Über den Erwartungswert der bis zur Zeit t angekommenen Kunden einer Warteschlange bei gleichverteilten Ankunftszeiten

von K. BOSCH[1]) und H. RICHTER[2])

Zusammenfassung: Für eine Warteschlange mit unabhängigen übereinstimmend verteilten Zwischenankunftszeiten wird eine geschlossene Formel für den Erwartungswert der vor der Zeit $t>0$ angekommenen Kunden angegeben. Er stellt sich als unendliche Summe von wiederholten Faltungen der Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten dar. In dem speziellen Fall, daß die Zwischenankunftszeiten in [0,1] gleichverteilt sind, wird der Erwartungswert mit Hilfe einer Differentiodifferenzengleichung explizit angegeben.

Summary: For a queuing process with independent identically distributed interarrival times a closed formula for the expected number of customers, arrived up to the time $t>0$ is given. The number is a sum of repeated convolutions of the original distribution of the interarrival times is the uniform distribution in [0,1], the above named convolution formula is evaluated using a difference-differential equation.

Zu den Zeitpunkten τ_n, $n=1, 2, \cdots$ mit $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ kommen Kunden an. Dabei seien die Differenzen zweier Ankunftszeiten sowie die Ankunftszeit des zur Zeit $t=0$ startenden ersten Kunden unabhängig und übereinstimmend verteilt mit der Verteilungsfunktion $F(t)$, d. h. es gelte

$$\begin{gathered} \vartheta_n = \tau_n - \tau_{n-1},\; n=1, 2, \cdots \; \tau_0 = 0 \\ P(\vartheta_n < t) = F(t); \;\; F(t) = 0 \text{ für } t \leq 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bis zum Zeitpunkt t mindestens k Kunden angekommen sind, ist gleich $F_k(t)$, wobei $F_k(t)$ die k-fache Faltung von F ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bis zum Zeitpunkt t genau k Kunden angekommen sind, bezeichnen wir mit $p_k(t)$. Dann gilt offensichtlich

---

[1]) Dr. KARL BOSCH, Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Universität Braunschweig, 33 Braunschweig, Pockelsstraße 14.

[2]) Prof. Dr. HANS RICHTER, Mathematisches Institut der Universität München, 8 München 13, Schellingstraße 2–8.

$$p_k(t) = F_k(t) - F_{k+1}(t), \text{ mit } F_0(t) = H_0(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ für } \begin{Bmatrix} t > 0 \\ t \leq 0 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Die Zufallsvariable $X(t)$ bezeichne die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t angekommenen Kunden, d. h.

$$P(X(t) = k) = p_k(t). \tag{3}$$

Dann folgt aus (2)

$$P(X(t) = \infty) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = \lim_{n \to \infty} F_n(t). \tag{4}$$

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 1: *Ist $F(t)$ eine Verteilungsfunktion mit $F(t) = 0$ für $t \leq 0$ und ist $F(t)$ von $H_0(t)$ verschieden, so gilt $\lim_{n \to \infty} F_n(t) = 0$ für jedes $t \in R$.*

Beweis: X_i, $i = 1, 2, \cdots$ seien nichtnegative, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F(t)$. Gemäß Voraussetzung über $F(t)$ ist $E(X_i) = m > 0$ für alle i; $m = +\infty$ zugelassen. Zu jedem t_0 gibt es dann ein n_0 mit $F_{n_0}(t_0) < 1$; denn wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so wäre $F_n(t_0) = 1 \ \forall\ n$. Daraus würde aber folgen:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n \cdot m = \int_0^{t_0} t \, \mathrm{d} F_n(t) \leq t_0 \ \forall\ n,$$

was nur für $m = 0$ möglich ist im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus

$$F_{2n_0}(t_0) = \int_0^{t_0} F_{n_0}(t_0 - t) \, \mathrm{d} F_{n_0}(t) \leq (F_{n_0}(t_0))^2$$

folgt sofort $F_{kn_0}(t_0) \leq (F_{n_0}(t_0))^k$. Da die Folge $F_n(t_0)$ in n monoton nichtwachsend ist, gilt wegen $F_{n_0}(t_0) < 1$

$$\lim_{n \to \infty} F_n(t_0) = \lim_{k \to \infty} (F_{n_0}(t_0))^k = 0.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir berechnen nun den Erwartungswert von $X(t)$. Im trivialen Fall $F(t) = H_0(t)$ ist $E(X(t)) = \infty$ wegen $F_n(t) = H_0(t) = 1$ für alle $t > 0$ und $n \in N$. Andernfalls haben wir den

