 1)$ des Produktes hat die Form

$$\begin{aligned}(T_0 \cdot M_0)_{j+1} &= \big(0, \Delta(0,j)\,x, \Delta(0,j)\,x^2, \ldots, \Delta(0,j)\,x^l, \Delta(0,j)\,f, \Delta(0,j)\,(xf), \ldots, \Delta(0,j)\,(x^r f)\big) \\ &= (0, 1, x_0 \Delta x + x_j \Delta x, \ldots, x_0 \Delta x^{l-1} + x_j^{l-1} \Delta x, \Delta f, f_0 \Delta x + x_j \Delta f, \ldots, f_0 \Delta x^r + x_j^r \Delta f).\end{aligned}$$

Dabei wurde die Produktformel $\Delta(0,j)\,(f \cdot g) = f_0 \cdot \Delta g + g_j \Delta f$ verwendet und außerdem in der zweiten Zeile das Indexpaar weggelassen.

Ein Blick auf diese Zeile lehrt, daß man durch Spaltensubtraktionen die Terme mit dem Faktor x_0 bzw. f_0 eliminieren kann, d.h. Rechtsmultiplikation mit der Matrix

$$(6) \qquad S_0 := \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & -x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x_0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -f_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -f_0 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \hline \underbrace{\qquad 0 \qquad}_{l+1} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{m} \end{array}\right) \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} l+1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}\right\} m \end{matrix}$$

ergibt

$$(7) \qquad T_0 \cdot M_0 \cdot S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \\ 0 & \\ 0 & X_{1,n}^{l-1} \quad \Delta F_{1,n} \cdot X_{1,n}^{m-1} \end{pmatrix} \text{mit } \Delta F_{1,n} := \operatorname{diag}\big(\Delta^1(0,j) f\big).$$

Gilt $l-1>r$, so kann man den Prozeß offenbar mit analog definierten Matrizen T_1, S_1 wiederholen, die nun auf die 2. bis $(l+m+1)$te Zeile und Spalte die gleichen Operationen ausüben wie T_0 und S_0 auf die gesamte Matrix M_0.

Gilt jedoch $l-1 \leqq r$, so wird man die Rolle der beiden auftretenden Untermatrizen vertauschen. Man benutze dazu die Permutationsmatrix P_0, welche die Spalten 2 bis $l+1$ nach hinten bringt. Dann gilt

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \nabla^1 F_{1,n} \end{pmatrix} \cdot T_0 \cdot M_0 \cdot S_0 \cdot P_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0\ldots 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & X_{1,n}^{m-1} & \nabla^1 F_{1,n} \cdot X_{1,n}^{l-1} \end{array}\right) =: M_1,$$

wenn mit

$$\nabla^n (x_0, \ldots, x_n) y$$

die inversen Differenzen, definiert durch

$$\nabla^0 (x_j) y = y_j,$$

$$\nabla^n (x_0, \ldots, x_n) y = \frac{x_{n-1} - x_n}{\nabla^{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) y - \nabla^{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-2}, x_n) y},$$

bezeichnet werden.

Übersichtlich wird (8) durch die Abkürzungen

$$U_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \nabla^1 F_{1,n} \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot T_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \mu(0,1) & \mu(1,0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mu(0,n) & 0 & & \mu(u,0) \end{pmatrix}$$

mit $\mu(i,k) := \dfrac{\lambda(i,k)}{\Delta(i,k) f} = \dfrac{1}{f_i - f_k}$ und

$$V_0 := S_0 \cdot P_0 = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & -f_0 & & & -x_0 & & \\ 0 & & \ddots & & 1 & -x_0 & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -f_0 & & & -x_0 \\ & & & & & & 1 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & & 1 & & & \end{array}\right),$$

dann gilt nämlich

$$(8')\qquad M_1 = U_0 \cdot M_0 \cdot V_0.$$

Man kann nun den Prozeß der Reduktion an der aus M_1 durch Streichen der 1. Zeile und 1. Spalte entstehenden Matrix wiederholen.

Die Matrix M_0 wird auf diese Weise sukzessiv auf die Diagonalform reduziert.

