Werk

Titel: Fehlerabschätzung für eine Klasse von nichtparametrischen Schätzfolgen.

Autor: Wertz, W.

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358794056_0019|log40

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Fehlerabschätzung für eine Klasse von nichtparametrischen Schätzfolgen

Von W. WERTZ, Wien [1])

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit setzt Untersuchungen gewisser nichtparametrischer Schätzfolgen für eindimensionale Verteilungsdichten fort, wie sie unter anderem in PARZEN, ROSENBLATT und WEISS/WOLFOWITZ angestellt wurden. Die Regularitätsvoraussetzungen für die zu schätzenden Dichten sind dabei ähnlich wie in WEISS/WOLFOWITZ, nur in mancher Beziehung wesentlich schwächer, gefaßt. Da zum Zwecke der Kenntnis der „wahren Verteilung" die Dichte in ihrem gesamten Verlauf geschätzt werden muß, werden hier nur Sätze, die globaler Natur sind, angegeben. Die Angabe konkreter Schranken erfolgt im Hinblick auf die Anwendung für Stichproben mittleren Umfanges (moderate samples); diese Ergebnisse liefern natürlich gleichzeitig auch asymptotische Aussagen.

2. Ergebnisse

Gegeben sei eine Klasse Λ von eindimensionalen Verteilungsdichten f, die später noch spezialisiert wird. Für jedes $f \in \Lambda$ sei P_f das zu f gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß: $P_f(B) := \int_B f(x)\,\mathrm{d}x \,\forall\, B \in b_1$; b_1 bezeichnet die Klasse der eindimensionalen BORELschen Mengen. ξ sei eine zufällige Variable, die nach P_f verteilt ist, wobei $f \in \Lambda$, ansonsten aber unbekannt ist. $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ sei eine Folge unabhängiger zufälliger Variabler, die alle wie ξ verteilt sind. Auf Grund von n Beobachtungen von ξ, also einer Realisation $x^{(n)} := (x_1, \ldots, x_n)$ von $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, soll die unbekannte Dichte f geschätzt werden.

Es sei $K : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$ eine BOREL-meßbare, beschränkte, nichtnegative, gerade Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,\mathrm{d}t = 1$ und $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ (K ist also auch eine Dichte, wird aber in diesem Zusammenhang eher als Gewichtsfunktion ohne unmittelbare wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation betrachtet). $\{k_n; n = 1, 2, \ldots\}$ sei eine positive Nullfolge mit

$$\lim_{n \to \infty} n k_n = \infty \tag{1}$$

[1]) Dr. WOLFGANG WERTZ, Institut für Statistik der TH Wien, Argentinierstr. 8/7, 1040 Wien.

Λ_0 bezeichnet die Menge aller eindimensionalen Verteilungsdichten, für die $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ und damit $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren, Λ_2^{st} die Menge der zweimal stetig differenzierbaren $f \in \Lambda_0$, so daß $\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ existieren.

Als Schätzfolgen dienen Folgen $h = \{h_n\}$, deren Glieder durch

$$(x; x_1, \dots, x_n) \to h_n(x; x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n k_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{k_n}\right) \quad \text{mit}$$

$$(x; x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n \tag{2}$$

gegeben sind. Aus den Voraussetzungen ergibt sich leicht, daß $h_n(\cdot\,; x_1, \dots, x_n)$ bei festem $n \in \mathbb{N}$ und festem $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ selbst eine Dichtefunktion ist. Bei gegebenen Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$ dient $h_n(x; x_1, \dots, x_n)$ als Schätzwert für f an der Stelle $x \in \mathbb{R}$.

Bekanntlich ist der Begriff, der der Erwartungstreue einer Parameterschätzung entspricht, bei unserem Begriff der Schätzungen nicht sinnvoll (siehe ROSENBLATT; vgl. WERTZ, S. 65). Hingegen läßt sich zeigen, daß die Schätzfolgen von der Gestalt (2) gleichmäßig asymptotisch erwartungstreu von der Ordnung k_n^2 für $f \in \Lambda_2^{st}$ sind (siehe WERTZ, Def. 5.3). Genauer gilt:

$$|E_f h_n(x; \xi_1, \dots, \xi_n) - f(x)| \leqq k_n^2 \|f''\|_\infty \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall f \in \Lambda_2^{st}.$$

Dabei bezeichnet E_f mit Hilfe von f gebildete Erwartungswerte und $\|\cdot\|_\infty$ die uniforme Norm über dem Raume der beschränkten reellen Funktionen.