Satz 1: *Ist $F(t) \neq H_0(t)$, so gilt*

$$E(X(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty \text{ für } t > 0.$$

Beweis: Aus (3), (4) und Hilfssatz 1 folgt

$$E(X(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k(t).$$

Zu gegebenem $t>0$ existiert nach Hilfssatz 1 ein n_t mit $F_{n_t}(t)<1$. Es ist dann

$$E(X(t))=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m\cdot n_t} k\cdot p_k(t)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m\cdot n_t} F_n(t)-m\cdot n_t\cdot F_{m\cdot n_t+1}(t)\right),$$

wobei $m\cdot F_{m\cdot n_t+1}(t)\leq m\cdot F_{m\cdot n_t}(t)\leq m\cdot(F_{n_t}(t))^m$ wegen $F_{n_t}(t)<1$ für $m\to\infty$ gegen Null strebt. Also ist

$$E(X(t))=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Wegen $F_1\geq F_2\geq\cdots$ und $F_{m\cdot n_t}(t)\leq F_{n_t}^m(t)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)=\sum_{n=1}^{n_t-1} F_n(t)+\sum_{n=n_t}^{\infty} F_n(t)\leq\sum_{n=1}^{n_t-1} F_n(t)+n_t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(F_{n_t}(t))^m\leq n_t\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(F_{n_t}(t))^m$$

$$=\frac{n_t}{1-F_{n_t}(t)}<\infty.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, daß alle ϑ_n im Intervall $[0, a]$, $a>0$, gleichverteilt sind, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit zur Vereinfachung der Formeln $a=1$ setzen können. Zunächst beweisen wir den

Hilfssatz 2: *Ist* $F(t)=\begin{cases}0 \text{ für } t\leq 0\\ t \text{ für } 0\leq t\leq 1\\ 1 \text{ für } t\geq 1,\end{cases}$

so ist $E(t)=E(X(t))$ stetig, monoton nichtfallend mit $E(t)=0$ für $t\leq 0$, sowie für alle $t\geq 0$ differenzierbar außer an den Stellen $t=0$ und 1, wo $E(t)$ von rechts und von links differenzierbar ist.

Beweis: 1. Nach Satz 1 ist $E(t)$ monoton nichtfallend und beschränkt in jedem endlichen Intervall $0\leq t\leq T$ mit $T<\infty$. Eine Unstetigkeitsstelle müßte also Sprungstelle sein. Dann wäre sie aber eine Unstetigkeitsstelle einer der $F_n(t)$, im Widerspruch zur Stetigkeit aller $F_n(t)$.

2. $E(t)=0$ für $t\leq 0$ folgt aus Satz 1 wegen $F_n(t)=0$ für alle n und $t\leq 0$.

3. Für $n\geq 2$ ist $F_n(t)=\int_{t-1}^{t} F_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u$. Nach dem wegen $F_\nu(t)\geq 0$ anwendbaren Satz von Lebesgue ist also

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{t-1}^{t} F_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u=\int_{t-1}^{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(u)\right)\mathrm{d}u=\int_{t-1}^{t} E(u)\,\mathrm{d}u,$$

was wegen der Stetigkeit von $E(u)$ die Differenzierbarkeit von $\sum_{n=2}^{\infty} F_n(t)$ beweist.