Zunächst geht man $l-m=l-r-1$mal nach (7) vor und erhält

$$M_{l-m}=\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots 0\\ \vdots \quad \vdots \\ 0\dots 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots\dots 0\\ \vdots \qquad \vdots \\ 0\dots\dots 0\end{matrix} \\ \hline \underbrace{0}_{l-m} & X_{l-m,n}^{r+1} & \Delta^{l-m}F_{l-m,n}\cdot X_{l-m,n}^{r} \end{array}\right)$$

$$=T_{l-m-1}\dots T_0M_0S_0\dots S_{l-m-1}.$$

Von nun an kann man durch $2m$-malige Reduktion nach (8) über $M_{l-m+1}=U_{l-m}\cdot M_{l-m}\cdot V_{l-m},\dots$ zu $M_n=E$ gelangen. Mit

$$T:=\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \nabla^{2m}\Delta^{l-m}F_{n,n} \end{array}\right)\cdot T_{n-1}\cdot\dots\cdot T_0=U_{l+r}\dots U_{l-m}\cdot T_{l-m-1}\dots T_0$$

und, da P_{n-1} die Einheitsmatrix ist,

$$S:=S_0\cdot\dots\cdot P_{n-2}\cdot S_{n-1},$$
$$=S_0\dots S_{l-m-1}V_{l-m}\dots V_{l+r}$$

gilt offenbar

$$M_0=T^{-1}\cdot S^{-1}. \tag{9}$$

3.

Als erste Anwendung kann man die in (3) gestellte Aufgabe durch

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}=S\cdot T\cdot c \tag{10}$$

lösen.

Zur Bestimmung von T hat man nur die Differenzenquotienten bzw. inversen Differenzenquotienten zu ermitteln, die Linksmultiplikation von c mit $T_0, T_1, \dots, U_{l+m}$ bewirkt gerade die Bildung der Differenzenquotienten bzw. der inversen Differenzenquotienten der Werte $y_0, \dots, y_n$.

Die anschließende Multiplikation mit den Faktoren S_k bzw. V_k von S entspricht der sukzessiven Bestimmung der Polynomkoeffizienten. Im ganzen hat man den von Wetterling in [8] beschriebenen Algorithmus vor sich.

4.

Zur zweiten Anwendung nehme man an, daß die Interpolierende im Punkt $x_{n+1}:=x\neq x_j$ $(j=0,\dots,n)$ zu berechnen ist, dann erhält man eine weitere Gleichung der Form (1) mit $j=n+1$ und eine nichttriviale Lösung dieser homogenen Gleichungen kann nur existieren, wenn die Determinante der Matrix

$$N:=(X_{0,n+1}^{l},\ Y_{0,n+1}\cdot X_{0,n+1}^{m}) \tag{11}$$

verschwindet. Man führt die Faktorisierung wie oben durch, läßt jedoch den bei T ganz links stehenden Faktor weg, d. h. man definiert diesmal die $(n+2) \times (n+2)$ Matrizen

$$T := T_n \cdot U_{n-1} \dots U_{l-m} T_{l-m-1} \dots T_0$$
$$S := S_0 \dots S_{l-m-1} \cdot V_{l-m} \dots V_{n-1} \cdot S_n .$$

Es ist

$$T \cdot N \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & A \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$A = \frac{\nabla^{2m} \Delta^{l-m}(x_0, \dots, x_{n-1}, x)\, y - \nabla^{2m} \Delta^{l-m}(x_0, \dots, x_n)\, y}{x - x_n} .$$

Nullsetzen von A und Auflösen nach $y(x)$ gibt die Kettenbruchdarstellung. Für $l = m$ erhält man z. B.

$$y(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)|}{|\alpha_1} + \frac{(x - x_1)|}{|\alpha_2} + \dots + \frac{(x - x_{n-1})|}{|\alpha_n},$$

mit

$$\alpha_j = \nabla^j (x_0, x_1, \dots, x_j)\, y .$$

Rechnet man nach dem Wetterlingschen Algorithmus, so ist der numerische Aufwand nach diesem Schema jedoch größer als bei der Ermittlung des Kettenbruches, wie auch das folgende Beispiel zeigt.

5.