Eine obere Schranke für die durchschnittliche Abweichung des Erwartungswertes der Schätzungen von der wahren Dichte gibt

Satz 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_f h_n(x; \xi_1, \dots, \xi_n) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqq \frac{k_n^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall f \in \Lambda_2^{st}.$$

Das Integral auf der linken Seite der Ungleichung gibt die Fläche an, die zwischen den Cartesischen Bildern von f und $E_f h_n(\cdot\,; \xi_1, \dots, \xi_n)$ liegt.

Es gilt ferner, daß der mittels f gebildete Erwartungswert der Mittel der (bei festgehaltenen $\xi_1, \dots, \xi_n$) zu $h_n(\cdot\,; \xi_1, \dots, \xi_n)$ gehörigen zufälligen Variablen η gleich dem Mittel von ξ ist; in der entsprechenden Gleichung für die Varianzen kommen Korrekturglieder dazu:

Satz 2:

$\eta := \eta(x_1, \dots, x_n)$ sei eine zufällige Variable, die mit der Dichte $h_n(\cdot\,; x_1, \dots, x_n)$ verteilt ist.

Dann gilt:

$$E_f E_{h_n(\cdot;\xi_1,\ldots,\xi_n)} \eta(\xi_1,\ldots,\xi_n) = E_f\left[\int_{-\infty}^{\infty} x h_n(x;\xi_1,\ldots,\xi_n)\mathrm{d}x\right] = E_f \xi \qquad \forall f \in \Lambda_0$$

$$E_f[V_{h_n(\cdot;\xi_1,\ldots,\xi_n)} \eta(\xi_1,\ldots,\xi_n)] =$$

$$= E_f\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[x - \int_{-\infty}^{\infty} y h_n(y;\xi_1,\ldots,\xi_n)\mathrm{d}y\right]^2 h_n(x;\xi_1,\ldots,\xi_n)\mathrm{d}x\right\} =$$

$$= \frac{n-1}{n} V_f \xi + k_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t \qquad \forall f \in \Lambda_0 .$$

Überdies gilt:

$$E_{h_n(\cdot;x_1,\ldots,x_n)} = \overline{x^{(n)}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{und}$$

$$V_{h_n(\cdot;x_1,\ldots,x_n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x^{(n)}})^2 + k_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t .$$

Ein anderes Gütekriterium für Schätzungen für f erhält man, wenn man als Abstand $\Delta(g_1,g_2)$ zweier Dichten g_1 und g_2 definiert:

$$\Delta(g_1,g_2) := \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x) - g_2(x)]^2 \mathrm{d}x .$$

$\Delta(g_1,g_2)$ gibt ein Maß für die Fläche an, die zwischen den Cartesischen Bildern der beiden Dichten g_1 und g_2 liegt.

Satz 3:

$$\Delta_{f,n} := E_f \Delta(h_n(\cdot;\xi_1,\ldots,\xi_n),f) \leqq \frac{1}{nk_n}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{k_n}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{n-1}{n} k_n^2 \|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t \cdot$$

$$\cdot\left[2 + \frac{1}{n-1} + \frac{k_n^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= 0\left(\max\left(\frac{1}{nk_n}, k_n^2\right)\right) \qquad \forall f \in \Lambda_2^{st} .$$

In analoger Weise lassen sich untere Schranken für $\Delta_{f,n}$, die aber nur im Falle, daß größenordnungsmäßig $\frac{1}{nk_n} > k_n^2$ ist, von Interesse sind, angeben:

$$\Delta_{f,n} \geqq \frac{1}{nk_n} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{k_n}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$- \frac{n-1}{n} k_n^2 \|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t \cdot$$
$$\cdot \left[2 + \frac{1}{n-1} + \frac{k_n^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t \right] \quad \forall f \in \Lambda_2^{st}.$$

Also ist $\Delta_{f,n} = \Omega\left(\frac{1}{nk_n}\right)$ bei $n \to \infty$, falls $\lim_{n\to\infty} nk_n^3 = 0$ ist.

Unter der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} nk_n^3 = 0$ erhält man sogar (vgl. WERTZ, Satz 5.5):

$$\lim_{n\to\infty} W_f \left\{ \frac{h_n(x;\xi_1,\dots,\xi_n) - f(x)}{\sqrt{n}\,\sigma_n(f;x)} \leqq y \right\} = \Phi(y)$$
gleichmäßig in $y \in \mathbb{R}_1 \quad \forall f \in \Lambda_2^{st}$.

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, W_f die Urbildwahrscheinlichkeit von P_f bezüglich ξ und $n\sigma_n^2(f;x)$ die mittels f gebildete Varianz von $h_n(x;\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit sind in WERTZ zu finden.