Die Restbehauptung folgt aus

$$E(t)=F_1(t)+\sum_{n=2}^{\infty} F_n(t).$$

Aus dem Beweis dieses Hilfssatzes entnehmen wir die Formel

$$E(t) = F(t) + \int_{t-1}^{t} E(u)\,du,$$

woraus sich ergibt

$$E'(t) = F'(t) + E(t) - E(t-1), \tag{5}$$

wobei beidseitig entweder die Differentiation von links oder von rechts gemeint ist, falls $t=0$ oder 1 ist.
Für $0 \le t \le 1$ liefert (5) die Differentialgleichung

$$E'(t) = 1 + E(t)$$

mit der $E(0)=0$ befriedigenden Lösung

$$E(t) = e^t - 1 \quad \text{in} \quad 0 \le t \le 1. \tag{6}$$

Für $t \ge 1$ liefert (5) dagegen die Differentiodifferenzengleichung

$$E'(t) = E(t) - E(t-1) \quad \text{in} \quad t \ge 1 \quad \text{mit} \quad E(1) = e - 1. \tag{7}$$

Im folgenden Satz geben wir die explizite Gestalt von $E(t)$ an.

Satz 2: *Ist $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung in* $[0,1]$, *so ist*

$$E(t) = -1 + e^{t-k+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_\nu (-1)^{k-1-\nu} \frac{(t-k+1)^{k-1-\nu}}{(k-1-\nu)!}$$

in $k-1 \le t \le k$ für $k = 1, 2, \cdots$, wobei die Konstanten γ_ν gegeben sind durch

$$\gamma_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} e^{\nu-r} (-1)^r \frac{(\nu-r)^r}{r!} \; \textit{für } \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

Beweis: 1. $E(t)$ ist vollständig durch (6) und (7) festgelegt mit der Forderung, daß $E(t)$ an den Stellen $t = 1, 2,$ stetig ist.

2. Für den Fall $k=1$ erhalten wir $E(t) = -1 + e^t \gamma_0 = -1 + e^t$ in Übereinstimmung mit (6).

3. Für die Verifizierung von (7) kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $k-1 < t < k$ annehmen mit $k \ge 2$, da $E(t)$ stetig ist und wegen (7) dann auch $E'(t)$ stetig für $t \ge 1$. Die Rechnung ist elementar, wobei sich zeigt, daß die Werte von γ_ν dabei noch gar keine Rolle spielen.

4. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß das angegebene $E(t)$ an den Stellen $t = 1, 2, \cdots$ stetig ist. Schreiben wir übergangsweise $E_k(t)$ für die angegebene Gestalt von $E(t)$ in $k-1 \le t \le k$, so ist zu zeigen, daß

$$E_k(k) = E_{k+1}(k) \text{ für } k \ge 1.$$

Dies liefert

$$-1 + e \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_\nu (-1)^{k-1-\nu} \frac{1}{(k-1-\nu)!} = -1 + \gamma_k \text{ für } k \ge 1.$$

Man rechnet leicht elementar nach, daß diese Rekursionsformel für die γ_ν [mit $\gamma_1 = e$ wegen $E(1) = e - 1$ nach (6)] gerade durch die im Satz angegebenen Polynome in e erfüllt wird, womit der Satz bewiesen ist.

Korollar: $E(0) = 0$, $E(k) = -1 + \sum_{r=0}^{k-1} e^{k-r}(-1)^r \frac{(k-r)^r}{r!}$ *für* $k = 1, 2, 3, \cdots$

Beweis: 1. $E(0) = 0$ ist bekannt.
2. Die zweite Formel folgt aus dem Beweis des Satzes 2 mit $E(k) = -1 + \gamma_k$.

Bemerkung: Mit Hilfe von (6) und (7) kann man aus den $E(k)$ auch die $E'(k)$ explizit berechnen.

Literatur:

COHEN, J. W.: The single server queue. North-Holland Publishing Company-Amsterdam ondon 1969.

GNEDENKO, B. V. and I. N. KOVALENKO: Introduction to queuing theory. Israel Programm for Scientific Translations, Jerusalem 1968.

SAATY, TH. L.: Element of queuing theory. Mc. aw - Hill Book Companie, Inc. 1961.

TAKÁCS, L.: Introduction to the theory of queues. New York Oxford University Press 1962.