Ein einfaches Beispiel mag die Zerlegung und Interpolation verdeutlichen. Gleichzeitig ist der Rechenaufwand für das eine und das andere Verfahren zu erkennen. Nur die unterstrichenen Größen wird man in einem geeigneten Schema berechnen, die angegebenen Matrizen lassen sich auf Grund der Theorie ohne Rechenaufwand angeben.

Gesucht die gebrochen lineare Funktion

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x} \text{ mit}$$

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	3	13/4	73/21
Für b) wird benötigt: $x_j y_j$	$\underline{3}$	$\underline{13/2}$	$\underline{73/7}$

a) Zunächst wird die *Kettenbruchdarstellung* angegeben. Schema der inversen Differenzenquotienten:

x_j	y_j	∇y_j	$\nabla^2 y_j$
1	3		
		$\underline{4}$	
2	$\frac{13}{4}$		$\underline{5}$
		$\underline{4{,}2}$	
3	$\frac{73}{21}$		

also ist $R(x) = 3 + \frac{x-1|}{|4} + \frac{x-2|}{|5}$.

Will man die obige Form für $R(x)$ berechnen, so kann man bilden

$$\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & x-2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49+8x \\ 18+x \end{pmatrix}.$$

Schreibt man dies als Gleichungen für die aus den Koeffizienten bestehenden Vektoren auf, so erhält man

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Unterteilungen sollen andeuten, welche Zeilen jeweils die Koeffizienten der Teilzähler bzw. -nenner bei der Berechnung liefern. Die Polynomform der Matrizen läßt jedoch deutlicher erkennen, welche Rechnungen numerisch ausgeführt werden müssen, nämlich nur die zur Ermittlung der Zählerkoeffizienten.

b) Bestimmung der Koeffizienten nach der *Methode von Wetterling* durch Auflösen des linearen Gleichungssystems. Wie in 1. wird durch $b_0 = 1$ normiert. Die oben angegebenen Matrizen haben folgende Gestalt:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0 y_0 \\ 1 & x_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{3} \\ 1 & 2 & \underline{13/2} \\ 1 & 3 & \underline{73/7} \end{pmatrix}.$$

Zweckmäßig bildet man das Schema der inversen Differenzen

x_j	f_j	∇f_j	$\nabla^2 f_j$
1	3		
		$\underline{2/7}$	
2	6,5		$\underline{-182/3}$
		$\underline{7/26}$	
3	73/7		

Damit kann man die oben eingeführten Matrizen sofort niederschreiben:

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu(0,1) & \mu(1,0) & 0 \\ \mu(0,2) & 0 & \mu(2,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/7 & 2/7 & 0 \\ -7/52 & 0 & 7/52 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = S_0 \cdot P_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 182/3 & -182/3 \end{pmatrix}; \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es gilt, wie man an dem Beispiel auch direkt sehen kann,

$$U_1 \cdot U_0 \cdot M_0 \cdot V_0 \cdot S_1 = E.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten setzt man

$$c = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13/4 \\ 73/21 \end{pmatrix}$$

und bildet durch die Multiplikationen mit den U_j das Analogon des Differenzenschemas

$$\tilde{c} := U_1 \cdot U_0 \cdot c = U_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \underline{1/14} \\ \underline{5/78} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/14 \\ \underline{4/9} \end{pmatrix}.$$

Schließlich entspricht wie in a) die Multiplikation mit $S = V_0 \cdot S_1$ dem Aufbau der Koeffizienten aus $\tilde{c}$. Man erhält

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} = V_0 \cdot S_1 \cdot \tilde{c} = V_0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \underline{-1/18} \\ 4/9 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{18} \begin{pmatrix} 49 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und dies sind bis auf den Proportionalitätsfaktor 18 die gleichen Koeffizienten wie in a) für Zähler und Nenner von $R(x)$.

Es ist deutlich, daß bei diesem Verfahren zusätzlicher Rechenaufwand durch die Bildung des „verallgemeinerten Differenzenschemas" für die Koeffizienten von c entsteht.

Mit Vorteil wird man deshalb das Wetterlingsche Verfahren nur dann verwenden, wenn man über den Vektor c keine weiteren Informationen besitzt.

Sobald eine Möglichkeit besteht, die Aufgabe formal als eigentliche rationale Interpolation zu schreiben, erweist sich die Berechnung mit Hilfe des Kettenbruches als ökonomischer.

6.