3. Beweise der Sätze

Beweis von Satz 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_f h_n(x;\xi_1,\dots,\xi_n) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{nk_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-t}{k_n}\right) f(t)\,\mathrm{d}t - f(x) \right| \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{nk_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) f(x + k_n t) \cdot k_n\,\mathrm{d}t - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(t)[f(x + k_n t) - f(x)]\,\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \left[k_n t f'(x) + \int_0^{k_n t} (k_n t - v) f''(x+v)\,\mathrm{d}v \right] \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$
$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \int_{-\infty}^{\infty} (k_n t - v) |f''(x+v)| c_{[0,k_n t]}(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \int_{-\infty}^{\infty} (k_n t - v) \cdot c_{[0,k_n t]}(v) \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x+v)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \cdot \frac{k_n^2 t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{k_n^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dabei wurde an wesentlicher Stelle benützt, daß K gerade ist. Die Vertauschung der Integrale erfolgt gemäß dem Satz von FUBINI.

Beweis von Satz 2:

$$E_{h_n(\cdot;x_1,\dots,x_n)}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} x h_n(x;x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{nk_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{k_n}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{nk_n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i + k_n t_i)K(t_i)\cdot k_n\mathrm{d}t_i$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_i K(t_i)\mathrm{d}t_i + k_n\int_{-\infty}^{\infty} t_i K(t_i)\mathrm{d}t_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x^{(n)}}.$$

Daher ist $E_f E_{h_n(\cdot;\xi_1,\dots,\xi_n)}\eta(\xi_1,\dots,\xi_n) = E_f\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = E_f\xi$.

Ferner gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 h_n(x;x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{nk_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{k_n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{nk_n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i + k_n t_i)^2 K(t_i)\cdot k_n\mathrm{d}t_i$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2\int_{-\infty}^{\infty} K(t_i)\mathrm{d}t_i + 2k_n x_i\int_{-\infty}^{\infty} t_i K(t_i)\mathrm{d}t_i + k_n^2\int_{-\infty}^{\infty} t_i^2 K(t_i)\mathrm{d}t_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + k_n^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow V_{h_n(\cdot;x_1,\dots,x_n)}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + k_n^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x^{(n)}})^2 + k_n^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t.$$

Daraus ergibt sich:

$$E_f[V_{h_n(\cdot;\xi_1,\dots,\xi_n)}\eta(\xi_1,\dots,\xi_n)] = E_f\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi^{(n)}})^2\right] + k_n^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t.$$

Wir setzen für das Folgende $E_f\xi =: a$.

$$E_f\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_f\left[n(\xi_i - a) - \sum_{j=1}^{n}(\xi_j - a)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_f[n(n-1)(\xi_i - a)^2] = (n-1)V_f\xi.$$

Daraus erhält man schließlich

$$E_f[V_{h_n(\cdot;\xi_1,\dots,\xi_n)}\eta(\xi_1,\dots,\xi_n)] = \frac{n-1}{n}V_f\xi + k_n^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\mathrm{d}t.$$

Beweis von Satz 3:

Der weitere Verlauf des Beweises wird ergeben, daß die Integrationen in (3) vertauscht werden dürfen.

$$\Delta_{f,n} = E_f \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{nk_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-\xi_i}{k_n}\right) - f(x) \right]^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} E_f[\ldots]^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{nk_n^2} E_f K^2\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) + \frac{n-1}{n} \cdot \left[\frac{1}{k_n} E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) \right]^2 \right.$$

$$\left. - \frac{2f(x)}{k_n} E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) + f^2(x) \right\} \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Zunächst untersuchen wir

$$\frac{1}{k_n} E_f K^2\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) - f(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)[f(x+k_n t) - f(x)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) \left[k_n t f'(x) + \int_0^{k_n t} (k_n t - v) f''(x+v) \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) \int_0^{k_n t} (k_n t - v) f''(x+v) \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t.$$

Daher ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{nk_n^2} E_f K^2\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{nk_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) \cdot \int_0^{k_n t} (k_n t - v) \cdot f''(x+v) \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{nk_n} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) \int_{-\infty}^{\infty} (k_n t - v) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot c_{[0,k_n t]}(v) \cdot f''(x+v) \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \right\}. \tag{4}$$

Die Abbildung $(x,t,v) \to K^2(t) \cdot (k_n t - v) \cdot f''(x+v) \cdot c_{[0,k_n t]}(v)$ ist bei unseren Voraussetzungen offensichtlich BOREL-meßbar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) \cdot (k_n t - v) \cdot |f''(x+v)| \cdot c_{[0,k_n t]}(v) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) \cdot \int_0^{k_n t} (k_n t - v) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f''(x+v)| \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{k_n^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K^2(t) \mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Dieses Integral existiert nach Voraussetzung. Der Integrand von (5) ist nichtnegativ, folglich kann man nach dem Satz von FUBINI die Integrale vertauschen, insbesondere E_f und $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \mathrm{d}x$.

$$\Rightarrow (4) = \frac{1}{nk_n}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{nk_n}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(k_n t - v)\cdot c_{[0,k_n t]}(v)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f''(x+v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{nk_n}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{nk_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_n^2 t^2}{2}\cdot K^2(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{nk_n}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{k_n}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K^2(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4'}$$

Weiters ist

$$\frac{1}{k_n^2}\left[E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right)\right]^2 - f^2(x) = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k_n}K\left(\frac{x-t}{k_n}\right)\cdot f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 - f^2(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)f(x+k_n t)f(x+k_n u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - f^2(x)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\cdot[f(x+k_n t)f(x+k_n u) - f^2(x)]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,. \tag{6}$$

Mit Hilfe von $f(x+k_n t) = f(x) + k_n t f'(x) + \int_0^{k_n t}(k_n t - v)\cdot f''(x+v)\,\mathrm{d}v$ und einer analogen Entwicklung für $f(x+k_n u)$ formen wir den Integranden um, wobei wir gleich berücksichtigen, daß gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\cdot k_n t\cdot f'(x)f(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = k_n f'(x)f(x)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\cdot k_n^2 tu\cdot[f'(x)]^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_n t\cdot K(t)K(u)\cdot f'(x)\int_0^{k_n u}(k_n u - w)\cdot f''(x+w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$= k_n f'(x)\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\int_0^{k_n u}(k_n u - w)\cdot f''(x+w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u = 0\,.$$

Damit erhalten wir also:

$$J_1 := \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{k_n^2}\cdot\left[E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right)\right]^2 - f^2(x)\right\}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\cdot$$

$$\cdot\left[2f(x)\int_0^{k_n t}(k_n t - v)f''(x+v)\,\mathrm{d}v + \int_0^{k_n t}\int_0^{k_n u}(k_n t - v)f''(x+v)(k_n u - w)\right.$$

$$\left.\cdot f''(x+w)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$|J_1| \leqq 2\|f''\|_\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\int_0^{k_n t}(k_n t - v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$+ \|f''\|_\infty\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t)K(u)\int_0^{k_n t}(k_n t - v)\cdot|f''(x+v)|\,\mathrm{d}v\int_0^{k_n u}(k_n u - w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_n^2 t^2}{2} \cdot K(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

$$+ \|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_n^2 t^2}{2} \cdot K(t) \cdot \frac{k_n^2 u^2}{2} \cdot K(u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,.$$

Also ist

$$|J_1| \leqq k_n^2 \|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t \cdot \left[1 + \frac{k_n^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t\right]. \tag{7}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n-1}{nk_n^2} \left[E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{n-1}{n} \cdot J_1\,. \tag{8}$$

Somit bleibt noch $\frac{2}{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) \mathrm{d}x$ abzuschätzen:

$$\frac{1}{k_n} E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \cdot [f(x + k_n t) - f(x)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \int_0^{k_n t} (k_n t - v) \cdot f''(x + v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow J_2 := 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) \cdot \frac{1}{k_n} E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) - f^2(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot K(t) \int_0^{k_n t} (k_n t - v) \cdot f''(x + v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,.$$

$$|J_2| \leqq 2\|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K(t) \int_0^{k_n t} (k_n t - v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = k_n^2 \|f''\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Also ist

$$\frac{2}{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot E_f K\left(\frac{x-\xi}{k_n}\right) \mathrm{d}x = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x + J_2\,. \tag{10}$$

Setzt man (4′), (8) und (10) in (3) ein, so erhält man:

$$\Delta_{f,n} = \frac{1}{nk_n} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{k_n}{2n} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{n-1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{n-1}{n} J_1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x - J_2 + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{nk_n} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{k_n}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{n-1}{n} J_1 - J_2\,.$$

Einsetzen der Schranken (7) bzw. (9) für J_1 bzw. J_2 ergibt die im Satz angegebene Abschätzung.

Die untere Schranke berechnet man auf entsprechende Weise.

Literatur

PARZEN, E.: On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist. **33**, 1962, 1065–1076.

ROSENBLATT, M.: Remarks on some nonparametric estimates of a density function. Ann. Math. Statist. **27**, 1956, 832–837.

WEISS, L. und J. WOLFOWITZ: Estimation of a density function at a point. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. **7**, 1967, 327–335.

WERTZ, W.: Zu einigen Fragen aus der Theorie der Schätzfolgen. Dissertation an der Philosoph. Fakultät d. Univ. Wien, 1969.