Bei dem Remes-Algorithmus zur Berechnung der rationalen T-Approximation kennt man nach [5, 6] zu den in der Iteration auftretenden rationalen Näherungen der T-Approximierenden die Werte

$$x_j,\ R_j = \frac{p_j}{q_j},\ f_j \quad \text{und} \quad \eta_j := (-1)^j (R_j - f_j) \quad \text{für} \quad j = 0, \ldots, l+m+1.$$

Gesucht ist $\tilde{R}(x) = \dfrac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$, so daß

$$\tilde{R}(x_j) = f_j + (-1)^j \cdot \eta$$

gilt und η wird in guter Näherung durch

$$\eta = \sum \mu_j q_j^2 \cdot (f_j - R_j), \qquad \lambda_j = \Big(\prod_{k \neq j} (x_k - x_j)^{-1}\Big), \qquad \mu_j = \frac{\lambda_j}{\sum |\lambda_j|\, q_j^2}$$

gegeben. Damit ist $\tilde{R}(x_j)$ an $n+2$ Stellen gegeben, also sogar einer Stelle zuviel, so daß man eine rationale Interpolation durchführen kann. Erfahrungsgemäß ist es zweckmäßig, einen der inneren Extremwerte x_k wegzulassen, da dabei die geringste Abweichung zwischen den berechneten $\tilde{R}(x_k)$ und dem gewünschten Wert $f_k+(-1)^k \cdot \eta$ entsteht.

Sollte jedoch bei der Bestimmung von $\tilde{R}(x)$ die Genauigkeit der benutzten Rechenanlage nicht ausreichen, so daß man zu doppelter Genauigkeit und damit größerem Rechenaufwand übergehen muß, so ist es zweckmäßig,

$$\tilde{R}(x)=\frac{p(x)+\delta p(x)}{q(x)+\delta q(x)}$$

anzusetzen und die Polynome $\delta p(x)$ und $\delta q(x)$ aus

$$q(x_j)\cdot\left[\frac{p(x_j)+\delta p(x_j)}{q(x_j)+\delta q(x_j)}-\frac{p(x_j)}{q(x_j)}\right]=q(x_j)\left(f_j+(-1)^j\cdot\eta-R_j\right),$$

also näherungsweise

$$\delta p(x_j)-R_j\cdot\delta q(x_j)=(-1)^j\cdot q(x_j)\cdot(\eta-\eta_j)$$

mit einer Normierung, etwa daß der höchste Koeffizient von $\delta q(x_j)$ verschwinden soll, zu berechnen und hier ist dann das Wetterlingsche Verfahren von Vorteil. Nur die Additionen $p(x)+\delta p(x)$ und $q(x)+\delta q(x)$ bedürfen der Rechnung in hoher Genauigkeit.

Literatur

1. Meinguet, J.: On the solubility of the Cauchy interpolation problem. In: Approximation theory, ed. by A. Talbot. London and New York:: Academic Press 1970.
2. Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd. 1. Stuttgart: Teubner 1954.
3. Stoer, J.: Über zwei Algorithmen zur Interpolation mit rationalen Funktionen. Num. Math. **3**, 285—304 (1961).
4. Thiele, T. N.: Interpolationsrechnung. Leipzig: Teubner 1909.
5. Werner, H.: Ein Algorithmus zur Berechnung rationaler Tschebyscheff-Approximationen. ZAMM **42**, T. 62—64 (1962).
6. — Eigenwerttheorie und rationale Tschebyscheff-Approximation. ZAMM **43**, T. 35—37 (1963).
7. — Stoer, J., Bommas, W.: Rational Chebyshev approximation. Num. Math. **10**, 289—306 (1967).
8. Wetterling, W.: Ein Interpolationsverfahren zur Lösung der linearen Gleichungssysteme, die bei der rationalen Tschebyscheff-Approximation auftreten. Archive Rat. Mech. Anal. **12**, 403—408 (1963).
9. Wynn, P.: Über einen Interpolations-Algorithmus und gewisse andere Formeln, die in der Theorie der Interpolation durch rationale Funktionen bestehen. Num. Math. **2**, 151—182 (1960).

Prof. Dr. H. Werner
Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik
D-4400 Münster, Roxeler Str. 64
Deutschland